2. Lösning av elektrostatiska problem för ledare

[RMC] 

2.1. Poissons ekvation

[RMC, Jackson]

Från tidigare vet vi att



$$\nabla \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{\rho(\mathbf{r})}{\varepsilon_0} \tag{2.1}$$

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = -\nabla\varphi(\mathbf{r}) \tag{2.2}$$

Detta ger oss genast

$$\nabla^2\varphi(\mathbf{r}) = -\frac{\rho(\mathbf{r})}{\varepsilon_0} \tag{2.3}$$

som kallas **Poissons ekvation**.

2.1. Poissons ekvation

[RMC, Jackson]

Från tidigare vet vi att

$$\nabla \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{\rho(\mathbf{r})}{\varepsilon_0} \tag{2.1}$$

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = -\nabla\varphi(\mathbf{r}) \tag{2.2}$$

Detta ger oss genast

$$\nabla^2\varphi(\mathbf{r}) = -\frac{\rho(\mathbf{r})}{\varepsilon_0} \tag{2.3}$$

som kallas **Poissons ekvation**.

Laplace-operatorn är

$$\nabla^2\varphi = \partial_x^2\varphi + \partial_y^2\varphi + \partial_z^2\varphi \tag{2.4}$$

i **Cartesiska koordinater** (x, y, z),

$$\nabla^2\varphi(\mathbf{r}) = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial\varphi(\mathbf{r})}{\partial\rho}\right) + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2\varphi(\mathbf{r})}{\partial\psi^2} + \frac{\partial^2\varphi(\mathbf{r})}{\partial z^2} \tag{2.5}$$

i **cylindriska koordinater** (ρ, ψ, z), och

$$\nabla^2\varphi(\mathbf{r}) = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial\varphi(\mathbf{r})}{\partial\rho}\right) + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2\varphi(\mathbf{r})}{\partial\psi^2} + \frac{\partial^2\varphi(\mathbf{r})}{\partial z^2} \tag{2.5}$$

i **cylindriska koordinater** (ρ, ψ, z), och

$$\nabla^2\varphi(\mathbf{r}) = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\varphi(\mathbf{r})}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial\varphi(\mathbf{r})}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2\varphi(\mathbf{r})}{\partial\phi^2} \tag{2.6}$$

i **sfäriska koordinater** (r, θ, ϕ),

$\star \qquad \star \qquad \star$

$$\nabla^2\varphi(\mathbf{r}) = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial\varphi(\mathbf{r})}{\partial\rho}\right) + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2\varphi(\mathbf{r})}{\partial\psi^2} + \frac{\partial^2\varphi(\mathbf{r})}{\partial z^2} \tag{2.5}$$

i **cylindriska koordinater** (ρ, ψ, z), och

$$\nabla^2\varphi(\mathbf{r}) = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\varphi(\mathbf{r})}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial\varphi(\mathbf{r})}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2\varphi(\mathbf{r})}{\partial\phi^2} \tag{2.6}$$

i **sfäriska koordinater** (r, θ, ϕ),

$\star \qquad \star \qquad \star$

Om $\rho(\mathbf{r}) = 0$ i de flesta punkter $\mathbf{r}$, d.v.s. vi har ledare och bara ett fåtal externa laddningsfördelningar, så får vi **Laplaces ekvation**

$$\nabla^2\varphi(\mathbf{r}) = 0 \tag{2.7}$$

$$\nabla^2\varphi(\mathbf{r}) = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial\varphi(\mathbf{r})}{\partial\rho}\right) + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2\varphi(\mathbf{r})}{\partial\psi^2} + \frac{\partial^2\varphi(\mathbf{r})}{\partial z^2} \tag{2.5}$$

i **cylindriska koordinater** (ρ, ψ, z), och

$$\nabla^2\varphi(\mathbf{r}) = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\varphi(\mathbf{r})}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial\varphi(\mathbf{r})}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2\varphi(\mathbf{r})}{\partial\phi^2} \tag{2.6}$$

i **sfäriska koordinater** (r, θ, ϕ),

$\star \qquad \star \qquad \star$

Om $\rho(\mathbf{r}) = 0$ i de flesta punkter $\mathbf{r}$, d.v.s. vi har ledare och bara ett fåtal externa laddningsfördelningar, så får vi **Laplaces ekvation**

$$\nabla^2\varphi(\mathbf{r}) = 0 \tag{2.7}$$

Tidigare bestämde vi elfältet från en laddningsfördelning $\rho(\mathbf{r})$ genom att integrera ett enda uttryck. I dessa fall var fördelningen $\rho(\mathbf{r})$ bestämd på förhand.

Vi kommer nu att granska allmänna system av laddningsfördelningar och ledare, och hur de ser ut vid statisk jämvikt. Situationen kompliceras nu av att laddnigar induceras på de ledande ytorna, och denna laddning är inte känd på förhand.

Dylika system beskrivs i det allmänna fallet av Poissons ekvation, vars lösning $\varphi(\mathbf{r})$ alltså ger oss systemets elektrostatiska tillstånd.

Vi kommer nu att granska allmänna system av laddningsfördelningar och ledare, och hur de ser ut vid statisk jämvikt. Situationen kompliceras nu av att laddnigar induceras på de ledande ytorna, och denna laddning är inte känd på förhand.

Dylika system beskrivs i det allmänna fallet av Poissons ekvation, vars lösning $\varphi(\mathbf{r})$ alltså ger oss systemets elektrostatiska tillstånd.

För att lösa Laplaces ekvation (eller Poissons ekvation i allmänhet) för ett system av N st ledare behöver vi känna till **randvillkoren**, d.v.s. definierade värden på den sökta funktionen φ eller dess derivator i givna punkter.

Vi kommer nu att granska allmänna system av laddningsfördelningar och ledare, och hur de ser ut vid statisk jämvikt. Situationen kompliceras nu av att laddnigar induceras på de ledande ytorna, och denna laddning är inte känd på förhand.

Dylika system beskrivs i det allmänna fallet av Poissons ekvation, vars lösning $\varphi(\mathbf{r})$ alltså ger oss systemets elektrostatiska tillstånd.

För att lösa Laplaces ekvation (eller Poissons ekvation i allmänhet) för ett system av N st ledare behöver vi känna till **randvillkoren**, d.v.s. definierade värden på den sökta funktionen φ eller dess derivator i givna punkter.

Om $\varphi(\mathbf{r})$ är känd på ledarnas ytor, d.v.s. vi vet $\varphi_{A_i}, i = 1, 2, \ldots, N$, kallas randvillkoren för **Dirichlet-randvillkor**.

Vi kommer nu att granska allmänna system av laddningsfördelningar och ledare, och hur de ser ut vid statisk jämvikt. Situationen kompliceras nu av att laddnigar induceras på de ledande ytorna, och denna laddning är inte känd på förhand.

Dylika system beskrivs i det allmänna fallet av Poissons ekvation, vars lösning $\varphi(\mathbf{r})$ alltså ger oss systemets elektrostatiska tillstånd.

För att lösa Laplaces ekvation (eller Poissons ekvation i allmänhet) för ett system av N st ledare behöver vi känna till **randvillkoren**, d.v.s. definierade värden på den sökta funktionen φ eller dess derivator i givna punkter.

Om $\varphi(\mathbf{r})$ är känd på ledarnas ytor, d.v.s. vi vet $\varphi_{A_i}, i = 1, 2, \ldots, N$, kallas randvillkoren för **Dirichlet-randvillkor**.

Om istället $\partial\varphi/\partial n$ (potentialens normalderivata, d.v.s. elfältet) är känd på ledarnas ytor, d.v.s. vi vet $(\partial\varphi/\partial n)_{A_i}, i = 1, 2, \ldots, N$, kallas randvillkoren för **Neumann-randvillkor**.

Vi kommer nu att granska allmänna system av laddningsfördelningar och ledare, och hur de ser ut vid statisk jämvikt. Situationen kompliceras nu av att laddnigar induceras på de ledande ytorna, och denna laddning är inte känd på förhand.

Dylika system beskrivs i det allmänna fallet av Poissons ekvation, vars lösning $\varphi(\mathbf{r})$ alltså ger oss systemets elektrostatiska tillstånd.

För att lösa Laplaces ekvation (eller Poissons ekvation i allmänhet) för ett system av N st ledare behöver vi känna till **randvillkoren**, d.v.s. definierade värden på den sökta funktionen φ eller dess derivator i givna punkter.

Om $\varphi(\mathbf{r})$ är känd på ledarnas ytor, d.v.s. vi vet $\varphi_{A_i}, i = 1, 2, \ldots, N$, kallas randvillkoren för **Dirichlet-randvillkor**.

Om istället $\partial\varphi/\partial n$ (potentialens normalderivata, d.v.s. elfältet) är känd på ledarnas ytor, d.v.s. vi vet $(\partial\varphi/\partial n)_{A_i}, i = 1, 2, \ldots, N$, kallas randvillkoren för **Neumann-randvillkor**.

Med både φ_{S_i} och $(\partial\varphi/\partial n)_{A_i}$ specificerade kan en lösning inte garanteras existera. Detta för att Dirichlet- och Neumann-randvillkor kan leda till olika lösningar! Denna kombination av randvillkor kallas **Cauchy-randvillkor**.

Vi kommer nu att granska allmänna system av laddningsfördelningar och ledare, och hur de ser ut vid statisk jämvikt. Situationen kompliceras nu av att laddnigar induceras på de ledande ytorna, och denna laddning är inte känd på förhand.

Dylika system beskrivs i det allmänna fallet av Poissons ekvation, vars lösning $\varphi(\mathbf{r})$ alltså ger oss systemets elektrostatiska tillstånd.

För att lösa Laplaces ekvation (eller Poissons ekvation i allmänhet) för ett system av N st ledare behöver vi känna till **randvillkoren**, d.v.s. definierade värden på den sökta funktionen φ eller dess derivator i givna punkter.

Om $\varphi(\mathbf{r})$ är känd på ledarnas ytor, d.v.s. vi vet $\varphi_{A_i}, i = 1, 2, \ldots, N$, kallas randvillkoren för **Dirichlet-randvillkor**.

Om istället $\partial\varphi/\partial n$ (potentialens normalderivata, d.v.s. elfältet) är känd på ledarnas ytor, d.v.s. vi vet $(\partial\varphi/\partial n)_{A_i}, i = 1, 2, \ldots, N$, kallas randvillkoren för **Neumann-randvillkor**.

Med både φ_{S_i} och $(\partial\varphi/\partial n)_{A_i}$ specificerade kan en lösning inte garanteras existera. Detta för att Dirichlet- och Neumann-randvillkor kan leda till olika lösningar! Denna kombination av randvillkor kallas **Cauchy-randvillkor**.

Om vi har bara en ledare och punkt-laddningar betecknar man ofta ledarens ytpotential med φ_0.

Exempel 1: Två klot bredvid varandra.

Exempel 2: Två cylindrar bredvid varandra.

Exempel 3: Två plan bredvid varandra.

Exempel 4: En punktladdning ovanför ett plan.

Exempel 5: En punktladdning ovanför ett klot.

Exempel 6: En punktladdning utanför en cylinder.

O.s.v. !

⋆ ⋆ ⋆

Exempel 1: Två klot bredvid varandra.

Exempel 2: Två cylindrar bredvid varandra.

Exempel 3: Två plan bredvid varandra.

Exempel 4: En punktladdning ovanför ett plan.

Exempel 5: En punktladdning ovanför ett klot.

Exempel 6: En punktladdning utanför en cylinder.

O.s.v. !

⋆ ⋆ ⋆

Vi kommer i de följande sektionerna att lösa Laplace-ekvationen explicit för olika högsymmetri-fall.

Vi kommer också att se på en alternativ lättare teknik vid namn **bildladdnings-metoden**.

Superposition

Låt $\varphi_i(\mathbf{r}), i = 1, \ldots, M$ vara lösningar till Laplaces ekvation. Då gäller att

$$\varphi(\mathbf{r}) = \sum_{i=1}^{M} C_i \varphi_i(\mathbf{r}) \tag{2.8}$$

där C_i är godtyckliga konstanter också är en lösning.

Superposition

Låt $\varphi_i(\mathbf{r}), i = 1, \ldots, M$ vara lösningar till Laplaces ekvation. Då gäller att

$$\varphi(\mathbf{r}) = \sum_{i=1}^{M} C_i \varphi_i(\mathbf{r}) \tag{2.8}$$

där C_i är godtyckliga konstanter också är en lösning.

Bevis: Direkt insättning av $\varphi(\mathbf{r})$ i Laplaces ekvation! □

Superposition

Låt $\varphi_i(\mathbf{r}), i = 1, \ldots, M$ vara lösningar till Laplaces ekvation. Då gäller att

$$\varphi(\mathbf{r}) = \sum_{i=1}^{M} C_i \varphi_i(\mathbf{r}) \tag{2.8}$$

där C_i är godtyckliga konstanter också är en lösning.

Bevis: Direkt insättning av $\varphi(\mathbf{r})$ i Laplaces ekvation! □

Unikhet

Låt φ_1 och φ_2 vara två lösningar till Laplaces ekvation, så att de uppfyller samma randvillkor på alla ledarnas ytor $A_1, A_2, \ldots$ i systemet. Då gäller att φ_1 och φ_2 kan skilja sig med högst en konstant term.

Superposition

Låt $\varphi_i(\mathbf{r}), i = 1, \ldots, M$ vara lösningar till Laplaces ekvation. Då gäller att

$$\varphi(\mathbf{r}) = \sum_{i=1}^{M} C_i \varphi_i(\mathbf{r}) \tag{2.8}$$

där C_i är godtyckliga konstanter också är en lösning.

Bevis: Direkt insättning av $\varphi(\mathbf{r})$ i Laplaces ekvation! □

Unikhet

Låt φ_1 och φ_2 vara två lösningar till Laplaces ekvation, så att de uppfyller samma randvillkor på alla ledarnas ytor $A_1, A_2, \ldots$ i systemet. Då gäller att φ_1 och φ_2 kan skilja sig med högst en konstant term.

Bevis: Definiera $\Phi = \varphi_1 - \varphi_2$. Eftersom båda löser Laplaces ekvation så gäller $\nabla^2 \Phi = 0$. Dessutom, antingen gäller $\Phi = 0$ eller $\widehat{\mathbf{n}} \cdot \nabla \Phi = 0$ på ledarnas ytor.

Superposition

Låt $\varphi_i(\mathbf{r}), i = 1, \ldots, M$ vara lösningar till Laplaces ekvation. Då gäller att

$$\varphi(\mathbf{r}) = \sum_{i=1}^{M} C_i \varphi_i(\mathbf{r}) \tag{2.8}$$

där C_i är godtyckliga konstanter också är en lösning.

Bevis: Direkt insättning av $\varphi(\mathbf{r})$ i Laplaces ekvation! □

Unikhet

Låt φ_1 och φ_2 vara två lösningar till Laplaces ekvation, så att de uppfyller samma randvillkor på alla ledarnas ytor $A_1, A_2, \ldots$ i systemet. Då gäller att φ_1 och φ_2 kan skilja sig med högst en konstant term.

Bevis: Definiera $\Phi = \varphi_1 - \varphi_2$. Eftersom båda löser Laplaces ekvation så gäller $\nabla^2 \Phi = 0$. Dessutom, antingen gäller $\Phi = 0$ eller $\widehat{\mathbf{n}} \cdot \nabla \Phi = 0$ på ledarnas ytor.

Välj nu ytan A i oändligheten, där potentialerna försvinner:

$$\oint_A dA\widehat{\mathbf{n}} \cdot \Phi(\nabla\Phi) = 0 \tag{2.9}$$

Enligt Gauss' teorem har vi då att

$$\oint_V dV \nabla \cdot (\Phi(\nabla\Phi)) = 0 \tag{2.10}$$

Expandera integranden:

$$\nabla \cdot (\Phi(\nabla\Phi)) = \Phi\nabla^2\Phi + (\nabla\Phi)^2 = 0 + (\nabla\Phi)^2 \tag{2.11}$$

Vi har då

$$\oint_V dV (\nabla\Phi)^2 = 0 \tag{2.12}$$

Enda möjligheten är att $(\nabla\Phi)^2 = 0$ överallt inom V. Alltså, $\nabla\varphi_1 - \nabla\varphi_2 = 0$, så att vi måste ha $\varphi_2 = \varphi_1 + C_0$, där C_0 är en konstant. □

Välj nu ytan A i oändligheten, där potentialerna försvinner:

$$\oint_A dA\widehat{\mathbf{n}} \cdot \Phi(\nabla\Phi) = 0 \tag{2.9}$$

Enligt Gauss' teorem har vi då att

$$\oint_V dV \nabla \cdot (\Phi(\nabla\Phi)) = 0 \tag{2.10}$$

Expandera integranden:

$$\nabla \cdot (\Phi(\nabla\Phi)) = \Phi\nabla^2\Phi + (\nabla\Phi)^2 = 0 + (\nabla\Phi)^2 \tag{2.11}$$

Vi har då

$$\oint_V dV (\nabla\Phi)^2 = 0 \tag{2.12}$$

Enda möjligheten är att $(\nabla\Phi)^2 = 0$ överallt inom V. Alltså, $\nabla\varphi_1 - \nabla\varphi_2 = 0$, så att vi måste ha $\varphi_2 = \varphi_1 + C_0$, där C_0 är en konstant. □

Om vi alltså har randvillkoren givna så existerar det endast en unik lösning till Laplaces ekvation. Ifall vi har ett Neumann-problem kan vi addera en godtycklig konstant till lösningen för potentialen, men elfältet är fortfarande unikt.

2.3. Laplace-ekvationen i en oberoende variabel

Låt nu φ vara en funktion i endast en variabel.

Laplace-ekvationen ger nu för reaktangulära koordinater

$$\frac{d^2\varphi}{dx^2} = 0 \tag{2.13}$$

2.3. Laplace-ekvationen i en oberoende variabel

Låt nu φ vara en funktion i endast en variabel.

Laplace-ekvationen ger nu för reaktangulära koordinater

$$\frac{d^2\varphi}{dx^2} = 0 \tag{2.13}$$

Detta kan genast integreras till $\varphi(x) = ax + b$.

$\star \qquad \star \qquad \star$

2.3. Laplace-ekvationen i en oberoende variabel

Låt nu φ vara en funktion i endast en variabel.

Laplace-ekvationen ger nu för reaktangulära koordinater

$$\frac{d^2\varphi}{dx^2} = 0 \tag{2.13}$$

Detta kan genast integreras till $\varphi(x) = ax + b$.

$\star \qquad \star \qquad \star$

Ett annat fall är att φ är sfäriskt symmetrisk, d.v.s. $\varphi = \varphi(r)$. Laplace-ekvationen i sfäriska koordinater ger nu

$$\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{d\varphi}{dr}\right) = 0 \tag{2.14}$$

2.3. Laplace-ekvationen i en oberoende variabel

Låt nu φ vara en funktion i endast en variabel.

Laplace-ekvationen ger nu för reaktangulära koordinater

$$\frac{d^2\varphi}{dx^2} = 0 \tag{2.13}$$

Detta kan genast integreras till $\varphi(x) = ax + b$.

$\star \qquad \star \qquad \star$

Ett annat fall är att φ är sfäriskt symmetrisk, d.v.s. $\varphi = \varphi(r)$. Laplace-ekvationen i sfäriska koordinater ger nu

$$\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{d\varphi}{dr}\right) = 0 \tag{2.14}$$

Detta ger efter en integrering

$$r^2 \frac{d\varphi}{dr} = a \tag{2.15}$$

så att

$$\frac{d\varphi}{dr} = \frac{a}{r^2} \tag{2.16}$$

$$r^2 \frac{d\varphi}{dr} = a \tag{2.15}$$

så att

$$\frac{d\varphi}{dr} = \frac{a}{r^2} \tag{2.16}$$

Efter ytterligare en integrering:

$$\varphi(r) = -\frac{a}{r} + b \tag{2.17}$$

[RMC, Jackson, Arfken]

Azimutal symmetri

Vi kommer i det följande att anta azimutal symmetri, d.v.s. att den potential som sökes är symmetrisk runt z-axeln. Då gäller att $\varphi = \varphi(r, \theta)$. Laplaces ekvation blir

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial \varphi}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2 \sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\sin\theta\frac{\partial \varphi}{\partial \theta}\right) = 0 \tag{2.18}$$

[RMC, Jackson, Arfken]

Azimutal symmetri

Vi kommer i det följande att anta azimutal symmetri, d.v.s. att den potential som sökes är symmetrisk runt z-axeln. Då gäller att $\varphi = \varphi(r, \theta)$. Laplaces ekvation blir

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial \varphi}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2 \sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\sin\theta\frac{\partial \varphi}{\partial \theta}\right) = 0 \tag{2.18}$$

Enklaste lösningsmetoden är att anta att φ kan skrivas som en produkt av en-variabels funktioner: $\varphi(r, \theta) = Z(r)Q(\theta)$. Insättning ger

$$\frac{1}{r^2}Q\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dZ}{dr}\right) + \frac{1}{r^2 \sin\theta}Z\frac{d}{d\theta}\left(\sin\theta\frac{dQ}{d\theta}\right) = 0 \tag{2.19}$$

[RMC, Jackson, Arfken]

Azimutal symmetri

Vi kommer i det följande att anta azimutal symmetri, d.v.s. att den potential som sökes är symmetrisk runt z-axeln. Då gäller att $\varphi = \varphi(r, \theta)$. Laplaces ekvation blir

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial \varphi}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2 \sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\sin\theta\frac{\partial \varphi}{\partial \theta}\right) = 0 \tag{2.18}$$

Enklaste lösningsmetoden är att anta att φ kan skrivas som en produkt av en-variabels funktioner: $\varphi(r, \theta) = Z(r)Q(\theta)$. Insättning ger

$$\frac{1}{r^2}Q\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dZ}{dr}\right) + \frac{1}{r^2 \sin\theta}Z\frac{d}{d\theta}\left(\sin\theta\frac{dQ}{d\theta}\right) = 0 \tag{2.19}$$

Efter förenkling

$$\frac{1}{Z}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dZ}{dr}\right) + \frac{1}{\sin\theta}\frac{1}{Q}\frac{d}{d\theta}\left(\sin\theta\frac{dQ}{d\theta}\right) = 0 \tag{2.20}$$

Första termen beror bara på r medan andra beror bara på θ. För att dessa termer ska vara lika för

alla värden på r och θ måste de vara en konstant. Kalla denna k:



$$\frac{1}{Z}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dZ}{dr}\right) = k \tag{2.21}$$

$$\frac{1}{\sin\theta}\frac{1}{Q}\frac{d}{d\theta}\left(\sin\theta\frac{dQ}{d\theta}\right) = -k \tag{2.22}$$

Detta är Legendres ekvation.

---

alla värden på r och θ måste de vara en konstant. Kalla denna k:

$$\frac{1}{Z}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dZ}{dr}\right) = k \tag{2.21}$$

$$\frac{1}{\sin\theta}\frac{1}{Q}\frac{d}{d\theta}\left(\sin\theta\frac{dQ}{d\theta}\right) = -k \tag{2.22}$$

Detta är Legendres ekvation.

Med en icketrivial matematisk betraktelse kan man visa att dessa differentialekvationer har fysikaliskt meningsfulla lösningar endast ifall $k = m(m+1)$ där m är ett heltal.

Vi inför beteckningen $P(x) \equiv P(\cos\theta) = Q(\theta)$.

Lösningarna är s.k. Legendre-polynom, av vilka de fem första är

$$P_0(x) = 1 \tag{2.23}$$

$$P_1(x) = x \tag{2.24}$$

$$P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1) \tag{2.25}$$

$$P_3(x) = \frac{1}{2}(5x^3 - 3x) \tag{2.26}$$

$$P_4(x) = \frac{1}{8}(35x^4 - 30x^2 + 3) \tag{2.27}$$

där $x = \cos\theta$.

$$P_0(x) = 1 \tag{2.23}$$

$$P_1(x) = x \tag{2.24}$$

$$P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1) \tag{2.25}$$

$$P_3(x) = \frac{1}{2}(5x^3 - 3x) \tag{2.26}$$

$$P_4(x) = \frac{1}{8}(35x^4 - 30x^2 + 3) \tag{2.27}$$

där $x = \cos\theta$.

Man kan visa [Arfken] att i allmänhet ges Legendre-polynomet m av uttrycket

$$P_m(x) = \frac{1}{2^m m!}\left(\frac{d}{dx}\right)^m (x^2 - 1)^m, \tag{2.28}$$

som kallas Rodrigues' formel.

$\star \qquad \star \qquad \star$

$$P_0(x) = 1 \tag{2.23}$$

$$P_1(x) = x \tag{2.24}$$

$$P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1) \tag{2.25}$$

$$P_3(x) = \frac{1}{2}(5x^3 - 3x) \tag{2.26}$$

$$P_4(x) = \frac{1}{8}(35x^4 - 30x^2 + 3) \tag{2.27}$$

där $x = \cos\theta$.

Man kan visa [Arfken] att i allmänhet ges Legendre-polynomet m av uttrycket

$$P_m(x) = \frac{1}{2^m m!}\left(\frac{d}{dx}\right)^m (x^2 - 1)^m, \tag{2.28}$$

som kallas Rodrigues' formel.

$\star \qquad \star \qquad \star$

Då alltså vinkeldelen ger villkoret $k = m(m+1)$, gäller för den radiella delen:

$$\frac{1}{Z}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dZ}{dr}\right) = m(m+1) \tag{2.29}$$

Då alltså vinkeldelen ger villkoret $k = m(m+1)$, gäller för den radiella delen:

$$\frac{1}{Z}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dZ}{dr}\right) = m(m+1) \tag{2.29}$$

Gör Ansatzen $Z(r) = r^p$, där p bör bestämmas. Insättning ger



$$\begin{aligned} m(m+1) &= r^{-p}\frac{d}{dr}\left(r^2 p r^{p-1}\right) \\ &= p r^{-p}\frac{dr^{p+1}}{dr} \\ &= p(p+1)r^{-p}r^p \\ &= p(p+1) \end{aligned} \tag{2.30}$$

Då alltså vinkeldelen ger villkoret $k = m(m+1)$, gäller för den radiella delen:

$$\frac{1}{Z}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dZ}{dr}\right) = m(m+1) \tag{2.29}$$

Gör Ansatzen $Z(r) = r^p$, där p bör bestämmas. Insättning ger

$$\begin{aligned} m(m+1) &= r^{-p}\frac{d}{dr}\left(r^2 p r^{p-1}\right) \\ &= p r^{-p}\frac{dr^{p+1}}{dr} \\ &= p(p+1)r^{-p}r^p \\ &= p(p+1) \end{aligned} \tag{2.30}$$

Lös detta:

$$p^2 + p + \frac{1}{4} = m^2 + m + \frac{1}{4} \tag{2.31}$$

$$\left(p+\frac{1}{2}\right)^2 = \left(m+\frac{1}{2}\right)^2 \tag{2.32}$$

$$p+\frac{1}{2} = \pm\left(m+\frac{1}{2}\right) \tag{2.33}$$

$$p = -\frac{1}{2} \pm \left(m+\frac{1}{2}\right) \tag{2.34}$$



Vi får förutom triviallösningen $p = m$ möjligheten $p = -(m+1)$.

$\star \qquad \star \qquad \star$

$$\left(p+\frac{1}{2}\right)^2 = \left(m+\frac{1}{2}\right)^2 \tag{2.32}$$

$$p+\frac{1}{2} = \pm\left(m+\frac{1}{2}\right) \tag{2.33}$$

$$p = -\frac{1}{2} \pm \left(m+\frac{1}{2}\right) \tag{2.34}$$

Vi får förutom triviallösningen $p = m$ möjligheten $p = -(m+1)$.

$\star \qquad \star \qquad \star$

Problemets lösning är alltså

$$\varphi_m(r,\theta) = Ar^m P_m(\cos\theta) \quad \text{eller} \quad \varphi_m(r,\theta) = Br^{-(m+1)} P_m(\cos\theta) \tag{2.35}$$

med $m = 0, 1, 2, \ldots$ och A, B konstanter.

Dessa funktioner kallas **zon-ytfunktioner** (*zonal harmonics*).

$$\left(p+\frac{1}{2}\right)^2 = \left(m+\frac{1}{2}\right)^2 \tag{2.32}$$

$$p+\frac{1}{2} = \pm\left(m+\frac{1}{2}\right) \tag{2.33}$$

$$p = -\frac{1}{2} \pm \left(m+\frac{1}{2}\right) \tag{2.34}$$

Vi får förutom triviallösningen $p = m$ möjligheten $p = -(m+1)$.

$\star \qquad \star \qquad \star$

Problemets lösning är alltså

$$\varphi_m(r,\theta) = Ar^m P_m(\cos\theta) \quad \text{eller} \quad \varphi_m(r,\theta) = Br^{-(m+1)} P_m(\cos\theta) \tag{2.35}$$

med $m = 0, 1, 2, \ldots$ och A, B konstanter.

Dessa funktioner kallas **zon-ytfunktioner** (*zonal harmonics*).

Den mest allmänna lösningen till problemet är dock

$$\varphi(r,\theta) = \sum_{m=0}^{\infty} A_m r^m P_m(\cos\theta) + \sum_{n=0}^{\infty} B_n r^{-(n+1)} P_n(\cos\theta), \quad \text{SPH}, (r,\theta) \tag{2.36}$$

$$\varphi(r,\theta) = \sum_{m=0}^{\infty} A_m r^m P_m(\cos\theta) + \sum_{n=0}^{\infty} B_n r^{-(n+1)} P_n(\cos\theta), \quad \text{SPH}, (r,\theta) \qquad (2.36)$$

Exempel 1: $m = 0$. $\varphi(r,\theta) = A$ eller $\varphi(r,\theta) = A' r^{-1}$. Den senare lösningen är ju en punktladdnings potential.□

$$\varphi(r,\theta) = \sum_{m=0}^{\infty} A_m r^m P_m(\cos\theta) + \sum_{n=0}^{\infty} B_n r^{-(n+1)} P_n(\cos\theta), \quad \text{SPH}, (r,\theta) \qquad (2.36)$$

Exempel 1: $m = 0$. $\varphi(r,\theta) = A$ eller $\varphi(r,\theta) = A' r^{-1}$. Den senare lösningen är ju en punktladdnings potential.□

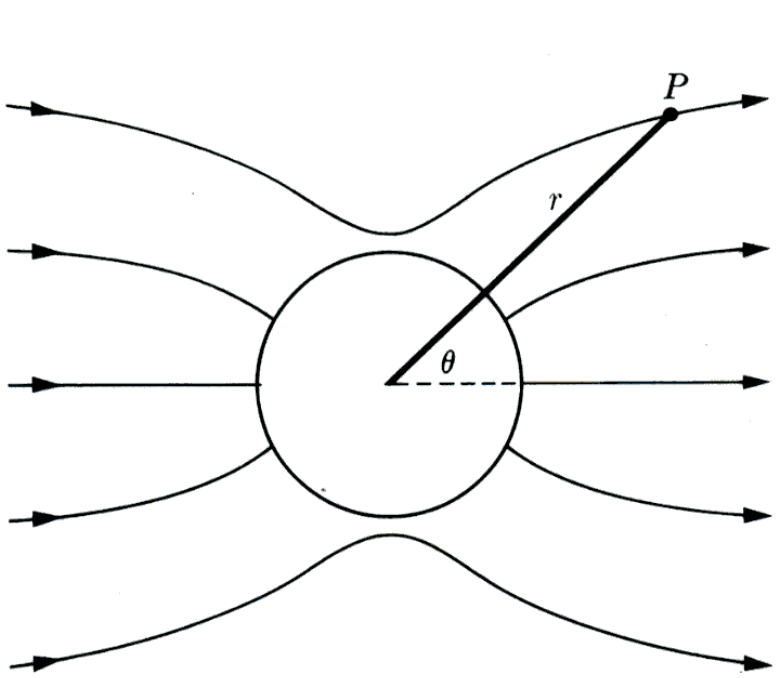
Exempel 2: $m = 1$. $\varphi(r,\theta) = Ar P_1(\cos\theta)$ eller $\varphi(r,\theta) = A' r^{-2} P_1(\cos\theta)$. Den senare lösningen är ju en dipols potential.□

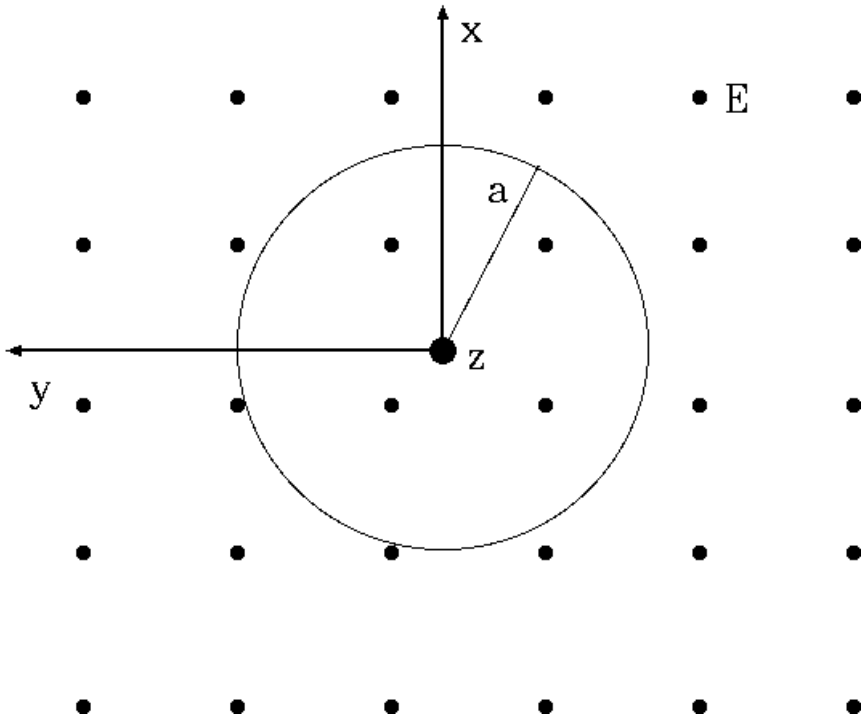
$$\varphi(r,\theta) = \sum_{m=0}^{\infty} A_m r^m P_m(\cos\theta) + \sum_{n=0}^{\infty} B_n r^{-(n+1)} P_n(\cos\theta), \quad \text{SPH}, (r,\theta) \qquad (2.36)$$

Exempel 1: $m = 0$. $\varphi(r,\theta) = A$ eller $\varphi(r,\theta) = A' r^{-1}$. Den senare lösningen är ju en punktladdnings potential.□

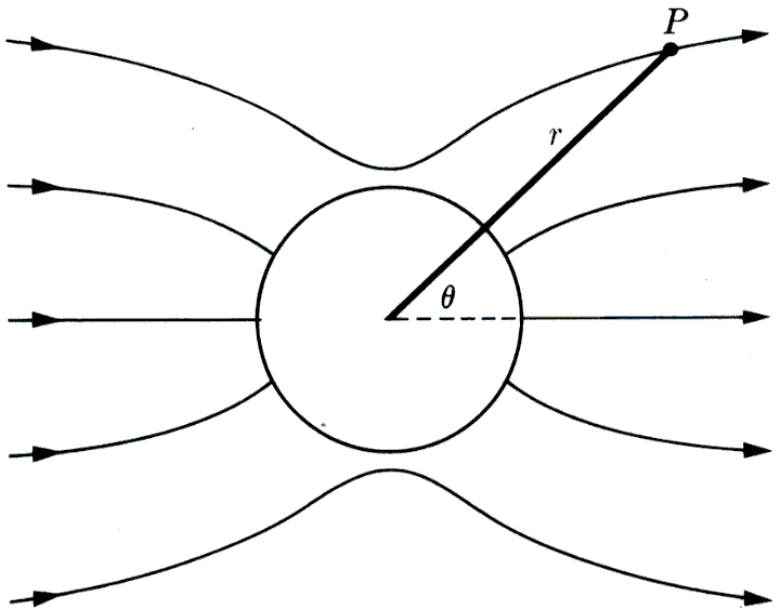
Exempel 2: $m = 1$. $\varphi(r,\theta) = A r P_1(\cos\theta)$ eller $\varphi(r,\theta) = A' r^{-2} P_1(\cos\theta)$. Den senare lösningen är ju en dipols potential.□

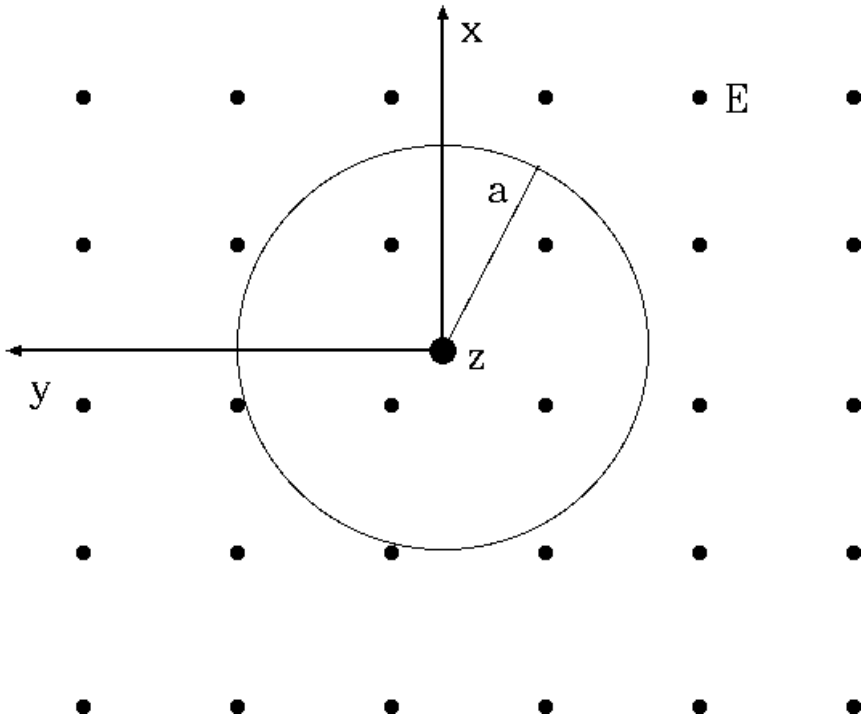
Exempel 3: Oladdad ledande sfär i ett konstant elfält.





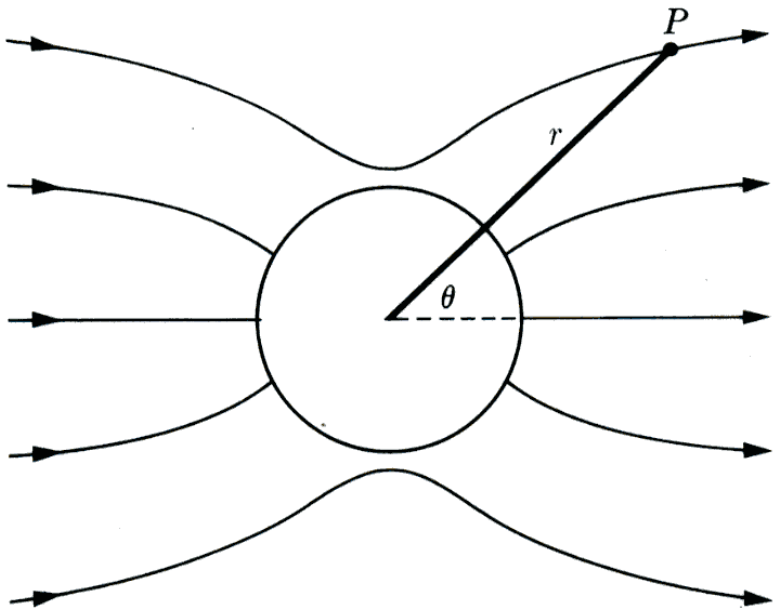
Låt elfältet vara i z-riktningen och sfärens mittpunkt i origo.

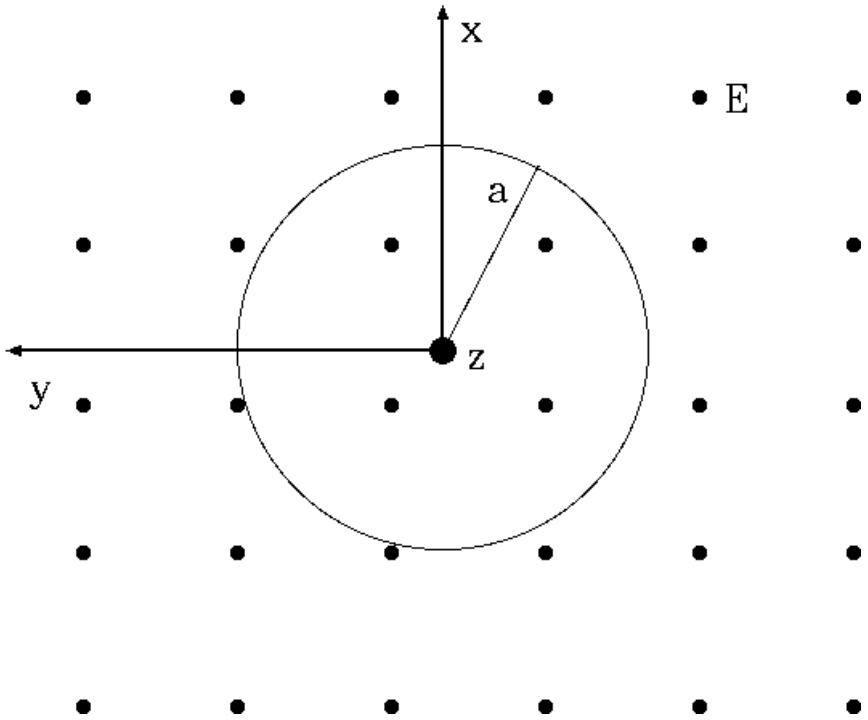




Låt elfältet vara i z-riktningen och sfärens mittpunkt i origo.

Vi har samma potential $\varphi(r = a, \theta) \equiv \varphi_0$ i ledarens inre som på dess yta.





Låt elfältet vara i z-riktningen och sfärens mittpunkt i origo.

Vi har samma potential $\varphi(r = a, \theta) \equiv \varphi_0$ i ledarens inre som på dess yta.

Lösningen är helt allmänt

$$\begin{aligned} \varphi(r,\theta) &= A_0 + B_0 r^{-1} \\ &\quad + A_1 r\cos\theta + B_1 r^{-2}\cos\theta \end{aligned}$$

$$+\frac{1}{2}A_2 r^2(3\cos^2\theta - 1) + \frac{1}{2}B_2 r^{-3}(3\cos^2\theta - 1) + \ldots \qquad (2.37)$$

$$+\frac{1}{2}A_2 r^2(3\cos^2\theta - 1) + \frac{1}{2}B_2 r^{-3}(3\cos^2\theta - 1) + \ldots \qquad (2.37)$$

I oändligheten återfår vi det urprungliga fältet, $\mathbf{E}(r=\infty) = E_0\widehat{\mathbf{z}} = -d\varphi/dz$, så $\varphi(r=\infty) = -E_0 z + C$, med C en konstant.

$$\varphi(r=\infty,\theta) = -E_0 z + C = -E_0 r\cos\theta + C \equiv A_0 + A_1 r\cos\theta \qquad (2.38)$$

$$+\frac{1}{2}A_2 r^2(3\cos^2\theta - 1) + \frac{1}{2}B_2 r^{-3}(3\cos^2\theta - 1) + \ldots \qquad (2.37)$$

I oändligheten återfår vi det urprungliga fältet, $\mathbf{E}(r = \infty) = E_0\widehat{\mathbf{z}} = -d\varphi/dz$, så $\varphi(r = \infty) = -E_0 z + C$, med C en konstant.

$$\varphi(r = \infty, \theta) = -E_0 z + C = -E_0 r\cos\theta + C \equiv A_0 + A_1 r\cos\theta \qquad (2.38)$$

Vi måste då ha att $A_n = 0, n \geq 2$ och $A_1 = -E_0$.

$$+\frac{1}{2}A_2 r^2(3\cos^2\theta - 1) + \frac{1}{2}B_2 r^{-3}(3\cos^2\theta - 1) + \ldots \qquad (2.37)$$

I oändligheten återfår vi det urprungliga fältet, $\mathbf{E}(r = \infty) = E_0\widehat{\mathbf{z}} = -d\varphi/dz$, så $\varphi(r = \infty) = -E_0 z + C$, med C en konstant.

$$\varphi(r = \infty, \theta) = -E_0 z + C = -E_0 r\cos\theta + C \equiv A_0 + A_1 r\cos\theta \qquad (2.38)$$

Vi måste då ha att $A_n = 0, n \geq 2$ och $A_1 = -E_0$.

Då $r = a$ gäller $\varphi(r = a, \theta) =$ konstant, så alla $B_n = 0$ för $n \geq 2$. Vi behåller B_1 för att ha möjlighet att kompensera A_1-termens θ-beroende vid $r = a$.

$$+\frac{1}{2}A_2 r^2(3\cos^2\theta - 1) + \frac{1}{2}B_2 r^{-3}(3\cos^2\theta - 1) + \ldots \qquad (2.37)$$

I oändligheten återfår vi det urprungliga fältet, $\mathbf{E}(r = \infty) = E_0\widehat{\mathbf{z}} = -d\varphi/dz$, så $\varphi(r = \infty) = -E_0 z + C$, med C en konstant.

$$\varphi(r = \infty, \theta) = -E_0 z + C = -E_0 r\cos\theta + C \equiv A_0 + A_1 r\cos\theta \qquad (2.38)$$

Vi måste då ha att $A_n = 0, n \geq 2$ och $A_1 = -E_0$.

Då $r = a$ gäller $\varphi(r = a, \theta) =$ konstant, så alla $B_n = 0$ för $n \geq 2$. Vi behåller B_1 för att ha möjlighet att kompensera A_1-termens θ-beroende vid $r = a$.

Vi har nu

$$\varphi(r, \theta) = A_0 + B_0 r^{-1} + A_1 r\cos\theta + B_1 r^{-2}\cos\theta, \quad r > a. \qquad (2.39)$$

$$+\frac{1}{2}A_2 r^2(3\cos^2\theta - 1) + \frac{1}{2}B_2 r^{-3}(3\cos^2\theta - 1) + \ldots \qquad (2.37)$$

I oändligheten återfår vi det urprungliga fältet, $\mathbf{E}(r = \infty) = E_0\widehat{\mathbf{z}} = -d\varphi/dz$, så $\varphi(r = \infty) = -E_0 z + C$, med C en konstant.

$$\varphi(r = \infty, \theta) = -E_0 z + C = -E_0 r\cos\theta + C \equiv A_0 + A_1 r\cos\theta \qquad (2.38)$$

Vi måste då ha att $A_n = 0, n \geq 2$ och $A_1 = -E_0$.

Då $r = a$ gäller $\varphi(r = a, \theta) =$ konstant, så alla $B_n = 0$ för $n \geq 2$. Vi behåller B_1 för att ha möjlighet att kompensera A_1-termens θ-beroende vid $r = a$.

Vi har nu

$$\varphi(r, \theta) = A_0 + B_0 r^{-1} + A_1 r\cos\theta + B_1 r^{-2}\cos\theta, \quad r > a. \qquad (2.39)$$

Men B_0-termen står för en punktladdning i origo. Dock har vi nu en neutral sfär, så $B_0 = 0$:

$$\varphi(r, \theta) = A_0 + A_1 r\cos\theta + B_1 r^{-2}\cos\theta, \quad r > a \qquad (2.40)$$

Då $\varphi(r = a, \theta) \equiv \varphi_0$:

$$A_1 a \cos\theta + B_1 a^{-2} \cos\theta = 0 \tag{2.41}$$

så att $B_1 = -a^3 A_1 = E_0 a^3$.

Då $\varphi(r = a, \theta) \equiv \varphi_0$:

$$A_1 a \cos\theta + B_1 a^{-2} \cos\theta = 0 \tag{2.41}$$

så att $B_1 = -a^3 A_1 = E_0 a^3$.

Slutliga uttrycket är

$$\varphi(r, \theta) = \varphi_0 - E_0 r \cos\theta + a^3 E_0 r^{-2} \cos\theta \tag{2.42}$$

Då $\varphi(r = a, \theta) \equiv \varphi_0$:

$$A_1 a \cos\theta + B_1 a^{-2} \cos\theta = 0 \tag{2.41}$$

så att $B_1 = -a^3 A_1 = E_0 a^3$.

Slutliga uttrycket är

$$\varphi(r, \theta) = \varphi_0 - E_0 r \cos\theta + a^3 E_0 r^{-2} \cos\theta \tag{2.42}$$

Från detta kan vi bestämma elfältet och sfärens ytladdningsfördelning:

$$E_r = -\frac{\partial\varphi}{\partial r} = E_0 \left(1 + 2\frac{a^3}{r^3}\right) \cos\theta, \quad r > a \tag{2.43}$$

$$E_\theta = -\frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial\theta} = -E_0 \left(1 - \frac{a^3}{r^3}\right) \sin\theta, \quad r > a \tag{2.44}$$

$$\sigma = \varepsilon_0 E_r(r = a) = 3\varepsilon_0 E_0 \cos\theta \tag{2.45}$$

Då $\varphi(r = a, \theta) \equiv \varphi_0$:

$$A_1 a \cos\theta + B_1 a^{-2} \cos\theta = 0 \tag{2.41}$$

så att $B_1 = -a^3 A_1 = E_0 a^3$.

Slutliga uttrycket är

$$\varphi(r, \theta) = \varphi_0 - E_0 r \cos\theta + a^3 E_0 r^{-2} \cos\theta \tag{2.42}$$

Från detta kan vi bestämma elfältet och sfärens ytladdningsfördelning:

$$E_r = -\frac{\partial\varphi}{\partial r} = E_0 \left(1 + 2\frac{a^3}{r^3}\right) \cos\theta, \quad r > a \tag{2.43}$$

$$E_\theta = -\frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial\theta} = -E_0 \left(1 - \frac{a^3}{r^3}\right) \sin\theta, \quad r > a \tag{2.44}$$

$$\sigma = \varepsilon_0 E_r(r = a) = 3\varepsilon_0 E_0 \cos\theta \tag{2.45}$$

Totala laddningen:



$$
\begin{aligned}
Q &= \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} dA\sigma = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} r^2 d\phi d\theta \sin\theta\sigma \\
&= 3r^2\varepsilon_0 E_0 2\pi \int_0^{\pi} d\theta \sin\theta\cos\theta \\
&= 3r^2 \Big/_{\theta=0}^{\theta=\pi} \varepsilon_0 E_0 2\pi \frac{1}{2}\sin^2\theta \qquad (2.46) \\
&= 0.\square \qquad (2.47)
\end{aligned}
$$

Utan azimutal symmetri

[Jackson, Arfken]

Laplace-ekvationen är nu:

$$
\nabla^2\varphi(\mathbf{r}) = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\varphi(\mathbf{r})}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial\varphi(\mathbf{r})}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2\varphi(\mathbf{r})}{\partial\phi^2} \qquad (2.48)
$$

Totala laddningen:

$$\begin{aligned} Q &= \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} dA\sigma = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} r^2 d\phi d\theta \sin\theta\sigma \\ &= 3r^2\varepsilon_0 E_0 2\pi \int_0^{\pi} d\theta \sin\theta\cos\theta \\ &= 3r^2 \Big/_{\theta=0}^{\theta=\pi} \varepsilon_0 E_0 2\pi \frac{1}{2}\sin^2\theta \qquad (2.46) \\ &= 0.\square \qquad (2.47) \end{aligned}$$

Utan azimutal symmetri

[Jackson, Arfken]

Laplace-ekvationen är nu:

$$\nabla^2\varphi(\mathbf{r}) = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\varphi(\mathbf{r})}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial\varphi(\mathbf{r})}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2\varphi(\mathbf{r})}{\partial\phi^2} \qquad (2.48)$$

Vi försöker igen med en produkt av en-variabels-funktioner: $\varphi = Z(r)Q(\theta)U(\phi)$.

Vi får efter insättning och multiplikation med $\sin^2\theta/(Z(r)Q(\theta)U(\phi))$:

$$\sin^2\theta\left[\frac{1}{Z}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dZ}{dr}\right)+\frac{1}{Q\sin\theta}\frac{d}{d\theta}\left(\sin\theta\frac{dQ}{d\theta}\right)\right]+\frac{1}{U}\frac{d^2U}{d\phi^2}=0 \qquad (2.49)$$

Vi får efter insättning och multiplikation med $\sin^2\theta/(Z(r)Q(\theta)U(\phi))$:

$$\sin^2\theta\left[\frac{1}{Z}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dZ}{dr}\right)+\frac{1}{Q\sin\theta}\frac{d}{d\theta}\left(\sin\theta\frac{dQ}{d\theta}\right)\right]+\frac{1}{U}\frac{d^2U}{d\phi^2}=0 \qquad (2.49)$$



Den sista termen beror enbart på ϕ, medan de två första beror på r och θ. Inför separationskonstanten m^2:

$$\frac{1}{U}\frac{d^2U}{d\phi^2} = -m^2 \qquad (2.50)$$

$$\sin^2\theta\left[\frac{1}{Z}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dZ}{dr}\right)+\frac{1}{Q\sin\theta}\frac{d}{d\theta}\left(\sin\theta\frac{dQ}{d\theta}\right)\right] = m^2 \qquad (2.51)$$

Vi får efter insättning och multiplikation med $\sin^2\theta/(Z(r)Q(\theta)U(\phi))$:

$$\sin^2\theta\left[\frac{1}{Z}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dZ}{dr}\right)+\frac{1}{Q\sin\theta}\frac{d}{d\theta}\left(\sin\theta\frac{dQ}{d\theta}\right)\right]+\frac{1}{U}\frac{d^2U}{d\phi^2}=0 \tag{2.49}$$

Den sista termen beror enbart på ϕ, medan de två första beror på r och θ. Inför separationskonstanten m^2:

$$\frac{1}{U}\frac{d^2U}{d\phi^2} = -m^2 \tag{2.50}$$

$$\sin^2\theta\left[\frac{1}{Z}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dZ}{dr}\right)+\frac{1}{Q\sin\theta}\frac{d}{d\theta}\left(\sin\theta\frac{dQ}{d\theta}\right)\right] = m^2 \tag{2.51}$$

Första ekvationens lösning är

$$U(\phi)=e^{\pm im\phi} \tag{2.52}$$

Här måste vi kräva att m är ett heltal.

Vi får efter insättning och multiplikation med $\sin^2\theta/(Z(r)Q(\theta)U(\phi))$:

$$\sin^2\theta\left[\frac{1}{Z}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dZ}{dr}\right)+\frac{1}{Q\sin\theta}\frac{d}{d\theta}\left(\sin\theta\frac{dQ}{d\theta}\right)\right]+\frac{1}{U}\frac{d^2U}{d\phi^2}=0 \tag{2.49}$$

Den sista termen beror enbart på ϕ, medan de två första beror på r och θ. Inför separationskonstanten m^2:

$$\frac{1}{U}\frac{d^2U}{d\phi^2} = -m^2 \tag{2.50}$$

$$\sin^2\theta\left[\frac{1}{Z}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dZ}{dr}\right)+\frac{1}{Q\sin\theta}\frac{d}{d\theta}\left(\sin\theta\frac{dQ}{d\theta}\right)\right] = m^2 \tag{2.51}$$

Första ekvationens lösning är

$$U(\phi)=e^{\pm im\phi} \tag{2.52}$$

Här måste vi kräva att m är ett heltal.

Andra ekvationen blir:

$$\frac{1}{Z}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dZ}{dr}\right)+\frac{1}{Q\sin\theta}\frac{d}{d\theta}\left(\sin\theta\frac{dQ}{d\theta}\right)-m^2\frac{1}{\sin^2\theta}=0 \qquad (2.53)$$

$$\frac{1}{Z}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dZ}{dr}\right)+\frac{1}{Q\sin\theta}\frac{d}{d\theta}\left(\sin\theta\frac{dQ}{d\theta}\right)-m^2\frac{1}{\sin^2\theta}=0 \tag{2.53}$$

Inför nu en ny separationskonstant, k:

$$\frac{1}{Z}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dZ}{dr}\right) = k \tag{2.54}$$

$$\frac{1}{Q\sin\theta}\frac{d}{d\theta}\left(\sin\theta\frac{dQ}{d\theta}\right)-m^2\frac{1}{\sin^2\theta} = -k \tag{2.55}$$

$$\frac{1}{Z}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dZ}{dr}\right)+\frac{1}{Q\sin\theta}\frac{d}{d\theta}\left(\sin\theta\frac{dQ}{d\theta}\right)-m^2\frac{1}{\sin^2\theta}=0 \tag{2.53}$$

Inför nu en ny separationskonstant, k:

$$\frac{1}{Z}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dZ}{dr}\right) = k \tag{2.54}$$

$$\frac{1}{Q\sin\theta}\frac{d}{d\theta}\left(\sin\theta\frac{dQ}{d\theta}\right)-m^2\frac{1}{\sin^2\theta} = -k \tag{2.55}$$

I den andra ekvationen känner vi igen Legendres ekvation, men nu finns det en extra term medplockad. Enligt de tidigare resultaten kan vi genast identifiera k med $l(l+1)$, där l är ett heltal (tidigare: m):

$$\frac{1}{Z}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dZ}{dr}\right) = l(l+1) \tag{2.56}$$

$$\frac{1}{Q\sin\theta}\frac{d}{d\theta}\left(\sin\theta\frac{dQ}{d\theta}\right)-m^2\frac{1}{\sin^2\theta} = -l(l+1) \tag{2.57}$$

$$\frac{1}{Z}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dZ}{dr}\right)+\frac{1}{Q\sin\theta}\frac{d}{d\theta}\left(\sin\theta\frac{dQ}{d\theta}\right)-m^2\frac{1}{\sin^2\theta}=0 \tag{2.53}$$

Inför nu en ny separationskonstant, k:

$$\frac{1}{Z}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dZ}{dr}\right) = k \tag{2.54}$$

$$\frac{1}{Q\sin\theta}\frac{d}{d\theta}\left(\sin\theta\frac{dQ}{d\theta}\right)-m^2\frac{1}{\sin^2\theta} = -k \tag{2.55}$$

I den andra ekvationen känner vi igen Legendres ekvation, men nu finns det en extra term medplockad. Enligt de tidigare resultaten kan vi genast identifiera k med $l(l+1)$, där l är ett heltal (tidigare: m):

$$\frac{1}{Z}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dZ}{dr}\right) = l(l+1) \tag{2.56}$$

$$\frac{1}{Q\sin\theta}\frac{d}{d\theta}\left(\sin\theta\frac{dQ}{d\theta}\right)-m^2\frac{1}{\sin^2\theta} = -l(l+1) \tag{2.57}$$

I den första ekvationen kan vi försöka med $Z(r) = r^p$:

$$r^{-p}\frac{d}{dr}\left(r^2 p r^{p-1}\right) = \ldots = p(p+1) = l(l+1) \tag{2.58}$$

Lösningarna är

$$Z(r) = r^l, \quad \text{eller} \quad Z(r) = r^{-l-1} \tag{2.59}$$

I den första ekvationen kan vi försöka med $Z(r) = r^p$:

$$r^{-p}\frac{d}{dr}\left(r^2 p r^{p-1}\right) = \ldots = p(p+1) = l(l+1) \tag{2.58}$$

Lösningarna är

$$Z(r) = r^l, \quad \text{eller} \quad Z(r) = r^{-l-1} \tag{2.59}$$

Ekvationen i θ är:

$$\frac{1}{Q\sin\theta}\frac{d}{d\theta}\left(\sin\theta\frac{dQ}{d\theta}\right) - m^2\frac{1}{\sin^2\theta} = -l(l+1) \tag{2.60}$$

Detta är ekvationen för de **associerade Legendre-polynomen** $P_l^m(\cos\theta) \equiv P_l^m(x)$.

I den första ekvationen kan vi försöka med $Z(r) = r^p$:

$$r^{-p}\frac{d}{dr}\left(r^2 p r^{p-1}\right) = \ldots = p(p+1) = l(l+1) \tag{2.58}$$

Lösningarna är

$$Z(r) = r^l, \quad \text{eller} \quad Z(r) = r^{-l-1} \tag{2.59}$$

Ekvationen i θ är:

$$\frac{1}{Q\sin\theta}\frac{d}{d\theta}\left(\sin\theta\frac{dQ}{d\theta}\right) - m^2\frac{1}{\sin^2\theta} = -l(l+1) \tag{2.60}$$

Detta är ekvationen för de **associerade Legendre-polynomen** $P_l^m(\cos\theta) \equiv P_l^m(x)$.

De associerade Legendre-polynomen är relaterade till de vanliga polynomen $P_l(x)$ via ekvationen

$$P_l^m(x) = (1-x^2)^{m/2}\frac{d^m}{dx^m}P_l(x) \tag{2.61}$$

För indexen m gäller

$$m = -l, \ldots, 0, \ldots, l \tag{2.62}$$

Negativa m kan relateras till positiva värden:

$$P_l^{-m} = (-1)^m \frac{(l-m)!}{(l+m)!} P_l^m(x) \tag{2.63}$$

Negativa m kan relateras till positiva värden:

$$P_l^{-m} = (-1)^m \frac{(l-m)!}{(l+m)!} P_l^m(x) \tag{2.63}$$

Den mest allmänna lösningen till problemet är nu:

$$\varphi(r,\theta,\phi) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^{l} \left(A_{lm} r^l + B_{lm} r^{-l-1} \right) P_l^m(x) e^{im\phi}, \quad \text{SPH}, (r,\theta,\phi) \tag{2.64}$$

Här står SPH för sfärisk symmetriskt system.

.

Negativa m kan relateras till positiva värden:

$$P_l^{-m} = (-1)^m \frac{(l-m)!}{(l+m)!} P_l^m(x) \tag{2.63}$$

Den mest allmänna lösningen till problemet är nu:

$$\varphi(r,\theta,\phi) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^{l} \left(A_{lm} r^l + B_{lm} r^{-l-1} \right) P_l^m(x) e^{im\phi}, \quad \text{SPH}, (r,\theta,\phi) \tag{2.64}$$

Här står SPH för sfärisk symmetriskt system.

.

Ofta reducerar man de två sista faktorerna till en enda, och skriver lösningen som

$$\varphi(r,\theta,\phi) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^{l} \left(A'_{lm} r^l + B'_{lm} r^{-l-1} \right) Y_{lm}(\theta,\phi), \quad \text{SPH}, (r,\theta,\phi) \tag{2.65}$$

där $Y_{lm}(\theta, \phi)$ är **klotytfunktionerna** $(spherical\ harmonics)$.

---

där $Y_{lm}(\theta, \phi)$ är **klotytfunktionerna** (*spherical harmonics*).

Klotytfunktionerna är

$$Y_{lm}(\theta, \phi) = \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}} \sqrt{\frac{(l-m)!}{(l+m)!}} P_l^m(\cos\theta) e^{im\phi} \tag{2.66}$$

Man kan visa att

$$Y_{l,-m}(\theta, \phi) = (-1)^m Y_{lm}^*(\theta, \phi), \tag{2.67}$$

där * betyder komplex-konjugering.

Några klotytfunktioner:

$$Y_{00}(\theta, \phi) = \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \tag{2.68}$$

$$Y_{1,-1}(\theta, \phi) = \sqrt{\frac{3}{8\pi}} \sin\theta e^{-i\phi} \tag{2.69}$$

$$Y_{10}(\theta, \phi) = -\sqrt{\frac{3}{4\pi}} \cos\theta \tag{2.70}$$

$$Y_{11}(\theta,\phi) \quad = \quad -\sqrt{\frac{3}{8\pi}}\sin\theta e^{i\phi} \tag{2.71}$$

Utan z-beroende

[Jackson]

Ifall vi har cylindrisk symmetri och inget beroende på z, blir Laplace-ekvationen

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial\varphi}{\partial\rho}\right)+\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial\psi^2}=0 \tag{2.72}$$

Utan z-beroende

[Jackson]

Ifall vi har cylindrisk symmetri och inget beroende på z, blir Laplace-ekvationen

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial\varphi}{\partial\rho}\right)+\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial\psi^2}=0 \tag{2.72}$$

Försök med den separabla ansatzen $\varphi(\rho,\psi)=R(\rho)\Psi(\psi)$:

$$\frac{\rho}{R}\frac{d}{d\rho}\left(\rho\frac{dR}{d\rho}\right)+\frac{1}{\Psi}\frac{d^2\Psi}{d\psi^2}=0 \tag{2.73}$$

Utan z-beroende

[Jackson]

Ifall vi har cylindrisk symmetri och inget beroende på z, blir Laplace-ekvationen

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial\varphi}{\partial\rho}\right)+\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial\psi^2}=0 \tag{2.72}$$

Försök med den separabla ansatzen $\varphi(\rho,\psi)=R(\rho)\Psi(\psi)$:

$$\frac{\rho}{R}\frac{d}{d\rho}\left(\rho\frac{dR}{d\rho}\right)+\frac{1}{\Psi}\frac{d^2\Psi}{d\psi^2}=0 \tag{2.73}$$



Vi får

$$\frac{\rho}{R}\frac{d}{d\rho}\left(\rho\frac{dR}{d\rho}\right) = \nu^2 \tag{2.74}$$

$$\frac{1}{\Psi}\frac{d^2\Psi}{d\psi^2} = -\nu^2 \tag{2.75}$$

Lösningarna är

$$R(\rho) = a\rho^{\nu} + b\rho^{-\nu} \tag{2.76}$$

$$\Psi(\psi) = A' \sin(\nu\psi) + B' \cos(\nu\psi) \equiv A \sin(\nu\psi + B) \tag{2.77}$$

Vi måste nu kräva att ν är ett positivt eller negativt heltal för att potentialen måste upprepa sig med rotationsvinkeln 2π.

Lösningarna är

$$R(\rho) = a\rho^{\nu} + b\rho^{-\nu} \tag{2.76}$$

$$\Psi(\psi) = A' \sin(\nu\psi) + B' \cos(\nu\psi) \equiv A \sin(\nu\psi + B) \tag{2.77}$$

Vi måste nu kräva att ν är ett positivt eller negativt heltal för att potentialen måste upprepa sig med rotationsvinkeln 2π.

Om $\nu = 0$ fås lösningarna

$$R(\rho) = a_0 + b_0 \ln \rho \tag{2.78}$$

$$\Psi(\psi) = A_0 + B_0\psi \tag{2.79}$$

Lösningarna är

$$R(\rho) = a\rho^{\nu} + b\rho^{-\nu} \tag{2.76}$$

$$\Psi(\psi) = A' \sin(\nu\psi) + B' \cos(\nu\psi) \equiv A \sin(\nu\psi + B) \tag{2.77}$$

Vi måste nu kräva att ν är ett positivt eller negativt heltal för att potentialen måste upprepa sig med rotationsvinkeln 2π.

Om $\nu = 0$ fås lösningarna

$$R(\rho) = a_0 + b_0 \ln \rho \tag{2.78}$$

$$\Psi(\psi) = A_0 + B_0\psi \tag{2.79}$$

Vi måste dock sätta $B_0 = 0$ så att $\Psi(0) = \Psi(2\pi)$! Konstanten A_0 kan sedan inbakas i uttrycket för R.

Lösningarna är

$$R(\rho) = a\rho^{\nu} + b\rho^{-\nu} \tag{2.76}$$

$$\Psi(\psi) = A' \sin(\nu\psi) + B' \cos(\nu\psi) \equiv A \sin(\nu\psi + B) \tag{2.77}$$

Vi måste nu kräva att ν är ett positivt eller negativt heltal för att potentialen måste upprepa sig med rotationsvinkeln 2π.

Om $\nu = 0$ fås lösningarna



$$R(\rho) = a_0 + b_0 \ln \rho \tag{2.78}$$

$$\Psi(\psi) = A_0 + B_0\psi \tag{2.79}$$

Vi måste dock sätta $B_0 = 0$ så att $\Psi(0) = \Psi(2\pi)$! Konstanten A_0 kan sedan inbakas i uttrycket för R.

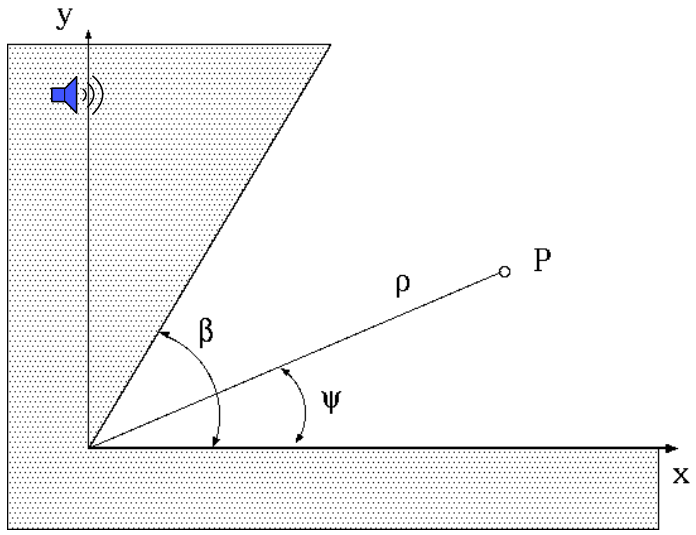
Den mest allmänna lösningen är nu

$$\varphi(\rho,\psi) = a_0 + b_0 \ln\rho + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \rho^n \sin(n\psi + c_n)$$

$$+ \sum_{n=1}^{\infty} b_n \rho^{-n} \sin(n\psi + d_n), \quad \mathrm{CYL}, (\rho,\psi) \tag{2.80}$$

$$\varphi(\rho,\psi) = a_0 + b_0 \ln\rho + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \rho^n \sin(n\psi + c_n)$$
$$+ \sum_{n=1}^{\infty} b_n \rho^{-n} \sin(n\psi + d_n), \quad \mathrm{CYL}, (\rho,\psi) \tag{2.80}$$

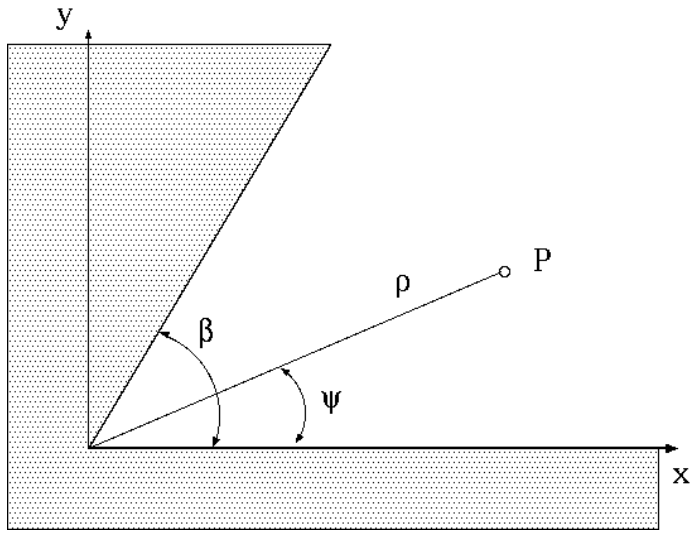
Exempel :



Betrakta de hopfogade ledande planen i figuren. Problemet är 2-dimensionellt, så låt oss använda polära koordinater ρ, ψ. Detta motsvarar cylindriska koordinater med inget z-beroende.
Ifall $\beta < \pi$ är det fråga om en inbuktning, ifall $\beta > \pi$ om ett hörn, $\beta \approx 2\pi$ skarpt hörn.
Potentialen vid planens yta är ϕ_0 (detta är ett randvillkor).

$$\varphi(\rho,\psi) = a_0 + b_0 \ln\rho + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \rho^n \sin(n\psi + c_n)$$
$$+ \sum_{n=1}^{\infty} b_n \rho^{-n} \sin(n\psi + d_n), \quad \mathrm{CYL}, (\rho,\psi) \tag{2.80}$$

Exempel :



Betrakta de hopfogade ledande planen i figuren. Problemet är 2-dimensionellt, så låt oss använda polära koordinater ρ, ψ. Detta motsvarar cylindriska koordinater med inget z-beroende.
Ifall $\beta < \pi$ är det fråga om en inbuktning, ifall $\beta > \pi$ om ett hörn, $\beta \approx 2\pi$ skarpt hörn.
Potentialen vid planens yta är ϕ_0 (detta är ett randvillkor).

Första randvillkoret för vårt specifika problem:

$$\varphi_0 = \varphi(\rho, \psi = 0) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \rho^n \sin c_n \tag{2.81}$$

För att undvika singulariteter i origo $\rho = 0$: $b_n = 0$, för $n \geq 0$. Dessutom måste φ_0 vara oberoende av ρ, så vi måste ha $c_n = 0$. Uppenbarligen gäller $a_0 = \varphi_0$.

$$\varphi_0 = \varphi(\rho, \psi = 0) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \rho^n \sin c_n \tag{2.81}$$

För att undvika singulariteter i origo $\rho = 0$: $b_n = 0$, för $n \geq 0$. Dessutom måste φ_0 vara oberoende av ρ, så vi måste ha $c_n = 0$. Uppenbarligen gäller $a_0 = \varphi_0$.

Andra randvillkoret:

$$\varphi_0 = \varphi(\rho, \psi = \beta) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \rho^n \sin(n\beta) \tag{2.82}$$

Igen, detta ska gälla för godtyckligt värde på ρ, så vi måste ha $\sin(n\beta) = 0$. Detta ger $n\beta = m\pi$ eller $n = m\pi/\beta$ där m är ett heltal.

$$\varphi_0 = \varphi(\rho, \psi = 0) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \rho^n \sin c_n \tag{2.81}$$

För att undvika singulariteter i origo $\rho = 0$: $b_n = 0$, för $n \geq 0$. Dessutom måste φ_0 vara oberoende av ρ, så vi måste ha $c_n = 0$. Uppenbarligen gäller $a_0 = \varphi_0$.

Andra randvillkoret:

$$\varphi_0 = \varphi(\rho, \psi = \beta) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \rho^n \sin(n\beta) \tag{2.82}$$

Igen, detta ska gälla för godtyckligt värde på ρ, så vi måste ha $\sin(n\beta) = 0$. Detta ger $n\beta = m\pi$ eller $n = m\pi/\beta$ där m är ett heltal.

Det korrekta uttrycket för potentialen är alltså

$$\varphi(\rho, \psi) = \varphi_0 + \sum_{m=1}^{\infty} a_m \rho^{m\pi/\beta} \sin(m\pi\psi/\beta), \quad m = 1, 2, 3, \ldots \tag{2.83}$$

Men fortfarande är koefficienterna a_m okända !

$$\varphi_0 = \varphi(\rho, \psi = 0) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \rho^n \sin c_n \tag{2.81}$$

För att undvika singulariteter i origo $\rho = 0$: $b_n = 0$, för $n \geq 0$. Dessutom måste φ_0 vara oberoende av ρ, så vi måste ha $c_n = 0$. Uppenbarligen gäller $a_0 = \varphi_0$.

Andra randvillkoret:

$$\varphi_0 = \varphi(\rho, \psi = \beta) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \rho^n \sin(n\beta) \tag{2.82}$$

Igen, detta ska gälla för godtyckligt värde på ρ, så vi måste ha $\sin(n\beta) = 0$. Detta ger $n\beta = m\pi$ eller $n = m\pi/\beta$ där m är ett heltal.

Det korrekta uttrycket för potentialen är alltså

$$\varphi(\rho, \psi) = \varphi_0 + \sum_{m=1}^{\infty} a_m \rho^{m\pi/\beta} \sin(m\pi\psi/\beta), \quad m = 1, 2, 3, \ldots \tag{2.83}$$

Men fortfarande är koefficienterna a_m okända !

Elfältets komponenter är:

$$E_\rho = -\frac{\partial \varphi}{\partial \rho} = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{m\pi}{\beta} a_m \rho^{m\pi/\beta - 1} \sin(m\pi\psi/\beta) \tag{2.84}$$

$$E_\psi = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial \varphi}{\partial \psi} = -\sum_{m=1}^{\infty} \frac{m\pi}{\beta} a_m \rho^{m\pi/\beta - 1} \cos(m\pi\psi/\beta) \tag{2.85}$$

$$E_\rho = -\frac{\partial \varphi}{\partial \rho} = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{m\pi}{\beta} a_m \rho^{m\pi/\beta - 1} \sin(m\pi\psi/\beta) \tag{2.84}$$

$$E_\psi = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial \varphi}{\partial \psi} = -\sum_{m=1}^{\infty} \frac{m\pi}{\beta} a_m \rho^{m\pi/\beta - 1} \cos(m\pi\psi/\beta) \tag{2.85}$$

Ytladdningstätheten är (Gauss lag, jfr. "pillerburken").

$$\sigma = \varepsilon_0 E_\psi(\rho, \psi = 0) = -\varepsilon_0 \frac{\pi}{\beta} \sum_{m=1}^{\infty} a_m \rho^{m\pi/\beta - 1} \tag{2.86}$$

$$E_\rho = -\frac{\partial \varphi}{\partial \rho} = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{m\pi}{\beta} a_m \rho^{m\pi/\beta - 1} \sin(m\pi\psi/\beta) \tag{2.84}$$

$$E_\psi = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial \varphi}{\partial \psi} = -\sum_{m=1}^{\infty} \frac{m\pi}{\beta} a_m \rho^{m\pi/\beta - 1} \cos(m\pi\psi/\beta) \tag{2.85}$$

Ytladdningstätheten är (Gauss lag, jfr. "pillerburken").

$$\sigma = \varepsilon_0 E_\psi(\rho, \psi = 0) = -\varepsilon_0 \frac{\pi}{\beta} \sum_{m=1}^{\infty} a_m \rho^{m\pi/\beta - 1} \tag{2.86}$$

För små ρ kan vi skära av serien efter första termen och får



$$\sigma \approx -\varepsilon_0 \frac{\pi}{\beta} a_1 \rho^{\pi/\beta - 1} \tag{2.87}$$

$$E_\rho = -\frac{\partial \varphi}{\partial \rho} = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{m\pi}{\beta} a_m \rho^{m\pi/\beta - 1} \sin(m\pi\psi/\beta) \tag{2.84}$$

$$E_\psi = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial \varphi}{\partial \psi} = -\sum_{m=1}^{\infty} \frac{m\pi}{\beta} a_m \rho^{m\pi/\beta - 1} \cos(m\pi\psi/\beta) \tag{2.85}$$

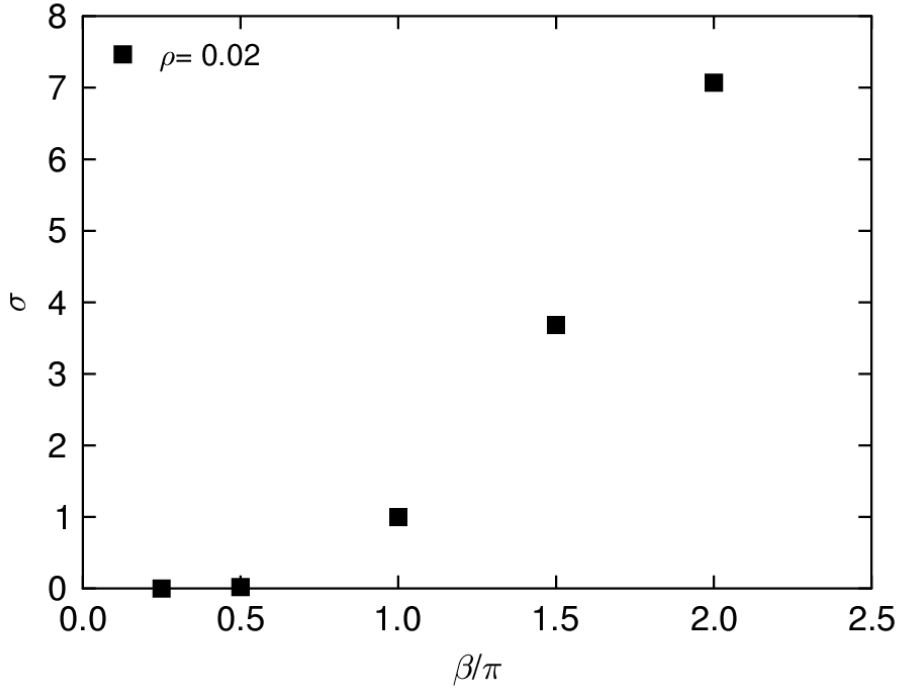
Ytladdningstätheten är (Gauss lag, jfr. "pillerburken").

$$\sigma = \varepsilon_0 E_\psi(\rho, \psi = 0) = -\varepsilon_0 \frac{\pi}{\beta} \sum_{m=1}^{\infty} a_m \rho^{m\pi/\beta - 1} \tag{2.86}$$

För små ρ kan vi skära av serien efter första termen och får

$$\sigma \approx -\varepsilon_0 \frac{\pi}{\beta} a_1 \rho^{\pi/\beta - 1} \tag{2.87}$$

$$\beta = \pi/4 \quad : \quad \sigma \propto \rho^{3}$$
$$\beta = \pi/2 \quad : \quad \sigma \propto \rho^{1}$$
$$\beta = \pi \quad : \quad \sigma \propto 1$$
$$\beta = 3\pi/2 \quad : \quad \sigma \propto \rho^{-1/3}$$
$$\beta = 2\pi \quad : \quad \sigma \propto \rho^{-1/2}$$

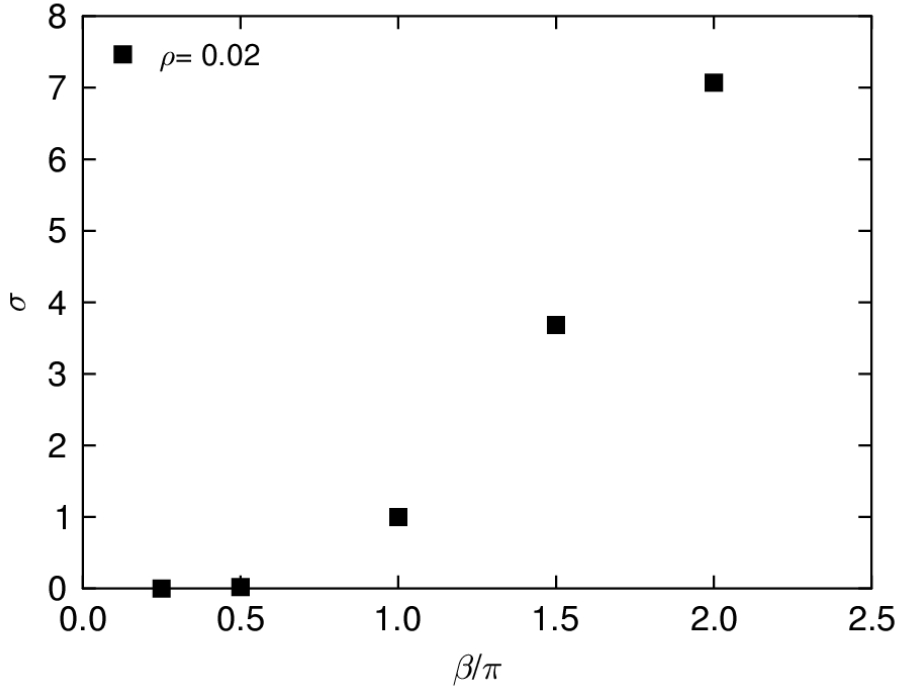


Vinkeln $\beta = \pi$ motsvarar alltså en plan yta, $\beta = 3\pi/2$ ett vinkelrätt hörn, och $\beta = 2\pi$ kanten av ett oändligt halvplan.

Från detta ser vi att ju skarpare hörn (mindre vinkel) desto mindre laddningstäthet i hörnet !

För hörn med en öppningsvinkel $\beta > \pi$ blir laddningstätheten och elfältet ρ^{-f}, med $f > 0$. Då man låter $\rho \to 0$, d.v.s. då man närmar sig hörnet, blir elfältet allt starkare.

$$\begin{aligned}
\beta = \pi/4 &: \quad \sigma \propto \rho^{3} \\
\beta = \pi/2 &: \quad \sigma \propto \rho^{1} \\
\beta = \pi &: \quad \sigma \propto 1 \\
\beta = 3\pi/2 &: \quad \sigma \propto \rho^{-1/3} \\
\beta = 2\pi &: \quad \sigma \propto \rho^{-1/2}
\end{aligned}$$



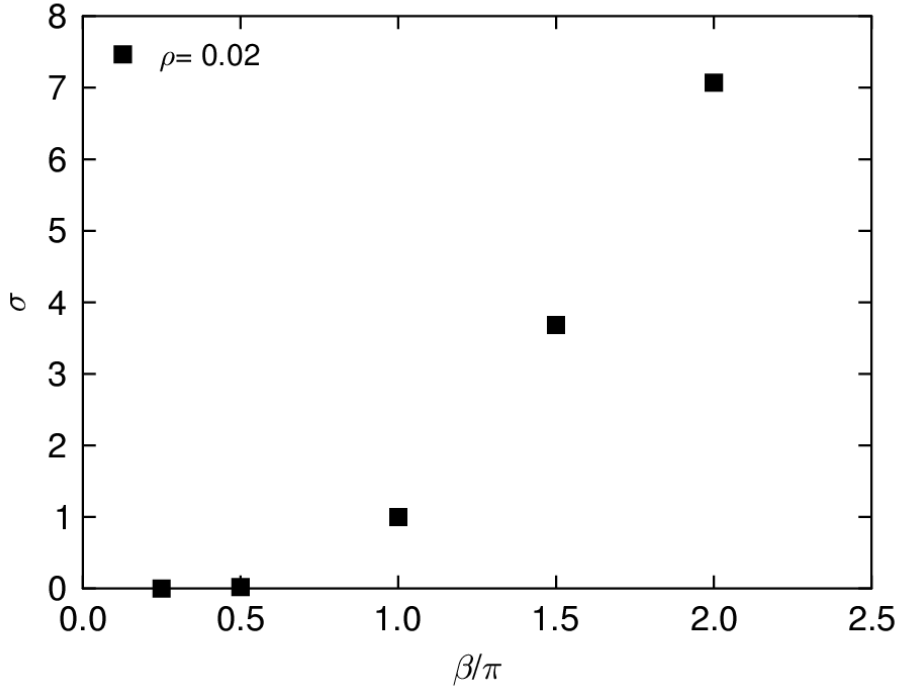
Vinkeln $\beta = \pi$ motsvarar alltså en plan yta, $\beta = 3\pi/2$ ett vinkelrätt hörn, och $\beta = 2\pi$ kanten av ett oändligt halvplan.

Från detta ser vi att ju skarpare hörn (mindre vinkel) desto mindre laddningstäthet i hörnet !

För hörn med en öppningsvinkel $\beta > \pi$ blir laddningstätheten och elfältet ρ^{-f}, med $f > 0$. Då man låter $\rho \to 0$, d.v.s. då man närmar sig hörnet, blir elfältet allt starkare.

I tre dimensioner kan man göra en motsvarande härledning också för en konisk spets (se Jackson kapitel 3.4) och får då ett kvalitativt liknande resultat.

$$\begin{aligned}
\beta = \pi/4 &: \quad \sigma \propto \rho^{3} \\
\beta = \pi/2 &: \quad \sigma \propto \rho^{1} \\
\beta = \pi &: \quad \sigma \propto 1 \\
\beta = 3\pi/2 &: \quad \sigma \propto \rho^{-1/3} \\
\beta = 2\pi &: \quad \sigma \propto \rho^{-1/2}
\end{aligned}$$



Vinkeln $\beta = \pi$ motsvarar alltså en plan yta, $\beta = 3\pi/2$ ett vinkelrätt hörn, och $\beta = 2\pi$ kanten av ett oändligt halvplan.

Från detta ser vi att ju skarpare hörn (mindre vinkel) desto mindre laddningstäthet i hörnet !

För hörn med en öppningsvinkel $\beta > \pi$ blir laddningstätheten och elfältet ρ^{-f}, med $f > 0$. Då man låter $\rho \to 0$, d.v.s. då man närmar sig hörnet, blir elfältet allt starkare.

I tre dimensioner kan man göra en motsvarande härledning också för en konisk spets (se Jackson kapitel 3.4) och får då ett kvalitativt liknande resultat.

Det här kan man nyttja till sin fördel för att skydda sig mot åsknedslag: för att skapa goda förutsättningar i en viss punkt för en urladdning mellan åskmoln och mark är det bara att placera dit en mycket spetsig ledande stång. Kring åskledarens spets kommer även en svag laddningsfördelning på marken att ge upphov till ett starkt fält. Kring den här spetsen är det nu lättare för åskmolnen att övervinna luftens gränsvärde för elektriskt genomslag/urladdning.

Med z-beroende

Behandlas inte. Lösningarna för ρ-beroendet blir Bessel-funktioner.

2.6. Bildladdningsmetoden



I vissa situationer kommer man lättare undan genom att inte utgå från Laplace-ekvationen.

2.6. Bildladdningsmetoden

I vissa situationer kommer man lättare undan genom att inte utgå från Laplace-ekvationen.

Vi behandlar nu en grundläggande metod som handlar om att bygga upp en lösning med hjälp av enkla laddningsfördelningar, så kallade **bild-laddningar**.

2.6. Bildladdningsmetoden

I vissa situationer kommer man lättare undan genom att inte utgå från Laplace-ekvationen.

Vi behandlar nu en grundläggande metod som handlar om att bygga upp en lösning med hjälp av enkla laddningsfördelningar, så kallade **bild-laddningar**.

Potentialen utanför ett system av (o)laddade ledare och enkla laddningsfördelningar kan skrivas som



$$\varphi(\mathbf{r}) = \sum_i \varphi_i(\mathbf{r}) + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \sum_j \int \frac{dA'_j \sigma_j(\mathbf{r}'_j)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'_j|} \tag{2.88}$$

Termerna i den första summeringen står för enkla laddningsfördelningar (punkter, linjer, . . .).

Termerna i den andra summeringen beaktar de inducerade laddningsfördelningarna på ledarnas ytor, och måste alltså erhållas som en explicit integrering över dessa fördelningar.

Vi bör komma ihåg att ledarnas ytor är ekvipotentialytor, så att φ_i på ledarnas ytor är kända.

2.6. Bildladdningsmetoden

I vissa situationer kommer man lättare undan genom att inte utgå från Laplace-ekvationen.

Vi behandlar nu en grundläggande metod som handlar om att bygga upp en lösning med hjälp av enkla laddningsfördelningar, så kallade **bild-laddningar**.

Potentialen utanför ett system av (o)laddade ledare och enkla laddningsfördelningar kan skrivas som

$$\varphi(\mathbf{r}) = \sum_i \varphi_i(\mathbf{r}) + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \sum_j \int \frac{dA'_j \sigma_j(\mathbf{r}'_j)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'_j|} \tag{2.88}$$

Termerna i den första summeringen står för enkla laddningsfördelningar (punkter, linjer, . . .).

Termerna i den andra summeringen beaktar de inducerade laddningsfördelningarna på ledarnas ytor, och måste alltså erhållas som en explicit integrering över dessa fördelningar.

Vi bör komma ihåg att ledarnas ytor är ekvipotentialytor, så att φ_i på ledarnas ytor är kända.

Inom bildladdningsmetoden inför man **fiktiva punkt- och linjeladdningar** placerade så att dessa ger uppphov till de kända ytpotentialerna. Detta betyder, att den andra summeringen i ekv. (**??**) ersätts med en summa som liknar den första.

2.6. Bildladdningsmetoden

I vissa situationer kommer man lättare undan genom att inte utgå från Laplace-ekvationen.

Vi behandlar nu en grundläggande metod som handlar om att bygga upp en lösning med hjälp av enkla laddningsfördelningar, så kallade **bild-laddningar**.

Potentialen utanför ett system av (o)laddade ledare och enkla laddningsfördelningar kan skrivas som

$$\varphi(\mathbf{r}) = \sum_i \varphi_i(\mathbf{r}) + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \sum_j \int \frac{dA'_j \sigma_j(\mathbf{r}'_j)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'_j|} \tag{2.88}$$

Termerna i den första summeringen står för enkla laddningsfördelningar (punkter, linjer, . . .).

Termerna i den andra summeringen beaktar de inducerade laddningsfördelningarna på ledarnas ytor, och måste alltså erhållas som en explicit integrering över dessa fördelningar.

Vi bör komma ihåg att ledarnas ytor är ekvipotentialytor, så att φ_{i} på ledarnas ytor är kända.

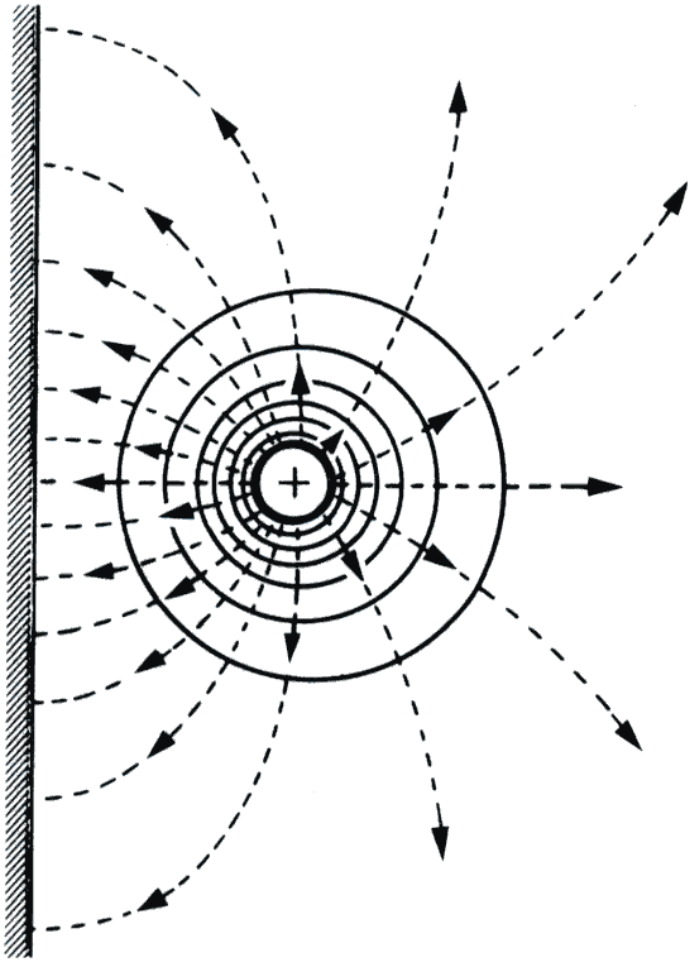
Inom bildladdningsmetoden inför man **fiktiva punkt- och linjeladdningar** placerade så att dessa ger uppphov till de kända ytpotentialerna. Detta betyder, att den andra summeringen i ekv. (**??**) ersätts med en summa som liknar den första.

Platserna för de fiktiva laddningarna måste vara inom ledarna, och de är alltså bara ett hjälpmedel för att räkna fram totalpotentialen !

Om bildladdningar förekommer utanför ledarna, i samma region där potentialen ska bestämmas, löser man ju inte längre Laplaces ekvation utans Poissons ekvation — dessutom med fel laddningsfördelning (bildladdningen är ju inte verklig) !

2.7. Punktvisa bildladdningar

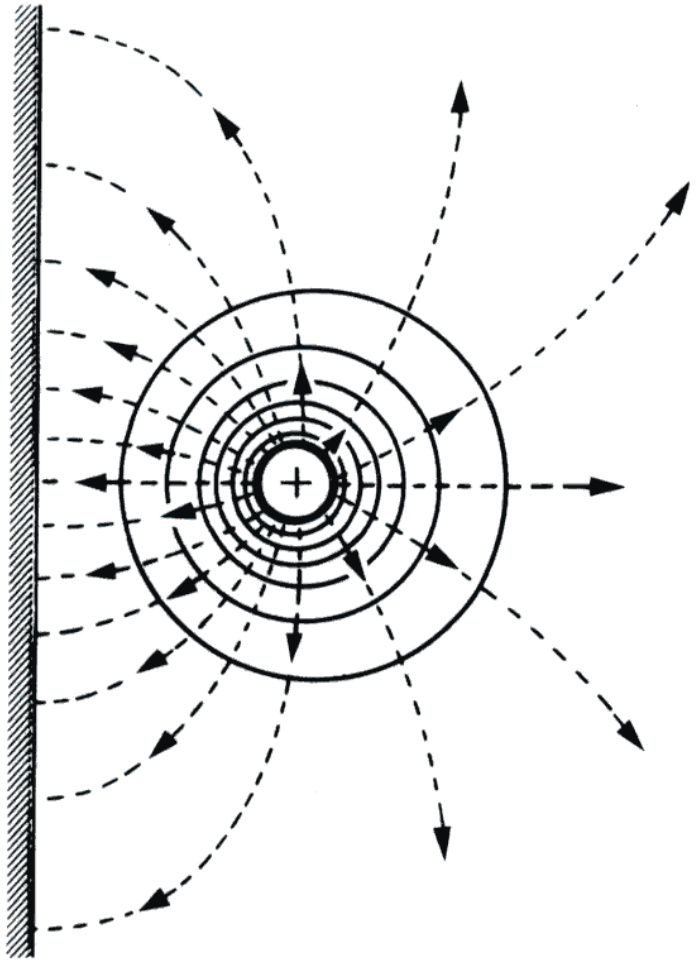
Exempel : Punktladdning q utanför ett ledande oändligt plan som sammanfaller med yz-planet. Låt punktladdningens position vara $\mathbf{r}_1 = (x_1, y_1, z_1) = (d, 0, 0)$.



Punktladdningen q inducerar en laddningsfördelning $\sigma(y, z)$ på ledarens plan. Totala potentialen utanför ledaren är då en summa av punktladdningens potential och den från den inducerade laddningen.
Istället för att försöka räkna fram $\sigma(y, z)$ tar vi fasta på faktumet att ledarens yta måste ha samma potential överallt.

2.7. Punktvisa bildladdningar

Exempel : Punktladdning q utanför ett ledande oändligt plan som sammanfaller med yz-planet. Låt punktladdningens position vara $\mathbf{r}_1 = (x_1, y_1, z_1) = (d, 0, 0)$.



Punktladdningen q inducerar en laddningsfördelning $\sigma(y, z)$ på ledarens plan. Totala potentialen utanför ledaren är då en summa av punktladdningens potential och den från den inducerade laddningen.
Istället för att försöka räkna fram $\sigma(y, z)$ tar vi fasta på faktumet att ledarens yta måste ha samma potential överallt.

Totalpotentialen är

$$
\begin{aligned}
\varphi(\mathbf{r}) &= \varphi_1(\mathbf{r}) + \varphi_2(\mathbf{r}) \\
&= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_1|} + \varphi_2(\mathbf{r}) \\
&= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0\sqrt{(x-d)^2+y^2+z^2}} + \varphi_2(\mathbf{r})
\end{aligned}
\tag{2.89}
$$

där ϕ_2 är potentialen för ytan, som för stunden är okänd.

$$\begin{aligned}\varphi(\mathbf{r}) &= \varphi_1(\mathbf{r}) + \varphi_2(\mathbf{r}) \\ &= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_1|} + \varphi_2(\mathbf{r}) \\ &= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0\sqrt{(x-d)^2+y^2+z^2}} + \varphi_2(\mathbf{r}) \end{aligned} \tag{2.89}$$

där ϕ_2 är potentialen för ytan, som för stunden är okänd.

På ledarens yta:



$$\varphi(0,y,z) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0\sqrt{d^2+y^2+z^2}} + \varphi_2(0,y,z) \equiv 0 \tag{2.90}$$

$$\begin{aligned}\varphi(\mathbf{r}) &= \varphi_1(\mathbf{r}) + \varphi_2(\mathbf{r}) \\ &= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_1|} + \varphi_2(\mathbf{r}) \\ &= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0\sqrt{(x-d)^2+y^2+z^2}} + \varphi_2(\mathbf{r}) \end{aligned} \tag{2.89}$$

där ϕ_2 är potentialen för ytan, som för stunden är okänd.

På ledarens yta:

$$\varphi(0,y,z) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0\sqrt{d^2+y^2+z^2}} + \varphi_2(0,y,z) \equiv 0 \tag{2.90}$$

Ett naturligt val för bildladdningen är nu



$$\varphi_2(x,y,z) = \frac{-q}{4\pi\varepsilon_0\sqrt{(x+d)^2+y^2+z^2}} \tag{2.91}$$

Därav metodens namn !

$$\begin{aligned}\varphi(\mathbf{r}) &= \varphi_1(\mathbf{r}) + \varphi_2(\mathbf{r}) \\ &= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_1|} + \varphi_2(\mathbf{r}) \\ &= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0\sqrt{(x-d)^2+y^2+z^2}} + \varphi_2(\mathbf{r}) \qquad (2.89)\end{aligned}$$

där ϕ_2 är potentialen för ytan, som för stunden är okänd.

På ledarens yta:

$$\varphi(0,y,z) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0\sqrt{d^2+y^2+z^2}} + \varphi_2(0,y,z) \equiv 0 \qquad (2.90)$$

Ett naturligt val för bildladdningen är nu

$$\varphi_2(x,y,z) = \frac{-q}{4\pi\varepsilon_0\sqrt{(x+d)^2+y^2+z^2}} \qquad (2.91)$$

Därav metodens namn !

Totala potentialen är nu

$$\varphi(x,y,z) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0\sqrt{(x-d)^2+y^2+z^2}} - \frac{q}{4\pi\varepsilon_0\sqrt{(x+d)^2+y^2+z^2}}, \quad x \geq 0 \qquad (2.92)$$

$$\varphi(x,y,z) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0\sqrt{(x-d)^2+y^2+z^2}} - \frac{q}{4\pi\varepsilon_0\sqrt{(x+d)^2+y^2+z^2}}, \quad x \geq 0 \qquad (2.92)$$

Den inducerade ytladdningsfördelningen är



$$\sigma(x,y,z) = \varepsilon_0 E_x(x=0) = -\varepsilon_0 \frac{\partial\varphi}{\partial x}\bigg|_{x=0} = -\frac{qd}{2\pi(d^2+y^2+z^2)^{3/2}} \qquad (2.93)$$

Absolutbeloppet är maximalt då $y = z = 0$, då gäller $\sigma = -q/(2\pi d^2)$.

$$\varphi(x,y,z) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0\sqrt{(x-d)^2+y^2+z^2}} - \frac{q}{4\pi\varepsilon_0\sqrt{(x+d)^2+y^2+z^2}}, \quad x \geq 0 \qquad (2.92)$$

Den inducerade ytladdningsfördelningen är

$$\sigma(x,y,z) = \varepsilon_0 E_x(x=0) = -\varepsilon_0 \frac{\partial\varphi}{\partial x}\bigg|_{x=0} = -\frac{qd}{2\pi(d^2+y^2+z^2)^{3/2}} \qquad (2.93)$$

Absolutbeloppet är maximalt då $y = z = 0$, då gäller $\sigma = -q/(2\pi d^2)$.

Kraften på punktladdningen:



$$\begin{aligned}
\mathbf{F}_q &= -q\,(\nabla\varphi_2)\Big|_{x=d,y=0,z=0} \\
&= -\frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{((x+d)^2+y^2+z^2)^{3/2}}(x+d,y,z)\Big|_{x=d,y=0,z=0} \\
&= -\frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{(2d)^3}(2d,0,0) \quad \square
\end{aligned} \qquad (2.94)$$



$$\varphi(x,y,z) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0\sqrt{(x-d)^2+y^2+z^2}} - \frac{q}{4\pi\varepsilon_0\sqrt{(x+d)^2+y^2+z^2}}, \quad x \geq 0 \qquad (2.92)$$

Den inducerade ytladdningsfördelningen är

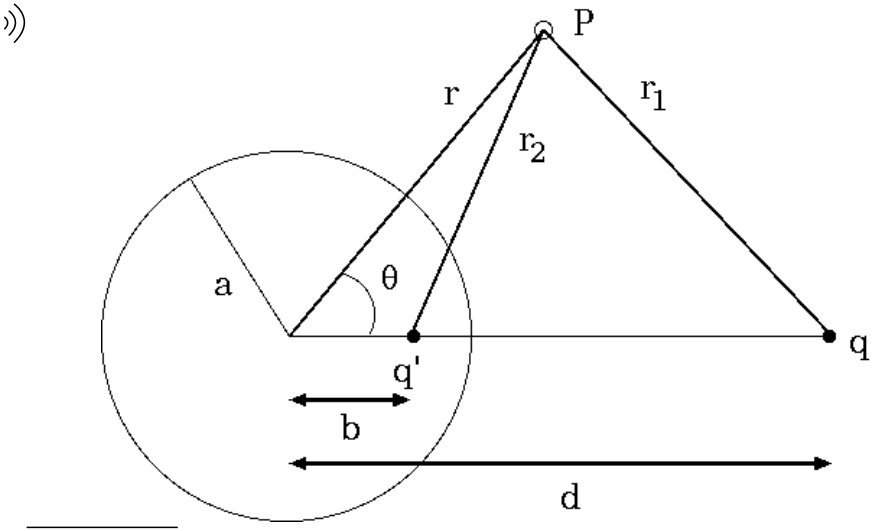
$$\sigma(x,y,z) = \varepsilon_0 E_x(x=0) = -\varepsilon_0 \frac{\partial\varphi}{\partial x}\bigg|_{x=0} = -\frac{qd}{2\pi(d^2+y^2+z^2)^{3/2}} \qquad (2.93)$$

Absolutbeloppet är maximalt då $y = z = 0$, då gäller $\sigma = -q/(2\pi d^2)$.

Kraften på punktladdningen:

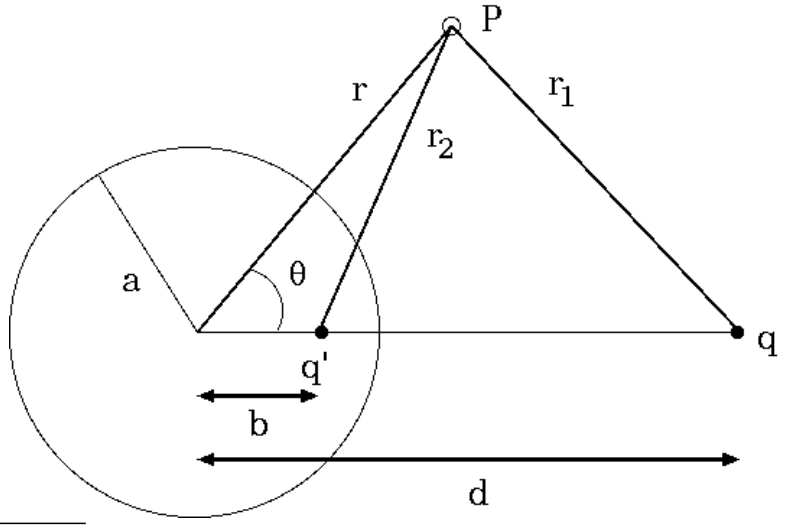
$$\begin{aligned}
\mathbf{F}_q &= -q\,(\nabla\varphi_2)\,\Big|_{x=d,y=0,z=0} \\
&= -\frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{((x+d)^2+y^2+z^2)^{3/2}}(x+d,y,z)\Big|_{x=d,y=0,z=0} \\
&= -\frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{(2d)^3}(2d,0,0) \quad \square
\end{aligned} \qquad (2.94)$$

Exempel : Punktladdning q utanför en ledande sfär med mittpunkten i origo.



Låt punktladdningens position vara $\mathbf{r}_1 = d\widehat{\mathbf{r}}$. Placera nu en bildladdning q' inuti sfären, i punkten $\mathbf{r}_2 = b\widehat{\mathbf{r}}$.

Exempel : Punktladdning q utanför en ledande sfär med mittpunkten i origo.

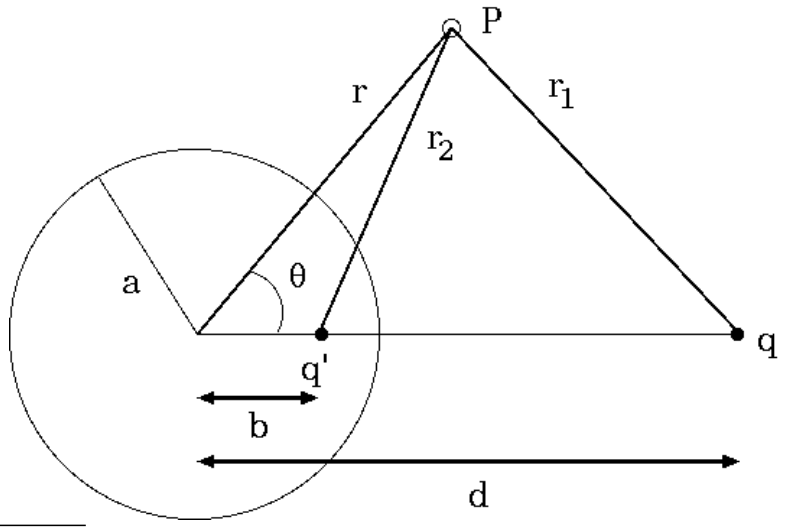


Låt punktladdningens position vara $\mathbf{r}_1 = d\widehat{\mathbf{r}}$. Placera nu en bildladdning q' inuti sfären, i punkten $\mathbf{r}_2 = b\widehat{\mathbf{r}}$.

Potentialen i en punkt $\mathbf{r}$ är nu

$$\begin{aligned}\varphi(r,\theta,\phi) &= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{|\mathbf{r}_1-\mathbf{r}|}+\frac{q'}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{|\mathbf{r}_2-\mathbf{r}|} \\ &= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{\sqrt{r^2+d^2-2rd\cos\theta}}+\frac{q'}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{\sqrt{r^2+b^2-2rb\cos\theta}} \qquad (2.95)\end{aligned}$$

Exempel : Punktladdning q utanför en ledande sfär med mittpunkten i origo.



Låt punktladdningens position vara $\mathbf{r}_1 = d\widehat{\mathbf{r}}$. Placera nu en bildladdning q' inuti sfären, i punkten $\mathbf{r}_2 = b\widehat{\mathbf{r}}$.

Potentialen i en punkt $\mathbf{r}$ är nu

$$\begin{aligned}\varphi(r,\theta,\phi) &= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{|\mathbf{r}_1-\mathbf{r}|}+\frac{q'}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{|\mathbf{r}_2-\mathbf{r}|} \\ &= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{\sqrt{r^2+d^2-2rd\cos\theta}}+\frac{q'}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{\sqrt{r^2+b^2-2rb\cos\theta}} \qquad (2.95)\end{aligned}$$

Om vi har sfären vid noll potential: $\varphi(r=a,\theta,\phi)=0$:

$$a^2 + d^2 - 2ad\cos\theta = \frac{q^2}{q'^2}(a^2 + b^2 - 2ab\cos\theta) \tag{2.96}$$

$$a^2 + d^2 - 2ad\cos\theta = \frac{q^2}{q'^2}(a^2 + b^2 - 2ab\cos\theta) \tag{2.96}$$

Denna ekvation skall gälla för alla värden på θ.

$$a^2 + d^2 - 2ad\cos\theta = \frac{q^2}{q'^2}(a^2 + b^2 - 2ab\cos\theta) \tag{2.96}$$

Denna ekvation skall gälla för alla värden på θ.

Om $\theta = \pi/2$:

$$a^2 + d^2 = \frac{q^2}{q'^2}(a^2 + b^2) \tag{2.97}$$

$$a^2 + d^2 - 2ad\cos\theta = \frac{q^2}{q'^2}(a^2 + b^2 - 2ab\cos\theta) \tag{2.96}$$

Denna ekvation skall gälla för alla värden på θ.

Om $\theta = \pi/2$:

$$a^2 + d^2 = \frac{q^2}{q'^2}(a^2 + b^2) \tag{2.97}$$

Om $\theta = 0$:

$$a^2 + d^2 - 2ad = \frac{q^2}{q'^2}(a^2 + b^2 - 2ab) \tag{2.98}$$

$$a^2 + d^2 - 2ad\cos\theta = \frac{q^2}{q'^2}(a^2 + b^2 - 2ab\cos\theta) \tag{2.96}$$

Denna ekvation skall gälla för alla värden på θ.

Om $\theta = \pi/2$:

$$a^2 + d^2 = \frac{q^2}{q'^2}(a^2 + b^2) \tag{2.97}$$

Om $\theta = 0$:

$$a^2 + d^2 - 2ad = \frac{q^2}{q'^2}(a^2 + b^2 - 2ab) \tag{2.98}$$

Okända är b och q' ! Nu har vi 2 ekvationer och 2 obekanta, så vi kan söka en unik lösning för dessa.

$$a^2 + d^2 - 2ad\cos\theta = \frac{q^2}{q'^2}(a^2 + b^2 - 2ab\cos\theta) \tag{2.96}$$

Denna ekvation skall gälla för alla värden på θ.

Om $\theta = \pi/2$:

$$a^2 + d^2 = \frac{q^2}{q'^2}(a^2 + b^2) \tag{2.97}$$

Om $\theta = 0$:

$$a^2 + d^2 - 2ad = \frac{q^2}{q'^2}(a^2 + b^2 - 2ab) \tag{2.98}$$

Okända är b och q' ! Nu har vi 2 ekvationer och 2 obekanta, så vi kan söka en unik lösning för dessa.

Subtrahera den senare ekvationen från den förra:

$$d = \frac{q^2}{q'^2} b \tag{2.99}$$

Insättning i ekv. (**??**) ger

2.97

$$a^2 + \frac{q^4}{q'^4} b^2 = \frac{q^2}{q'^2}(a^2 + b^2) \tag{2.100}$$

$$d = \frac{q^2}{q'^2} b \tag{2.99}$$

Insättning i ekv. (**??**) ger

$$a^2 + \frac{q^4}{q'^4} b^2 = \frac{q^2}{q'^2}(a^2 + b^2) \tag{2.100}$$

$$\frac{q^4}{q'^4} - \frac{q^2}{q'^2}(1 + \frac{a^2}{b^2}) + \frac{a^2}{b^2} = 0 \tag{2.101}$$

$\Longrightarrow$

$$\frac{q^2}{q'^2} = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{a^2}{b^2} \pm \sqrt{1 + 2\frac{a^2}{b^2} + \frac{a^4}{b^4} - 4\frac{a^2}{b^2}}\right) \tag{2.102}$$

$$= \frac{1}{2}\left(1 + \frac{a^2}{b^2} \pm \sqrt{(1 - \frac{a^2}{b^2})^2}\right) \tag{2.103}$$

$$d = \frac{q^2}{q'^2} b \tag{2.99}$$

Insättning i ekv. (**??**) ger

$$a^2 + \frac{q^4}{q'^4} b^2 = \frac{q^2}{q'^2}(a^2 + b^2) \tag{2.100}$$

$$\frac{q^4}{q'^4} - \frac{q^2}{q'^2}(1 + \frac{a^2}{b^2}) + \frac{a^2}{b^2} = 0 \tag{2.101}$$

$\Longrightarrow$

$$\frac{q^2}{q'^2} = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{a^2}{b^2} \pm \sqrt{1 + 2\frac{a^2}{b^2} + \frac{a^4}{b^4} - 4\frac{a^2}{b^2}}\right) \tag{2.102}$$

$$= \frac{1}{2}\left(1 + \frac{a^2}{b^2} \pm \sqrt{(1 - \frac{a^2}{b^2})^2}\right) \tag{2.103}$$

Lösningarna är $q^2/q'^2 = 1$ eller $q^2/q'^2 = a^2/b^2$. Den senare ger $q/q' = \pm a/b$ av vilkan vi väljer $q/q' = -a/b$.

Vi har nu

$$d = \frac{q^2}{q'^2} b \tag{2.104}$$

$$\frac{q}{q'} = -\frac{a}{b} \tag{2.105}$$

Vi har nu

$$d = \frac{q^2}{q'^2} b \tag{2.104}$$

$$\frac{q}{q'} = -\frac{a}{b} \tag{2.105}$$

Detta ger

$$b = \frac{a^2}{d} \tag{2.106}$$

$$q' = -\frac{a}{d} q \tag{2.107}$$

Vi har nu

$$d = \frac{q^2}{q'^2} b \tag{2.104}$$

$$\frac{q}{q'} = -\frac{a}{b} \tag{2.105}$$

Detta ger

$$b = \frac{a^2}{d} \tag{2.106}$$

$$q' = -\frac{a}{d} q \tag{2.107}$$

Om vi betecknar den verkliga punktladdningens position med $\mathbf{r}' = \mathbf{r}_1 = d\hat{\mathbf{r}}$ så blir potentialen utanför sfären

$$
\begin{aligned}
\varphi(r,\theta,\phi) &= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{|\mathbf{r}'-\mathbf{r}|} - \frac{aq}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{d|\frac{a^2}{d}\widehat{\mathbf{r}}-\mathbf{r}|} \\
&= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} - \frac{a}{d|\frac{a^2}{d}\widehat{\mathbf{r}}-\mathbf{r}|}\right] \\
&= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} - \frac{a}{d|\mathbf{r}-\frac{a^2}{d^2}\mathbf{r}'|}\right]
\end{aligned}
\tag{2.108}
$$

$$\begin{aligned}
\varphi(r,\theta,\phi) &= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{|\mathbf{r}'-\mathbf{r}|} - \frac{aq}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{d|\frac{a^2}{d}\widehat{\mathbf{r}}-\mathbf{r}|} \\
&= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} - \frac{a}{d|\frac{a^2}{d}\widehat{\mathbf{r}}-\mathbf{r}|}\right] \\
&= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} - \frac{a}{d|\mathbf{r}-\frac{a^2}{d^2}\mathbf{r}'|}\right] \qquad (2.108)
\end{aligned}$$

Om vi önskar att sfären befinner sig på en potential φ_0 måste vi addera ytterligare en bildladdning q'', denna gång i sfärens mitt:

$$\varphi(r,\theta,\phi) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{q}{r_1}+\frac{q'}{r_2}+\frac{q''}{r}\right) \qquad (2.109)$$

$$\begin{aligned}
\varphi(r,\theta,\phi) &= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{|\mathbf{r}'-\mathbf{r}|} - \frac{aq}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{d|\frac{a^2}{d}\widehat{\mathbf{r}}-\mathbf{r}|} \\
&= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} - \frac{a}{d|\frac{a^2}{d}\widehat{\mathbf{r}}-\mathbf{r}|}\right] \\
&= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} - \frac{a}{d|\mathbf{r}-\frac{a^2}{d^2}\mathbf{r}'|}\right] \qquad (2.108)
\end{aligned}$$

Om vi önskar att sfären befinner sig på en potential φ_0 måste vi addera ytterligare en bildladdning q'', denna gång i sfärens mitt:

$$\varphi(r,\theta,\phi) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{q}{r_1}+\frac{q'}{r_2}+\frac{q''}{r}\right) \qquad (2.109)$$

Vi har nu att

$$\varphi(r=a,\theta,\phi) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(0+\frac{q''}{a}\right) = \varphi_0 \qquad (2.110)$$

från vilket vi får q''.

---

från vilket vi får q''.

Kraften på punktladdningen ? Avståndet mellan laddningarna är

$$h \equiv |d - b| = |d - \frac{a^2}{d}| = \frac{d^2 - a^2}{d} \tag{2.111}$$

så att

$$F_q = |q\frac{q'}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{h^2}| = \frac{a}{d}\frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0}\frac{d^2}{(d^2 - a^2)^2} = \frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0}\frac{ad}{(d^2 - a^2)^2} \tag{2.112}$$

---

från vilket vi får q''.

Kraften på punktladdningen ? Avståndet mellan laddningarna är

$$h \equiv |d - b| = |d - \frac{a^2}{d}| = \frac{d^2 - a^2}{d} \tag{2.111}$$

så att

$$F_q = |q\frac{q'}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{h^2}| = \frac{a}{d}\frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0}\frac{d^2}{(d^2 - a^2)^2} = \frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0}\frac{ad}{(d^2 - a^2)^2} \tag{2.112}$$

Sfärens ytladdningstäthet är

$$\sigma(\theta, \phi) = -\varepsilon_0 \frac{\partial\varphi}{\partial r}\bigg|_{r=a} \tag{2.113}$$

---

från vilket vi får q''.

Kraften på punktladdningen ? Avståndet mellan laddningarna är

$$h \equiv |d - b| = |d - \frac{a^2}{d}| = \frac{d^2 - a^2}{d} \tag{2.111}$$

så att

$$F_q = |q\frac{q'}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{h^2}| = \frac{a}{d}\frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0}\frac{d^2}{(d^2 - a^2)^2} = \frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0}\frac{ad}{(d^2 - a^2)^2} \tag{2.112}$$

Sfärens ytladdningstäthet är

$$\sigma(\theta, \phi) = -\varepsilon_0 \frac{\partial \varphi}{\partial r}\bigg|_{r=a} \tag{2.113}$$

Sfärens totala laddning ges av Gauss' lag tillämpad på sfärens yta:

$$Q = q' + q'' \tag{2.114}$$

---

från vilket vi får q''.

Kraften på punktladdningen ? Avståndet mellan laddningarna är

$$h \equiv |d - b| = |d - \frac{a^2}{d}| = \frac{d^2 - a^2}{d} \tag{2.111}$$

så att

$$F_q = |q\frac{q'}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{h^2}| = \frac{a}{d}\frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0}\frac{d^2}{(d^2 - a^2)^2} = \frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0}\frac{ad}{(d^2 - a^2)^2} \tag{2.112}$$

Sfärens ytladdningstäthet är

$$\sigma(\theta, \phi) = -\varepsilon_0 \frac{\partial \varphi}{\partial r}\bigg|_{r=a} \tag{2.113}$$

Sfärens totala laddning ges av Gauss' lag tillämpad på sfärens yta:

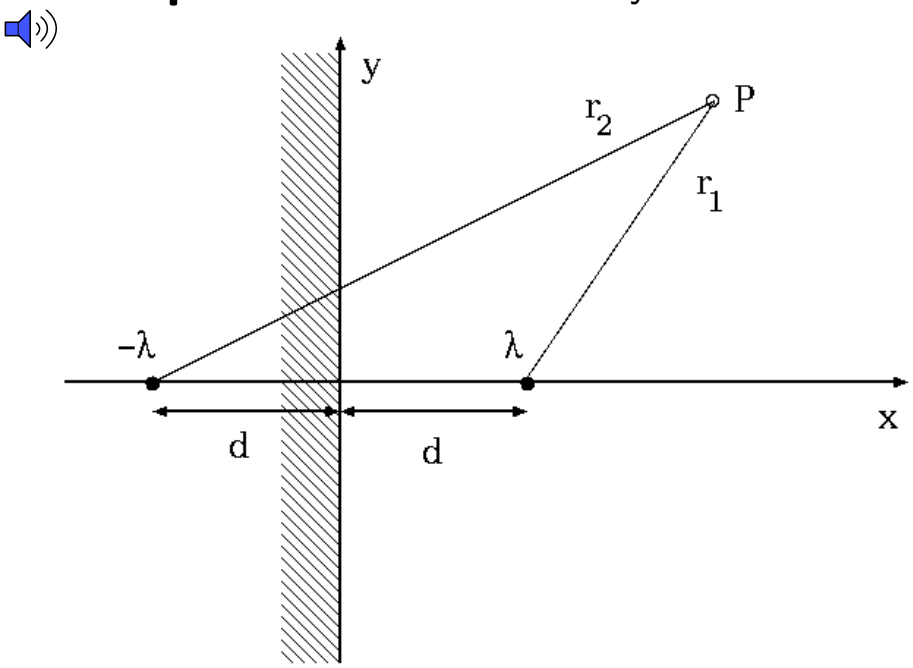
$$Q = q' + q'' \tag{2.114}$$

Obs:

- Jordad sfär: $\varphi(r = a) = 0$, $q'' = 0$.
- Ickeladdad sfär: $q'' = -q' = aq/d$.

2.8. Linjeformade bildladdningar

Exempel : Laddad ledande cylinder utanför ett ledande plan.

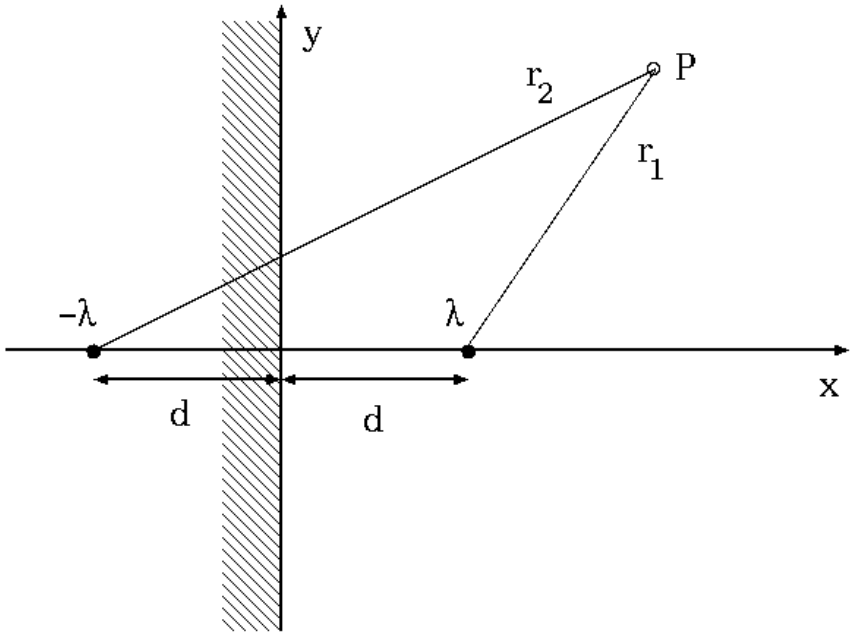


Låt ledaren ligga i yz-planet. Låt linjeladdningen vara längs med z-axeln, och ha koordinaterna $x = d$, $y = 0$.

Uppenbarligen har vi inget z-beroende, förutsatt att planet och ledningen är oändligt långa $\Rightarrow$ inga kant-effekter!

2.8. Linjeformade bildladdningar

Exempel : Laddad ledande cylinder utanför ett ledande plan.



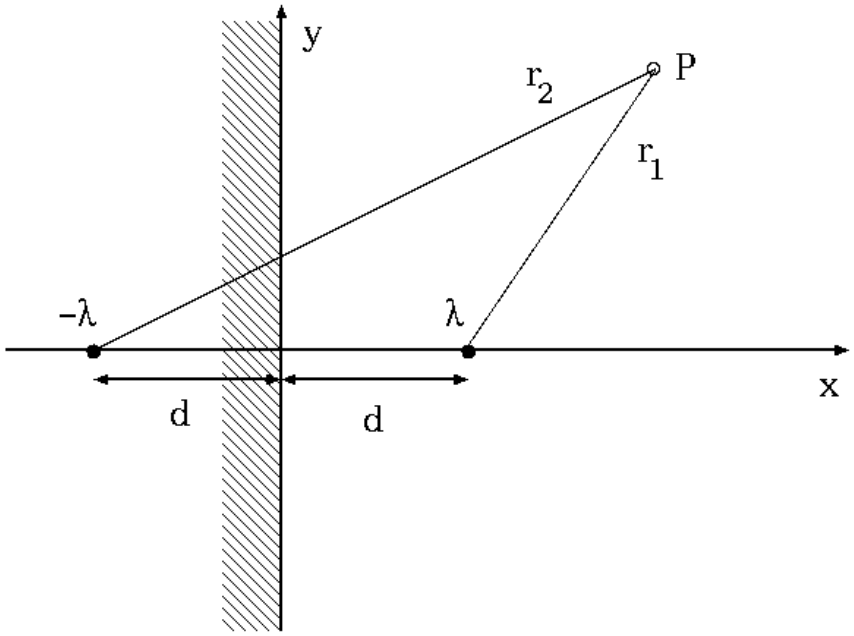
Låt ledaren ligga i yz-planet. Låt linjeladdningen vara längs med z-axeln, och ha koordinaterna $x = d$, $y = 0$.

Uppenbarligen har vi inget z-beroende, förutsatt att planet och ledningen är oändligt långa $\Rightarrow$ inga kant-effekter!

Om potentialen på planet är noll, bör vi ha en bildladdning i platsen $x = -d$, $y = 0$, orienterad längs med z-axeln.

2.8. Linjeformade bildladdningar

Exempel : Laddad ledande cylinder utanför ett ledande plan.



Låt ledaren ligga i yz-planet. Låt linjeladdningen vara längs med z-axeln, och ha koordinaterna $x = d$, $y = 0$.

Uppenbarligen har vi inget z-beroende, förutsatt att planet och ledningen är oändligt långa $\Rightarrow$ inga kant-effekter!

Om potentialen på planet är noll, bör vi ha en bildladdning i platsen $x = -d$, $y = 0$, orienterad längs med z-axeln.

Potentialen i en punkt (x, y) är

$$\varphi(x,y) = -\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\ln r_1 + \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\ln r_2 = -\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{r_1}{r_2} \qquad (2.115)$$

Potentialen är noll på planet, d.v.s. för $r_1 = r_2$.

Potentialen är noll på planet, d.v.s. för $r_1 = r_2$.

Helt allmänt:



$$r_1^2 = (x-d)^2 + y^2 \tag{2.116}$$

$$r_2^2 = (x+d)^2 + y^2 \tag{2.117}$$

Konstant potential, som inte är noll, fås i punkterna (x, y) där r_1/r_2 är konstant, säg M.

$$M^2 = \frac{r_1^2}{r_2^2} = \frac{x^2 - 2xd + d^2 + y^2}{x^2 + 2xd + d^2 + y^2} \tag{2.118}$$

Potentialen är noll på planet, d.v.s. för $r_1 = r_2$.

Helt allmänt:

$$r_1^2 = (x-d)^2 + y^2 \tag{2.116}$$

$$r_2^2 = (x+d)^2 + y^2 \tag{2.117}$$

Konstant potential, som inte är noll, fås i punkterna (x, y) där r_1/r_2 är konstant, säg M.

$$M^2 = \frac{r_1^2}{r_2^2} = \frac{x^2 - 2xd + d^2 + y^2}{x^2 + 2xd + d^2 + y^2} \tag{2.118}$$

Efter förenkling fås



$$\left(x + d\frac{M^2+1}{M^2-1}\right)^2 + y^2 = \left(d\frac{2M}{|M^2-1|}\right)^2 \tag{2.119}$$

som är ekvationen för en cylinder med mittpunkten $(-d(M^2+1)/(M^2-1), 0)$ och radien

$$R_c = d\frac{2M}{|M^2-1|} \tag{2.120}$$

Med $M < 1$ fås en cylindrisk ekvipotentialyta som innestänger den högra linjeladdningen. □

2.9. Greens metod

[Jackson, Arfken]

Greens metoder hör inte till kärnmaterialet på denna kurs, men de behandlas kort för att de annars kan anses vara en del av en fysikers allmänbildning.

2.9. Greens metod

[Jackson, Arfken]

Greens metoder hör inte till kärnmaterialet på denna kurs, men de behandlas kort för att de annars kan anses vara en del av en fysikers allmänbildning.

2.9.1. Greens I och II teorem

Gauss' teorem säger ju att



$$\int_V dV \nabla \cdot \mathbf{F} = \oint_A \mathbf{dA} \cdot \mathbf{F} \equiv \oint_A dA \widehat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{F} \tag{2.121}$$

Låt nu vektorfältet $\mathbf{F}$ vara givet som produkten av en skalärfunktion med gradienten av en annan skalärfunktion:

$$\mathbf{F} = \phi \nabla \psi \tag{2.122}$$

Vi har nu

$$\nabla \cdot \mathbf{F} \quad = \quad \nabla \cdot (\phi \nabla \psi) = \phi \nabla^2 \psi + \nabla \phi \cdot \nabla \psi \tag{2.123}$$

$$\widehat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{F} \quad = \quad \phi \widehat{\mathbf{n}} \cdot \nabla \psi \equiv \phi \frac{\partial \psi}{\partial n} \tag{2.124}$$

$$\widehat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{F} \quad = \quad \phi \widehat{\mathbf{n}} \cdot \nabla \psi \equiv \phi \frac{\partial \psi}{\partial n} \tag{2.124}$$

Insättning i Gauss' teorem ger **Greens I teorem**

$$\int_V dV \left(\phi \nabla^2 \psi + \nabla \phi \cdot \nabla \psi \right) = \oint_A dA \phi \frac{\partial \psi}{\partial n} \tag{2.125}$$

Skriver vi istället

$$\mathbf{F} = \psi \nabla \phi \tag{2.126}$$

får vi

$$\int_V dV \left(\psi \nabla^2 \phi + \nabla \psi \cdot \nabla \phi \right) = \oint_A dA \psi \frac{\partial \phi}{\partial n} \tag{2.127}$$

$$\widehat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{F} \quad = \quad \phi \widehat{\mathbf{n}} \cdot \nabla \psi \equiv \phi \frac{\partial \psi}{\partial n} \tag{2.124}$$

Insättning i Gauss' teorem ger **Greens I teorem**

$$\int_V dV \left(\phi \nabla^2 \psi + \nabla \phi \cdot \nabla \psi \right) = \oint_A dA \phi \frac{\partial \psi}{\partial n} \tag{2.125}$$

Skriver vi istället

$$\mathbf{F} = \psi \nabla \phi \tag{2.126}$$

får vi

$$\int_V dV \left(\psi \nabla^2 \phi + \nabla \psi \cdot \nabla \phi \right) = \oint_A dA \psi \frac{\partial \phi}{\partial n} \tag{2.127}$$

Subtrahera denna från den tidigare:

$$\int_V dV \left(\phi \nabla^2 \psi - \psi \nabla^2 \phi \right) = \oint_A dA \left(\phi \frac{\partial \psi}{\partial n} - \psi \frac{\partial \phi}{\partial n} \right) \tag{2.128}$$

Detta är **Greens II teorem**, som ibland också kallas bara **Greens teorem**.

.

.

Låt nu $\phi = \varphi(\mathbf{r})$ (den elektrostatiska potentialen) och $\psi = G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$, där funktionen G uppfyller följande villkor:

$$\nabla'^2 G = -4\pi\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \tag{2.129}$$

Med detta villkor kan G skrivas som summan

$$G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} + F(\mathbf{r}, \mathbf{r}'), \tag{2.130}$$

där F satisifierar Laplaces ekvation:

$$\nabla'^2 F(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = 0. \tag{2.131}$$

.

Låt nu $\phi = \varphi(\mathbf{r})$ (den elektrostatiska potentialen) och $\psi = G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$, där funktionen G uppfyller följande villkor:

$$\nabla'^2 G = -4\pi\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \tag{2.129}$$

Med detta villkor kan G skrivas som summan

$$G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} + F(\mathbf{r}, \mathbf{r}'), \tag{2.130}$$

där F satisifierar Laplaces ekvation:

$$\nabla'^2 F(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = 0. \tag{2.131}$$

Greens II teorem ger nu

$$\int_V dV' \left(\varphi\nabla'^2 G - G\nabla'^2\varphi\right) \quad = \quad \int_V dV' \left(-\varphi 4\pi\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') + G\frac{\rho(\mathbf{r}')}{\varepsilon_0}\right)$$

$$= \oint_A dA' \left(\varphi \frac{\partial' G}{\partial n'} - G \frac{\partial' \varphi}{\partial n'} \right) \tag{2.132}$$

$$= \oint_A dA' \left(\varphi \frac{\partial' G}{\partial n'} - G \frac{\partial' \varphi}{\partial n'} \right) \tag{2.132}$$

Detta ger med att utföra integralen över Diracs delta-funktion:

$$\varphi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int_V dV' \rho(\mathbf{r}') G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') - \frac{1}{4\pi} \oint_A dA' \left(\varphi(\mathbf{r}') \frac{\partial' G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')}{\partial n'} - G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \frac{\partial' \varphi(\mathbf{r}')}{\partial n'} \right) \tag{2.133}$$

Denna ekvation ger alltså $inte$ en fysikaliskt vettig lösning till elektrostatiska randvärdesproblem, för den innehåller både Dirichlet- och Neumann-randvillkoren.

Men iden är nu att denna form möjliggör att söka funktioner G som får nåndera randvillkorstermen att försvinna, och därmed leder till en fysikaliskt rimlig lösning för den andra typen av randvillkor! Detta är grundideen i den s.k. Greens-funktion-metoden.

$$= \oint_A dA' \left(\varphi \frac{\partial' G}{\partial n'} - G \frac{\partial' \varphi}{\partial n'} \right) \tag{2.132}$$

Detta ger med att utföra integralen över Diracs delta-funktion:

$$\varphi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int_V dV' \rho(\mathbf{r}') G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') - \frac{1}{4\pi} \oint_A dA' \left(\varphi(\mathbf{r}') \frac{\partial' G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')}{\partial n'} - G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \frac{\partial' \varphi(\mathbf{r}')}{\partial n'} \right) \tag{2.133}$$

Denna ekvation ger alltså $inte$ en fysikaliskt vettig lösning till elektrostatiska randvärdesproblem, för den innehåller både Dirichlet- och Neumann-randvillkoren.

Men iden är nu att denna form möjliggör att söka funktioner G som får nåndera randvillkorstermen att försvinna, och därmed leder till en fysikaliskt rimlig lösning för den andra typen av randvillkor! Detta är grundideen i den s.k. Greens-funktion-metoden.

Om vi har ett Dirichlet-problem är $\varphi(\mathbf{r}')$ känd på randytan, medan $\partial\varphi/\partial n$ är okänd. För att göra oss av med detta uttryck söker vi en s.k. **Greens funktion** $G_D(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = 0$ då $\mathbf{r}'$ är på randytan A ! Potentialen ges då genast av uttrycket

$$\varphi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int_V dV' \rho(\mathbf{r}') G_D(\mathbf{r}, \mathbf{r}') - \frac{1}{4\pi} \oint_A dA' \varphi(\mathbf{r}') \frac{\partial' G_D(\mathbf{r}, \mathbf{r}')}{\partial n'} \tag{2.134}$$

Om vi istället har ett Neumann-problem är $\partial'\varphi(\mathbf{r}')/\partial n'$ känd på randytan. Vi söker en Greens funktion $G_N(\mathbf{r},\mathbf{r}')$ för vilken gäller att $\partial' G_N(\mathbf{r},\mathbf{r}')/\partial n' = 0$ då $\mathbf{r}'$ är på randytan A.

Potentialen ges då av uttrycket

$$\varphi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_V dV'\rho(\mathbf{r}')G_N(\mathbf{r},\mathbf{r}') + \frac{1}{4\pi}\oint_A dA' G_N(\mathbf{r},\mathbf{r}')\frac{\partial'\varphi(\mathbf{r}')}{\partial n'} \tag{2.135}$$

Om vi istället har ett Neumann-problem är $\partial'\varphi(\mathbf{r}')/\partial n'$ känd på randytan. Vi söker en Greens funktion $G_N(\mathbf{r},\mathbf{r}')$ för vilken gäller att $\partial' G_N(\mathbf{r},\mathbf{r}')/\partial n' = 0$ då $\mathbf{r}'$ är på randytan A.

Potentialen ges då av uttrycket

$$\varphi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_V dV'\rho(\mathbf{r}')G_N(\mathbf{r},\mathbf{r}') + \frac{1}{4\pi}\oint_A dA' G_N(\mathbf{r},\mathbf{r}')\frac{\partial'\varphi(\mathbf{r}')}{\partial n'} \tag{2.135}$$

Från den första termen i dessa uttryck ser vi att Greens funktion kan väljas så att den motsvarar en potential, bara laddningsfördelningen har dividerats bort !

Om vi istället har ett Neumann-problem är $\partial'\varphi(\mathbf{r}')/\partial n'$ känd på randytan. Vi söker en Greens funktion $G_N(\mathbf{r},\mathbf{r}')$ för vilken gäller att $\partial' G_N(\mathbf{r},\mathbf{r}')/\partial n' = 0$ då $\mathbf{r}'$ är på randytan A.

Potentialen ges då av uttrycket

$$\varphi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_V dV'\rho(\mathbf{r}')G_N(\mathbf{r},\mathbf{r}') + \frac{1}{4\pi}\oint_A dA' G_N(\mathbf{r},\mathbf{r}')\frac{\partial'\varphi(\mathbf{r}')}{\partial n'} \qquad (2.135)$$

Från den första termen i dessa uttryck ser vi att Greens funktion kan väljas så att den motsvarar en potential, bara laddningsfördelningen har dividerats bort !

Exempel 1: En Greens funktion för en punktladdning utanför ledande sfär. Antag potentialen på ytan är känd, så att vi har ett Dirichlet-problem. Vi ska då ha $G(\mathbf{r},\mathbf{r}') = 0$ för $\mathbf{r}'$ på ledarens yta.

Låt punktladdningen vara i $\mathbf{r}'$, och sfärens radie vara a.

Om vi istället har ett Neumann-problem är $\partial'\varphi(\mathbf{r}')/\partial n'$ känd på randytan. Vi söker en Greens funktion $G_N(\mathbf{r},\mathbf{r}')$ för vilken gäller att $\partial' G_N(\mathbf{r},\mathbf{r}')/\partial n' = 0$ då $\mathbf{r}'$ är på randytan A.

Potentialen ges då av uttrycket

$$\varphi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_V dV'\rho(\mathbf{r}')G_N(\mathbf{r},\mathbf{r}') + \frac{1}{4\pi}\oint_A dA' G_N(\mathbf{r},\mathbf{r}')\frac{\partial'\varphi(\mathbf{r}')}{\partial n'} \tag{2.135}$$

Från den första termen i dessa uttryck ser vi att Greens funktion kan väljas så att den motsvarar en potential, bara laddningsfördelningen har dividerats bort !

Exempel 1: En Greens funktion för en punktladdning utanför ledande sfär. Antag potentialen på ytan är känd, så att vi har ett Dirichlet-problem. Vi ska då ha $G(\mathbf{r},\mathbf{r}') = 0$ för $\mathbf{r}'$ på ledarens yta.

Låt punktladdningen vara i $\mathbf{r}'$, och sfärens radie vara a.

2.108

Vi löste detta problem tidigare, se ekv. (**??**). Vi kan nu försöka välja den erhållna potentialen (med laddningsfaktorn bortdividerad) som Greens funktion:

$$G(\mathbf{r},\mathbf{r}') = \frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} - \frac{a}{d|\mathbf{r}-\frac{a^2}{d^2}\mathbf{r}'|} \equiv \frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} - \frac{a}{r'|\mathbf{r}-\frac{a^2}{r'^2}\mathbf{r}'|} \tag{2.136}$$

Här gäller att $\mathbf{r}'$ är platsen för den reella punktladdningen.

Här gäller att $\mathbf{r}'$ är platsen för den reella punktladdningen.

Vi observerar nu att $r' = a$ ger $G = 0$, som det bör vara för det här Dirichlet-problemet.

Här gäller att $\mathbf{r}'$ är platsen för den reella punktladdningen.

Vi observerar nu att $r' = a$ ger $G = 0$, som det bör vara för det här Dirichlet-problemet.

Med sfäriska kordinater fås

$$G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \frac{1}{\sqrt{r^2 + r'^2 - 2rr' \cos\gamma}} - \frac{1}{\sqrt{\frac{r^2 r'^2}{a^2} + a^2 - 2rr' \cos\gamma}} \tag{2.137}$$

Här gäller att $\mathbf{r}'$ är platsen för den reella punktladdningen.

Vi observerar nu att $r' = a$ ger $G = 0$, som det bör vara för det här Dirichlet-problemet.

Med sfäriska kordinater fås

$$G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \frac{1}{\sqrt{r^2 + r'^2 - 2rr' \cos\gamma}} - \frac{1}{\sqrt{\frac{r^2 r'^2}{a^2} + a^2 - 2rr' \cos\gamma}} \tag{2.137}$$

Normalderivatan på ytan, som separerar den externa volymen (där vi vill veta potentialen!) från ledarens inre, är

$$\begin{aligned}
\left.\frac{\partial' G}{\partial n'}\right|_{r'=a} &= -\left.\frac{\partial' G}{\partial r'}\right|_{r'=a} \\
&= \frac{a - r\cos\gamma}{(r^2 + a^2 - 2ar\cos\gamma)^{3/2}} - \frac{\frac{r^2}{a} - r\cos\gamma}{(r^2 + a^2 - 2ar\cos\gamma)^{3/2}} \\
&= -\frac{r^2 - a^2}{a(r^2 + a^2 - 2ar\cos\gamma)^{3/2}}
\end{aligned} \tag{2.138}$$

Här gäller att $\mathbf{r}'$ är platsen för den reella punktladdningen.

Vi observerar nu att $r' = a$ ger $G = 0$, som det bör vara för det här Dirichlet-problemet.

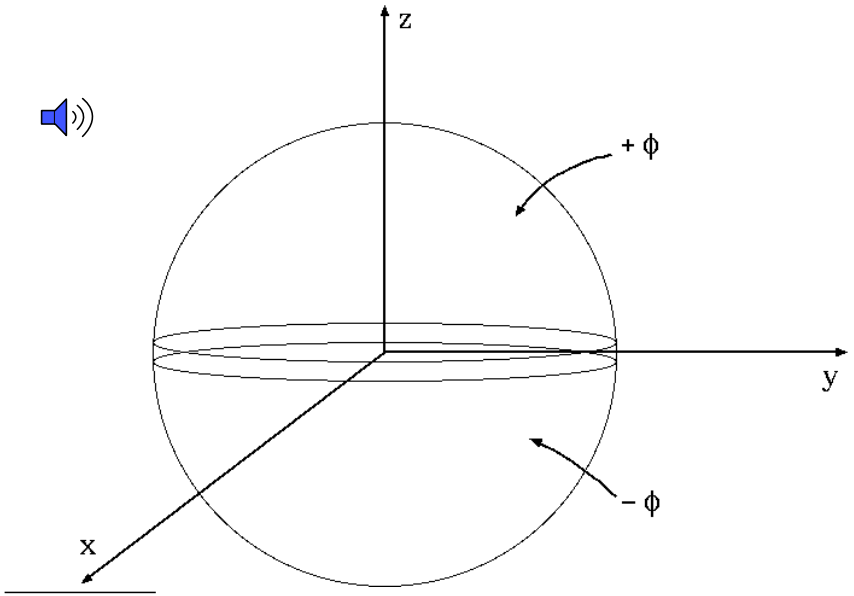
Med sfäriska kordinater fås

$$G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \frac{1}{\sqrt{r^2 + r'^2 - 2rr' \cos\gamma}} - \frac{1}{\sqrt{\frac{r^2 r'^2}{a^2} + a^2 - 2rr' \cos\gamma}} \tag{2.137}$$

Normalderivatan på ytan, som separerar den externa volymen (där vi vill veta potentialen!) från ledarens inre, är

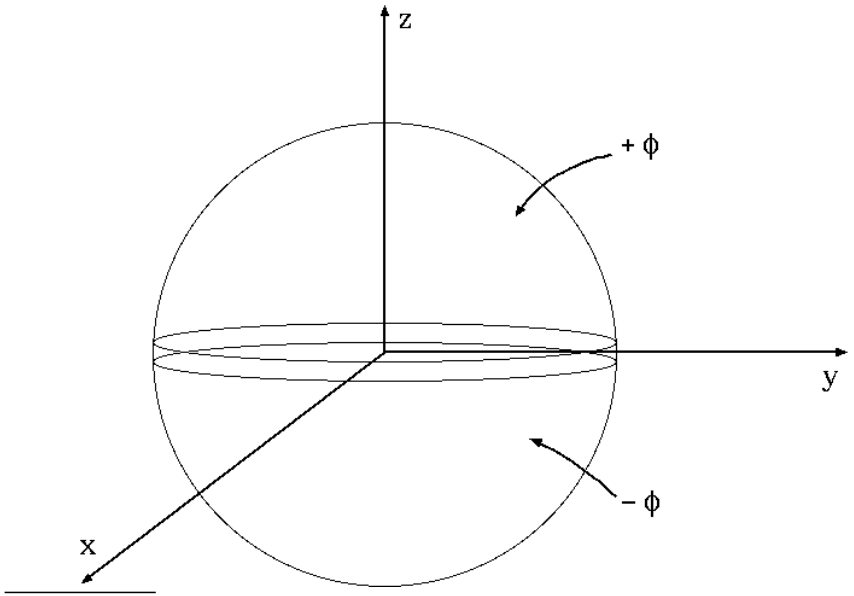
$$\begin{aligned}
\left.\frac{\partial' G}{\partial n'}\right|_{r'=a} &= -\left.\frac{\partial' G}{\partial r'}\right|_{r'=a} \\
&= \frac{a - r\cos\gamma}{(r^2 + a^2 - 2ar\cos\gamma)^{3/2}} - \frac{\frac{r^2}{a} - r\cos\gamma}{(r^2 + a^2 - 2ar\cos\gamma)^{3/2}} \\
&= -\frac{r^2 - a^2}{a(r^2 + a^2 - 2ar\cos\gamma)^{3/2}}
\end{aligned} \tag{2.138}$$

Exempel : En ledare bestående av två hemisfärer isolerade från varandra.



Låt potentialen för den övre halvsfären vara $+\varphi_0$ och $-\varphi_0$ för den undre.

Exempel : En ledare bestående av två hemisfärer isolerade från varandra.



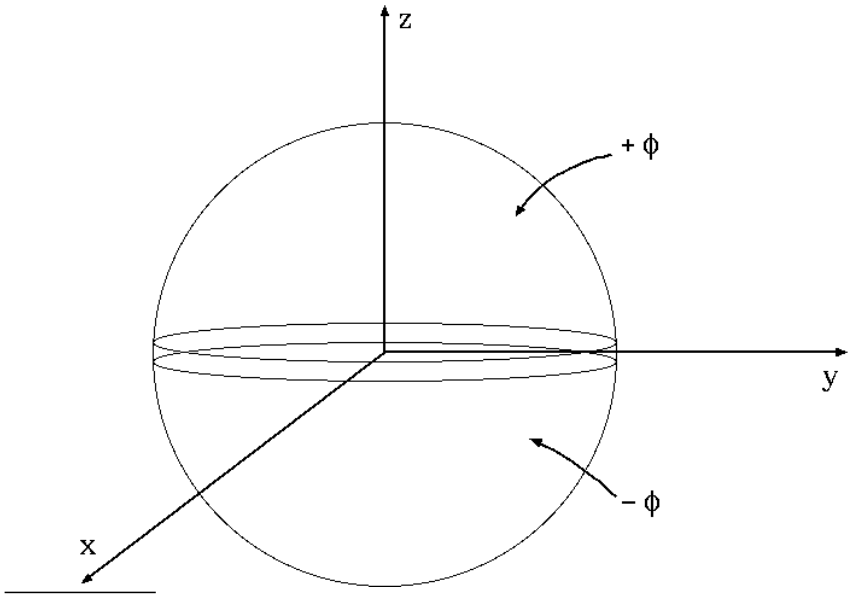
Låt potentialen för den övre halvsfären vara $+\varphi_0$ och $-\varphi_0$ för den undre.

Dirichlet-problemets lösning med Greens metod ger oss ekvationen

$$\varphi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_V dV' \times 0 - \frac{1}{4\pi}\oint_A dA'\varphi(\mathbf{r}')\frac{\partial' G_D(\mathbf{r},\mathbf{r}')}{\partial n'} \qquad (2.139)$$

Ingen laddning utanför ledaren!

Exempel : En ledare bestående av två hemisfärer isolerade från varandra.



Låt potentialen för den övre halvsfären vara $+\varphi_0$ och $-\varphi_0$ för den undre.

Dirichlet-problemets lösning med Greens metod ger oss ekvationen

$$\varphi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_V dV' \times 0 - \frac{1}{4\pi}\oint_A dA'\varphi(\mathbf{r}')\frac{\partial' G_D(\mathbf{r},\mathbf{r}')}{\partial n'} \qquad (2.139)$$

Ingen laddning utanför ledaren!

Med Greens funktion vald som i föregående exempel:

$$\begin{aligned}\varphi(\mathbf{r}) &= -\frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi} d\phi' \int_0^{\pi/2} d\theta' \sin\theta' \varphi_0 a^2 \frac{\partial' G_D(\mathbf{r},\mathbf{r}')}{\partial n'} \\ &\quad + \frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi} d\phi' \int_{\pi/2}^{\pi} d\theta' \sin\theta' \varphi_0 a^2 \frac{\partial' G_D(\mathbf{r},\mathbf{r}')}{\partial n'} \end{aligned} \tag{2.140}$$

$$\varphi(\mathbf{r}) = \frac{\varphi_0}{4\pi}\left(-\int_0^{2\pi} d\phi' \int_0^{\pi/2} d\theta' \sin\theta' + \int_0^{2\pi} d\phi' \int_{\pi/2}^{\pi} d\theta' \sin\theta'\right) a^2 \frac{\partial' G_D(\mathbf{r},\mathbf{r}')}{\partial n'} \tag{2.141}$$

$$\varphi(\mathbf{r}) = \frac{\varphi_0}{4\pi}\left(-\int_0^{2\pi} d\phi' \int_0^{\pi/2} d\theta' \sin\theta' + \int_0^{2\pi} d\phi' \int_{\pi/2}^{\pi} d\theta' \sin\theta'\right) \frac{a(a^2-r^2)}{(r^2+a^2-2ar\cos\gamma)^{3/2}} \tag{2.142}$$

Med $u' = \cos\theta'$, $du = -\sin\theta'$:

$$\varphi(\mathbf{r}) = \frac{\varphi_0}{4\pi}\left(\int_0^{2\pi} d\phi' \int_1^{0} du' - \int_0^{2\pi} d\phi' \int_0^{-1} du'\right) \frac{a(a^2-r^2)}{(r^2+a^2-2ar\cos\gamma)^{3/2}} \tag{2.143}$$

$$\begin{aligned}\varphi(\mathbf{r}) &= -\frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi} d\phi' \int_0^{\pi/2} d\theta' \sin\theta' \varphi_0 a^2 \frac{\partial' G_D(\mathbf{r},\mathbf{r}')}{\partial n'} \\ &\quad + \frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi} d\phi' \int_{\pi/2}^{\pi} d\theta' \sin\theta' \varphi_0 a^2 \frac{\partial' G_D(\mathbf{r},\mathbf{r}')}{\partial n'} \end{aligned} \tag{2.140}$$

$$\varphi(\mathbf{r}) = \frac{\varphi_0}{4\pi}\left(-\int_0^{2\pi} d\phi' \int_0^{\pi/2} d\theta' \sin\theta' + \int_0^{2\pi} d\phi' \int_{\pi/2}^{\pi} d\theta' \sin\theta'\right) a^2 \frac{\partial' G_D(\mathbf{r},\mathbf{r}')}{\partial n'} \tag{2.141}$$

$$\varphi(\mathbf{r}) = \frac{\varphi_0}{4\pi}\left(-\int_0^{2\pi} d\phi' \int_0^{\pi/2} d\theta' \sin\theta' + \int_0^{2\pi} d\phi' \int_{\pi/2}^{\pi} d\theta' \sin\theta'\right) \frac{a(a^2-r^2)}{(r^2+a^2-2ar\cos\gamma)^{3/2}} \tag{2.142}$$

Med $u' = \cos\theta'$, $du = -\sin\theta'$:

$$\varphi(\mathbf{r}) = \frac{\varphi_0}{4\pi}\left(\int_0^{2\pi} d\phi' \int_1^{0} du' - \int_0^{2\pi} d\phi' \int_0^{-1} du'\right) \frac{a(a^2-r^2)}{(r^2+a^2-2ar\cos\gamma)^{3/2}} \tag{2.143}$$

$$\varphi(\mathbf{r}) = \frac{\varphi_0}{4\pi}\left(\int_0^{2\pi} d\phi' \int_0^1 du' - \int_0^{2\pi} d\phi' \int_{-1}^0 du'\right) \frac{a(r^2-a^2)}{(r^2+a^2-2ar\cos\gamma)^{3/2}} \qquad (2.144)$$

Denna integral är inte enkel att utföra, eftersom γ beror på alla vinklar $\phi, \phi', \theta, \theta'$.

$$\varphi(\mathbf{r}) = \frac{\varphi_0}{4\pi}\left(\int_0^{2\pi} d\phi' \int_0^1 du' - \int_0^{2\pi} d\phi' \int_{-1}^0 du'\right) \frac{a(r^2-a^2)}{(r^2+a^2-2ar\cos\gamma)^{3/2}} \qquad (2.144)$$

Denna integral är inte enkel att utföra, eftersom γ beror på alla vinklar $\phi, \phi', \theta, \theta'$.

Specialfall: $\mathbf{r}$ är på den positiva z-axeln. Då gäller $\cos\gamma \equiv \widehat{\mathbf{r}}' \cdot \widehat{\mathbf{r}} = \widehat{\mathbf{r}}' \cdot \widehat{\mathbf{z}} = \cos\theta'$ och $r = z$.

$$\varphi(\mathbf{r}) = \frac{\varphi_0}{4\pi}\left(\int_0^{2\pi} d\phi' \int_0^1 du' - \int_0^{2\pi} d\phi' \int_{-1}^0 du'\right) \frac{a(z^2-a^2)}{(z^2+a^2-2az\cos\theta')^{3/2}} \qquad (2.145)$$

$$\varphi(\mathbf{r}) = \frac{\varphi_0}{2}\left(\int_0^1 du' - \int_{-1}^0 du'\right) \frac{a(z^2-a^2)}{(z^2+a^2-2azu')^{3/2}} \qquad (2.146)$$

$$\varphi(\mathbf{r}) = \frac{\varphi_0}{4\pi}\left(\int_0^{2\pi} d\phi' \int_0^1 du' - \int_0^{2\pi} d\phi' \int_{-1}^0 du'\right) \frac{a(r^2-a^2)}{(r^2+a^2-2ar\cos\gamma)^{3/2}} \qquad (2.144)$$

Denna integral är inte enkel att utföra, eftersom γ beror på alla vinklar $\phi, \phi', \theta, \theta'$.

Specialfall: $\mathbf{r}$ är på den positiva z-axeln. Då gäller $\cos\gamma \equiv \widehat{\mathbf{r}}' \cdot \widehat{\mathbf{r}} = \widehat{\mathbf{r}}' \cdot \widehat{\mathbf{z}} = \cos\theta'$ och $r = z$.

$$\varphi(\mathbf{r}) = \frac{\varphi_0}{4\pi}\left(\int_0^{2\pi} d\phi' \int_0^1 du' - \int_0^{2\pi} d\phi' \int_{-1}^0 du'\right) \frac{a(z^2-a^2)}{(z^2+a^2-2az\cos\theta')^{3/2}} \qquad (2.145)$$

$$\varphi(\mathbf{r}) = \frac{\varphi_0}{2}\left(\int_0^1 du' - \int_{-1}^0 du'\right) \frac{a(z^2-a^2)}{(z^2+a^2-2azu')^{3/2}} \qquad (2.146)$$

Slutsvaret ska bli

$$\varphi(\mathbf{r}) = \varphi_0\left(1 - \frac{z^2-a^2}{z\sqrt{z^2+a^2}}\right) \qquad (2.147)$$

Obs: För $z = a$ fås $\varphi = \varphi_0$ som väntat. □

2.10. Lösning av Poissons ekvation

Poissons ekvation är ju

$$\nabla^2 \varphi(\mathbf{r}) = -\frac{\rho(\mathbf{r})}{\varepsilon_0} \tag{2.148}$$

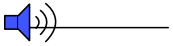
Vi har två möjliga situationer.

2.10. Lösning av Poissons ekvation

Poissons ekvation är ju

$$\nabla^2 \varphi(\mathbf{r}) = -\frac{\rho(\mathbf{r})}{\varepsilon_0} \tag{2.148}$$

Vi har två möjliga situationer.



Situation 1

Laddningstätheten $\rho(\mathbf{r})$ ger den fullständiga fördelningen i volymen av intresse, d.v.s. givna laddningar och inducerade laddningar:

$$\rho(\mathbf{r}) = \rho_{\text{ext}}(\mathbf{r}) + \rho_{\text{ind}}(\mathbf{r}) \tag{2.149}$$

Lösningen till Poissons ekvation är då

$$\varphi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int_V dV' \frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \tag{2.150}$$

2.10. Lösning av Poissons ekvation

Poissons ekvation är ju

$$\nabla^2 \varphi(\mathbf{r}) = -\frac{\rho(\mathbf{r})}{\varepsilon_0} \tag{2.148}$$

Vi har två möjliga situationer.

Situation 1

Laddningstätheten $\rho(\mathbf{r})$ ger den fullständiga fördelningen i volymen av intresse, d.v.s. givna laddningar och inducerade laddningar:

$$\rho(\mathbf{r}) = \rho_{\text{ext}}(\mathbf{r}) + \rho_{\text{ind}}(\mathbf{r}) \tag{2.149}$$

Lösningen till Poissons ekvation är då

$$\varphi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int_V dV' \frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \tag{2.150}$$

Exempel :

Antag vi har en radiell symmetrisk laddningsfördelning, $\rho = \rho(r)$. Vi har nu Poissons ekvation i

den enkla formen

$$\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{d\varphi}{dr}\right) = -\frac{1}{\varepsilon_0}\rho(r) \tag{2.151}$$

Detta ger

$$\varphi(r) = -\frac{1}{\varepsilon_0}\int_{r_0}^{r} dr' \frac{1}{r'^2}\int_{r_0'}^{r'} dr''\rho(r'')r''^2 \tag{2.152}$$

den enkla formen

$$\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{d\varphi}{dr}\right) = -\frac{1}{\varepsilon_0}\rho(r) \tag{2.151}$$

Detta ger

$$\varphi(r) = -\frac{1}{\varepsilon_0}\int_{r_0}^{r} dr' \frac{1}{r'^2}\int_{r_0'}^{r'} dr''\rho(r'')r''^2 \tag{2.152}$$

Situation 2

I det andra faller innehåller $\rho(\mathbf{r})$ inte inducerad laddning, utan enbart den **externa** laddningen, d.v.s. den som vi har kvar efter att alla ledare (innehållande inducerad laddning) har plockats bort:

$$\rho(\mathbf{r}) = \rho_{\text{ext}}(\mathbf{r}) \tag{2.153}$$

Vi söker nu två lösningar. Den första lösningen $\varphi'(\mathbf{r})$ ges av Poissons ekvation med laddningstätheten $\rho_{\text{ext}}(\mathbf{r})$. Vi löser alltså ekvationen

$$\nabla^2\varphi'(\mathbf{r}) = -\frac{\rho_{\text{ext}}(\mathbf{r})}{\varepsilon_0} \tag{2.154}$$

eller utför integralen

$$\varphi'(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_V dV' \frac{\rho_{\text{ext}}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} \tag{2.155}$$

Den andra lösningen $\varphi''(\mathbf{r})$ får vi med Laplaces ekvation:



$$\nabla^2\varphi''(\mathbf{r}) = 0 \tag{2.156}$$

Utifrån $\varphi''(\mathbf{r})$ kan vi ju bestämma den inducerade laddningen på ledarnas ytor.

$$\varphi'(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_V dV' \frac{\rho_{\text{ext}}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} \tag{2.155}$$

Den andra lösningen $\varphi''(\mathbf{r})$ får vi med Laplaces ekvation:

$$\nabla^2\varphi''(\mathbf{r}) = 0 \tag{2.156}$$

Utifrån $\varphi''(\mathbf{r})$ kan vi ju bestämma den inducerade laddningen på ledarnas ytor.

Den totala lösningen är nu

$$\varphi(\mathbf{r}) = \varphi'(\mathbf{r}) + \varphi''(\mathbf{r}) \tag{2.157}$$

Obs: Randvillkoren, t.ex. i ett Dirichlet-problem, är nu givna för $\varphi_{A_i} = \varphi'_{A_i} + \varphi''_{A_i}$, så randvillkoren för φ''_{A_i} (lösningen från Laplace-ekvationen) måste modifieras därefter!