17. Elektrodynamik och den speciella relativitetsteorin

[RMC 12; Jackson 11, Riskas anteckningar]

17.1. Historisk överblick

Det har redan flera gånger under kursen dykt upp ekvationer som baserar sig på Maxwells ekvationer, men liknar förbluffande mycket ekvationer i den speciella relativitetsteorin. Detta är *inte* en slump. Orsaken är att de två teorierna hänger nära ihop, och att i själva verket historiskt sett var det det elektrodynamiken som *ledde* till den speciella relativetsteorin.

I det följande ges det en översikt över hur detta skedde.

Kring år 1900 var den klassiska elektrodynamikens alla huvuddrag utvecklade, såsom beskrivits tidigare under denna kurs. En av de centrala dragena var ju insikten att Maxwells ekvationer leder till en vågekvation, som beskriver vågor som fortskrider i vakuum med hastigheten

$$c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} \tag{17.1}$$

Då normala vågor (till på havet eller i luften) ju som känt rör sig i ett väldefinierat material, ledde beskrivning av vågor i vakuum till hypotesen att universum innehåller ett medium, "etern", som finns överallt och vars vibrationer möjliggör de elektromagnetiska vågornas framskridning i det.

Eterhypotesen i sin tur leder till att det finns en unik referensfram, den där etern är i vila (stationärt).

Den andra centrala teorin på 1800-talet var ju Newtons mekanik. För den gäller att rörelseekvationerna är oförändrade under Galilei-transformationen. Detta kan uttryckas så att

vi har två koordinatsystem, ett i vila och ett annat som rör sig med den konstanta hastigheten u.

Om vi väljer koordinataxlarna i det ena systemet så att u är i riktningen x, säger Galileitransformatinen att koordinaterna och tiden i det rörliga systemet $'$ (prim) beror på det i det orörliga som

$$x' = x - ut \tag{17.2}$$

$$y' = y \tag{17.3}$$

$$z' = z \tag{17.4}$$

$$t' = t \tag{17.5}$$

$$\tag{17.6}$$

Maxwell-ekvationerna leder som sagt till vågekvationen. Då är en naturligt fråga huruvida vågekvationen

$$\nabla^2\phi = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\phi}{t^2} \tag{17.7}$$

är invariant under Galilei-transformationen?

Det är enkelt att visa att den *inte* är det. Om man t.ex. ersätter tidsderivatan med den i det primade systemet (beaktande bara de transformerande x och t-riktningarna):

$$\frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial x'}{\partial t}\frac{\partial}{\partial x'} + \frac{\partial t'}{\partial t}\frac{\partial}{\partial t'} = u\frac{\partial}{\partial x'} + \frac{\partial}{\partial t'} \tag{17.8}$$

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial x'}{\partial x}\frac{\partial}{\partial x'} + \frac{\partial t'}{\partial x}\frac{\partial}{\partial t'} = \frac{\partial}{\partial x'} + \frac{\partial t}{\partial x}\frac{\partial t'}{\partial t}\frac{\partial}{\partial t'} = \frac{\partial}{\partial x'} + \frac{1}{u}\frac{\partial}{\partial t'} \tag{17.9}$$

ser man att den nya vågekvationen skulle bli (i x- och t-koordinater):

$$\left(\frac{\partial}{\partial x'} + \frac{1}{u}\frac{\partial}{\partial t'}\right)\left(\frac{\partial \phi}{\partial x'} + \frac{1}{u}\frac{\partial \phi}{\partial t'}\right) = \frac{1}{c^2}\left(u\frac{\partial}{\partial x'} + \frac{\partial}{\partial t'}\right)\left(u\frac{\partial \phi}{\partial x'} + \frac{\partial \phi}{\partial t'}\right) \tag{17.10}$$

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x'^2} + \frac{1}{u}\frac{\partial^2 \phi}{\partial x' \partial t'} + \frac{1}{u}\frac{\partial^2 \phi}{\partial t' \partial x'} + \frac{1}{u^2}\frac{\partial^2 \phi}{\partial t'^2} = \frac{1}{c^2}\left(u^2\frac{\partial^2 \phi}{\partial x'^2} + u\frac{\partial^2 \phi}{\partial x' \partial t'} + u\frac{\partial^2 \phi}{\partial t' \partial x'} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial t'^2}\right) \tag{17.11}$$

$$(1 - \frac{u^2}{c^2})\frac{\partial^2 \phi}{\partial x'^2} + (\frac{2}{u} + 2\frac{u}{c^2})\frac{\partial^2 \phi}{\partial x' \partial t'} = \left(\frac{1}{c^2} - \frac{1}{u^2}\right)\frac{\partial^2 \phi}{\partial t'^2} \tag{17.12}$$

Detta är uppenbart inte ekvivalent med den ursprungliga vågekvationen. Alltså är vågekvationen och Maxwells ekvationer inte invarianta under Galilei-transformationen, v.s.b.

Detta resultat gäller givetvis för alla andra typer av vågor också, t.ex. havsvågor och ljudvågor. Men för dessa är det klart vad det stationära mediet är: materialet (t.ex. vatten eller luft) där vågorna rör sig, vars inre beståndsdelar har massa och antogs följa mekanikens lagar och därmed Galilei-transformation. Därmed fanns det inget problem med att själva vågekvationen inte följer det.

För elektromagnetiska vågor som kan fortskrida i vakuum postulerade man alltså etern som det analoga mediet.

I slutet av 1800-talet fanns det flera olika möjligheter för hur etern och Maxwell-ekvationerna skulle förhålla sig gentemot Galilei-transformationen:

1. Maxwells ekvationer är fel, och den korrekta teorin för elektromagnetism är invariant under Galilei-transformationen.

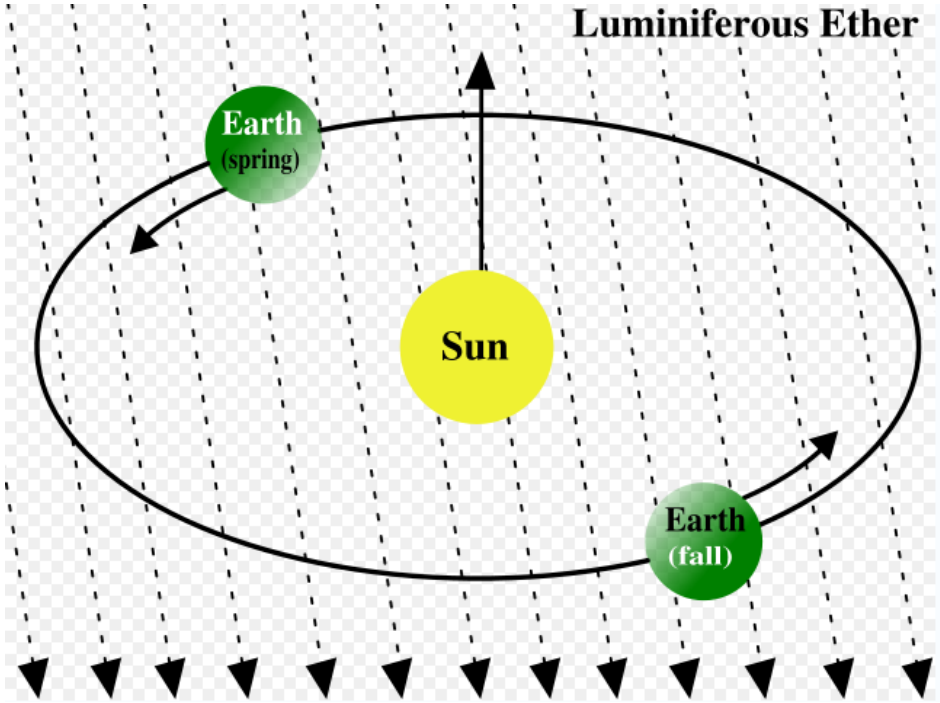
2. Det finns en unik föredragen referensram, den där etern är i vila. Maxwells ekvationer kräver modifikation i andra ramer.

3. Maxwells ekvationer är samma i alla referens-ramer som rör sig med en konstant hastighet gentemot varandra. Galilei-transformationen gäller inte.

Av dessa verkade alternativ **1** högst osannolik, då Maxwells ekvationer redan på 1800-talet hade testats extensivt experimentellt.

Alternativ **2** kunde testas experimentellt. Detta gjordes i flera experiment.

Ifall etern skulle existera, skulle den rimligtvis vara universell och oberoende av solsystemet. Då skulle jorden och solsystemet utsättas för en "etervind" då de rör sig runt galaxens centrum (se bilden intill). Detta skulle innebära att då man mäter elektrodynamiska vågor på jorden, borde de vara i rörelse då jorden ju rör sig med avseende på etern! Alltså om man skulle mäta t.ex. ljusets hastighet, borde den vara olika i olika riktningar!



[Wikimedia commons]

Michelson-Morley-experimentet (1887) gjorde just detta. Men de fann inget experimentellt bevis för etervinden: ljusets hastighet var samma i alla riktningar.

Detta ensamt räckte inte till att döda 'etern', för man kunde ju anta att etern på något sätt dras med jorden eller andra fysiska medium. Men tidigare experiment av Fizeau (1859) hade redan visat att ljusets hastighet påverkas delvis av ett fysiskt mediums (vatten ursprungligen) rörelse. Experiment på stjärnornas s.k. aberration, alltså att deras position verkar ändras litet under årets lopp propertionerligt mot v/c skulle inte vara konsistent med att etern dras med jorden.

Tillsammans ledde dessa experiment redan mot slutet av 1800-talet till att att eterns existens

kunde vara konsistent med Maxwells elektrodynamik bara om man tog till mycket komplicerade antaganden om eterns egenskaper.

Därmed kvarstod alltså bara alternativ 3, men den var också mycket radikal i.o.m. att den innebär att Newtons mekanik inte kan gälla allmänt, och också Newtons mekanik var ju extremt vältestad.

17.1.1. Lorentztransformationen

År 1904 upptäckte H. A. Lorentz en transformation som håller formen av Maxwells ekvationer oförändrade! Den är, under samma antagande som ovan för Galileitransformationen om att de två koordinatsystem rör sig i förhållande till varandra i x-riktningen med hastigheten u:

$$x' = \frac{1}{\sqrt{1-u^2/c^2}}(x-ut) \tag{17.13}$$

$$y' = y \tag{17.14}$$

$$z' = z \tag{17.15}$$

$$t' = \frac{1}{\sqrt{1-u^2/c^2}}\left(t-\frac{u}{c^2}x\right) \tag{17.16}$$

$$\tag{17.17}$$

Dessa har uppenbart egenskapen att ifall $u << c$, reduceras de tillbaks till Galilei-transformationen. Som sagt var Newtons mekanik vältestad, men bara för hastigheter mycket mindre än ljusets. Därmed kunde dessa användas också för klassisk mekanik utan att det stridde mot empiriska fakta.

Vi skall inte visa explicit att Lorentz-transformationen håller Maxwells ekvationer oförändrade, man tillämpar dem som ovan på vågekvationen med transformation av x och t:

$$\frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial x'}{\partial t}\frac{\partial}{\partial x'} + \frac{\partial t'}{\partial t}\frac{\partial}{\partial t'} \tag{17.18}$$

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial x'}{\partial x}\frac{\partial}{\partial x'} + \frac{\partial t'}{\partial x}\frac{\partial}{\partial t'} \tag{17.19}$$

Vi inför (igen, jfr. kapitel 15) beteckningen

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} \tag{17.20}$$

samt $\beta = u/c$.

De partiella derivatorna som behövs blir

$$\begin{aligned}
\frac{\partial x'}{\partial x} &= \gamma \\
\frac{\partial t'}{\partial x} &= -\frac{u}{c^2}\gamma \\
\frac{\partial x'}{\partial t} &= -u\gamma
\end{aligned}$$

$$\frac{\partial t'}{\partial t} = \gamma$$

och man får för de dubbla derivatorna

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} = \left(\gamma\frac{\partial}{\partial x'} - \frac{u}{c^2}\gamma\frac{\partial}{\partial t'}\right)\left(\gamma\frac{\partial\phi}{\partial x'} - \frac{u}{c^2}\gamma\frac{\partial\phi}{\partial t'}\right) = \gamma^2\frac{\partial^2\phi}{\partial x'^2} - \gamma^2\frac{u}{c^2}\frac{\partial^2\phi}{\partial x'\partial t'} - \gamma^2\frac{u}{c^2}\frac{\partial^2\phi}{\partial t'\partial x'} + \gamma^2\frac{u^2}{c^4}\frac{\partial^2\phi}{\partial t'^2} \tag{17.21}$$

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} = \left(-u\gamma\frac{\partial}{\partial x'} + \gamma\frac{\partial}{\partial t'}\right)\left(-u\gamma\frac{\partial\phi}{\partial x'} + \gamma\frac{\partial\phi}{\partial t'}\right) = \frac{u^2}{c^2}\gamma^2\frac{\partial^2\phi}{\partial x'^2} - \gamma^2\frac{u}{c^2}\frac{\partial^2\phi}{\partial x'\partial t'} - \gamma^2\frac{u}{c^2}\frac{\partial^2\phi}{\partial t'\partial x'} + \gamma^2 \tag{17.22}$$

Då man sätter in dessa två i vågekvationen kancellerar de blandade derivatorna omdelebart. Kvar blir då man flytter över x'-derivatorna på ena sidan och t' på andra:

$$\gamma^2\frac{\partial^2\phi}{\partial x'^2} - \frac{u^2}{c^2}\gamma^2\frac{\partial^2\phi}{\partial x'^2} = -\gamma^2\frac{u^2}{c^4}\frac{\partial^2\phi}{\partial t'^2} + \gamma^2\frac{1}{c^c}\frac{\partial^2\phi}{\partial t'^2} \tag{17.23}$$

$$\gamma^2\left(1 - \frac{u^2}{c^2}\right)\frac{\partial^2\phi}{\partial x'^2} = \frac{1}{c^2}\gamma^2\left(1 - \frac{u^2}{c^2}\right)\frac{\partial^2\phi}{\partial t'^2} \tag{17.24}$$

och med beaktande av att $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-u^2/c^2}}$ får man

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial x'^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\phi}{\partial t'^2} \tag{17.25}$$

d.v.s. den ursprungliga vågekvationen! $\square$.

17.2. Den speciella relativitetsteorin

17.3. Poincarés och Einsteins postulat

Lorentz upptäckte allså transformationen ovan, men han insåg inte dess vidare betydelse, utan försökte göra den kompatibel med eter-hypotesen.

Det var H. Poincaré som först insåg att Michelson-Morley-experimentet kunde ha en bredare betydelse. Han formulerade år 1899 **relativitetsprincipen** som att absolut rörelse inte kan observaras av laboratorieexperiment på något sätt, och att detta implicerar att naturlagarna måste vara de samma för två observatörer i relativ rörelse till varandra.

Han kom också fram till att en ny dynamik måsta formuleras, och att denna bör innehålla villkoret att ingen hastighet kan överstiga ljushastigheten.

År 1905 publicerade sedan A. Einstein den speciella relativitetsteorin i sitt papper som hade titteln "Zur Elektrodynamik bewegter Körper" (Annalen der Physik 17: 891-921) - notera alltså att titteln på pappern hänvisar direkt till elektrodynamik!

Han framförde två postulat, av vilka den första är Poincarés relativitetsprincip. De är:

1. Naturens lagar är samma i alla koordinatsystem som rör sig med en likformigt med avseenda av varandra

2. Ljushastigheten i vakuum är samma i alla referenssystem och oberoende av ljuskällans hastighet.

Relativitetspostulaten förutsätter att kombinationen $c^2t^2 - r^2$ har samma värde i alla sådana koordinatsystem - inertialsystem - som rör sig med konstant hastighet i förhållande till varandra. Från detta krav kan man härleda Lorentz-transformationen (som gavs ovan) mellan en punkts koordinater i olika inertialsystem.

Utom det historiska sambandet, är det också intressant att notera att den klassiska elektrodynamiken kan skrivas i en matematiskt kompakt form med hjälp av samma notation som används i relativitetsteori. Vi går nu igenom huvuddragen i detta.

17.3.1. Fyr-vektorer och tensorer

4-vektorer i relativitetsteorin definieras som sådana grupper av 4-storheter $(A^0,\ A^1,\ A^2,\ A^3)$ som transformeras på samma sätt som koordinaterna $(x^0,\ x^1,\ x^2,\ x^3)$ vid Lorentz-transformationer.

$$\boldsymbol{A}' = \boldsymbol{A} + (\gamma - 1)(\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{\beta})\hat{\beta} - \gamma\boldsymbol{\beta}A^0 \tag{17.26}$$

$$A'^0 = \gamma\{A^0 - \boldsymbol{\beta} \cdot \boldsymbol{A}\} \tag{17.27}$$

4-vektorernas längd:

$$A \cdot A = (A^0)^2 - (A^1)^2 - (A^2)^2 - (A^3)^2 \tag{17.28}$$

4-vektor-rymden (Minkowski-rymden) är inte Euklidisk!

Fyrvektorer och tensorer brukar ofta betecknas oich behandlas med s.k. **kontravariant notation**

där (fyr)vektorer betecknas med överindex:

$$x^\mu \equiv (x^0, x^1, x^2, x^3) \tag{17.29}$$

Det vanligaste exemplet är (ct, x, y, z).

Lorentz-transformationen kan beskrivas i det allmänna fallet med en fyrmatris som

$$x'^\mu = \sum_{\nu=1}^{4} \Lambda^\mu_\nu x^\nu \tag{17.30}$$

där Λ är

$$\Lambda^\mu_\nu = \begin{pmatrix} \Lambda^0_0 & \Lambda^0_1 & \Lambda^0_2 & \Lambda^0_3 \\ \Lambda^1_0 & \Lambda^1_1 & \Lambda^1_2 & \Lambda^1_3 \\ \Lambda^2_0 & \Lambda^2_1 & \Lambda^2_2 & \Lambda^2_3 \\ \Lambda^3_0 & \Lambda^3_1 & \Lambda^3_2 & \Lambda^3_3 \end{pmatrix} \tag{17.31}$$

Exempel: Lorentz-transformationen som gavs ovan för x och t kan skrivas

$$x'^0 = \gamma(x^0 - \beta x^1) \tag{17.32}$$
$$x'^1 = \gamma(x^1 - \beta x^0) \tag{17.33}$$
$$x'^2 = x^2 \tag{17.34}$$
$$x'^3 = x^3 \tag{17.35}$$

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{17.36}$$

För att ytterligare förenkla notationen används för tensorer ofta den s.k. **summeringskonventionen** där repeterade index summeras:

$$x'^{\mu} = \sum_{\nu=1}^{4} \Lambda^{\mu}_{\nu} x^{\nu} \equiv \Lambda^{\mu}_{\nu} x^{\nu} \tag{17.37}$$

Det upprepade indexet ν är summerat. Mer allmänt gäller att alla index där en är nere och den andra uppe summeras.

Kontravarianta och kovarianta vektorer

Definiera en **kovariant** 4-vektor

$$A_{\mu} \equiv (A_0, A_1, A_2, A_3) \tag{17.38}$$

$$A_0 = A^0 \tag{17.39}$$

$$A_1 = -A^1 \tag{17.40}$$

$$A_2 = -A^2 \tag{17.41}$$

$$A_3 = -A^3 \tag{17.42}$$

komponenter av en normal eller **kontravariant** 4-vektor

A^μ : kontravariant

A_μ : kovariant

Den invarianta skalärprodukten är

$$A \cdot A = (A^0)^2 - A^2 = A_\mu A^\mu = A^\mu A_\mu \tag{17.43}$$

$$A \cdot B = A_\mu B^\mu = A^\mu B_\mu \tag{17.44}$$

Tensorer

A^μ är en kontravariant 4-vektor om dess komponenter transformeras på samma sätt som koordinaterna för radiusvektorn $(ct, \boldsymbol{r})$ vid Lorentz-transformationer.

$$A'^\mu = \Lambda^\mu_\nu A^\nu \tag{17.45}$$

En kombination av 16-storheter $A^{\mu\nu}$ är en **tensor av rang 2** om den transformeras som en kontravariant 4-vektor med avseende på bägge indexen.

$$A'^{\mu\nu} = \Lambda^\mu_\alpha \Lambda^\nu_\beta A^{\alpha\beta} \tag{17.46}$$

Om $A^{\mu\nu} = A^{\nu\mu}$ är tensorn symmetrisk och har blott

$\frac{16-4}{2} + 4 = 10$ oberoende komponenter

Om $A^{\mu\nu} = -A^{\nu\mu}$ är tensorn antisymmetrisk och har

$\frac{16-4}{2} = 6$ oberoende komponenter (diagonalelementen måste ju vara $= 0$)

$A^{\mu\nu}$ kontravariant tensor

$A_{\mu\nu}$ kovariant tensor

A^{μ}_{ν} blandad tensor

$A_\mu B^\mu =$ skalär $=$ tensor av rang 0

$A^\mu B^\nu = T^{\mu\nu} =$ kontravariant tensor av rang 2

$A_\mu B^{\nu\mu} = T^\nu =$ kontravariant vektor bildad av en vektor och en 2 rang's tensor

$A_\mu B^{\nu\delta} = T^{\nu\delta}_{\mu} =$ tensor av rang 3.

Speciella tensorer:

δ: Kronecker's symbol

$$\delta^\mu_\nu = \begin{cases} 0 & \mu \neq \nu \\ 1 & \mu = \nu \end{cases} \tag{17.47}$$

$$\delta^\mu_\nu A^\nu = A^\mu \tag{17.48}$$

$$\delta^\mu_\nu = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{17.49}$$

Den metriska tensorn g

Den metriska tensorn g åstadkommes genom att höja ett index i δ^μ_ν

$$g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{17.50}$$

$g^{\mu\nu}$ tjänar som operator för att göra en kontravariant tensor av en kovariant:

$$g^{\mu\nu} A_\nu = A^\mu \quad (!) \tag{17.51}$$

Definiera $g_{\mu\nu}$ så att $g_{\mu\nu} = g^{\mu\nu}$;

Då fungerar $g_{\mu\nu}$ som operator för att sänka index:

$$A_\mu = g_{\mu\nu} A^\nu \tag{17.52}$$

$$g_{\mu\alpha} g^{\alpha\nu} = \delta^\nu_\mu \tag{17.53}$$

Skalärprodukten och den metriska tensorn

$$A^\mu B_\mu = A^\mu g_{\mu\nu} B^\nu = g_{\mu\nu} A^\mu B^\nu = g_{\mu\nu} A^\nu B^\nu \tag{17.54}$$

$$A^2 = A \cdot A = A_\mu A^\mu = g_{\mu\nu} A^\mu A^\nu \tag{17.55}$$

Den metriska tensorn representerar regeln för skalärprodukten eller längdmåttet.

Då Lorentz-transformationen lämnar skalärprodukten invariant har g samma komponenter i **alla** koordinatsystem.

$$x'^\mu x'_\mu = x^\mu x_\mu = g'_{\mu\nu} x'^\mu x'^\nu = g_{\mu\nu} x^\mu x^\nu \tag{17.56}$$

$$= (x'^2)^2 - (x'^1)^2 - (x'^2)^2 - (x'^3)^2 \tag{17.57}$$

$$= (x^0)^2 - (x^1)^2 - (x^2)^2 - (x^3)^2 \tag{17.58}$$

Transformationslagen för kovarianta vektorer

$$A'^\mu = \Lambda^\mu_\nu A^\nu \tag{17.59}$$

$$A'_\mu = g'_{\mu\nu} A'^\nu = g'_{\mu\nu} \Lambda^\nu_\beta A^\beta \tag{17.60}$$

$$= g'_{\mu\nu} \Lambda^\nu_\beta g^{\beta\alpha} A_\alpha \tag{17.61}$$

För kovarianta vektorer vill vi skriva

$$A'_\mu = \tilde{\Lambda}^\alpha_\mu A_\alpha \tag{17.62}$$

så man ser att

$$\tilde{\Lambda}^{\alpha}_{\mu} = g_{\mu\nu}\Lambda^{\nu}_{\beta}g^{\beta\alpha} \tag{17.63}$$

Transformationen $\tilde{\Lambda}$ fås genom att transponera Λ och ändra tecken på de blandade rums och tidskomponenterna:

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \Lambda^0_0 & \Lambda^0_1 & \Lambda^0_2 & \Lambda^0_3 \\ \Lambda^1_0 & \Lambda^1_1 & \Lambda^1_2 & \Lambda^1_3 \\ \Lambda^2_0 & \Lambda^2_1 & \Lambda^2_2 & \Lambda^2_3 \\ \Lambda^3_0 & \Lambda^3_1 & \Lambda^3_2 & \Lambda^3_3 \end{pmatrix} \quad \Longrightarrow \quad \tilde{\Lambda} = \begin{pmatrix} \Lambda^0_0 & -\Lambda^1_0 & -\Lambda^2_0 & -\Lambda^3_0 \\ -\Lambda^0_1 & \Lambda^1_1 & \Lambda^2_1 & \Lambda^3_1 \\ -\Lambda^0_2 & \Lambda^1_2 & \Lambda^2_2 & \Lambda^3_2 \\ -\Lambda^0_3 & \Lambda^1_3 & \Lambda^2_3 & \Lambda^3_3 \end{pmatrix} \tag{17.64}$$

Lorentz-transformationens ortogonalitet

$$x'^{\mu}x'_{\mu} = x^{\mu}x_{\mu} = \Lambda^{\mu}_{\alpha}\tilde{\Lambda}^{\beta}_{\mu}x^{\alpha}x_{\beta} = x^{\mu}x_{\mu} \tag{17.65}$$

ty man kan visa att

$$\Lambda^{\mu}_{\alpha}\tilde{\Lambda}^{\beta}_{\mu} = \delta^{\beta}_{\alpha} \tag{17.66}$$

(exempel på det senare:

$$\begin{pmatrix} \gamma & \beta\gamma & 0 & 0 \\ \beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{17.67}$$

$$= \begin{pmatrix} \gamma^2 - \beta^2\gamma^2 & -\gamma^2\beta + \beta\gamma^2 & 0 & 0 \\ \beta\gamma^2 - \beta\gamma^2 & -\beta^2\gamma^2 + \gamma^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{17.68}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{17.69}$$

för att $\gamma^2 = \frac{1}{1-\beta^2}$ så diagonalelementen $= 1$.

Gradientvektorn

$$\frac{\partial}{\partial x^\alpha} \equiv (\frac{\partial}{c\partial t};\ \boldsymbol{\nabla}) \tag{17.70}$$

$$\frac{\partial}{\partial x'^\alpha} = (\frac{\partial x^\beta}{\partial x'^\alpha})\frac{\partial}{\partial x^\beta} \tag{17.71}$$

$$x'^\alpha = \Lambda^\alpha_\nu x^\nu \tag{17.72}$$

$$\Longrightarrow \tilde{\Lambda}_\alpha x'^\alpha = \underbrace{\tilde{\Lambda}^\mu_\alpha \Lambda^\mu_\nu}_{\delta^\mu_\nu} x^\nu = x^\mu \tag{17.73}$$

$$x^\beta = \tilde{\Lambda}^\beta_\alpha x'^\alpha \tag{17.74}$$

$$\frac{\partial x^\beta}{\partial x'^\alpha} = \tilde{\Lambda}^\beta_\alpha \Longrightarrow \frac{\partial}{\partial x'^\alpha} = \tilde{\Lambda}^\beta_\alpha \frac{\partial}{\partial x^\beta} \tag{17.75}$$

Gradientvektorn transformeras som en **kovariant** vektor!

Notation: $\partial_\alpha \equiv \frac{\partial}{\partial x^\alpha} = (\frac{\partial}{c\partial t};\ \boldsymbol{\nabla})$

$$\partial^\alpha = g^{\alpha\beta}\partial_\beta \equiv \frac{\partial}{\partial x_\alpha} = (\frac{\partial}{c\partial t};\ -\boldsymbol{\nabla}) \tag{17.76}$$

$$\partial_\alpha A^\alpha = \frac{\partial}{c\partial t}A^0 + \boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{A} \tag{17.77}$$

$$\partial^\alpha = (\frac{\partial}{c\partial t};\ -\boldsymbol{\nabla}) \tag{17.78}$$

$$\partial_\alpha\partial^\alpha = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2 \tag{17.79}$$

Detta är differentialoperatorn för vågekvationen, som är Lorentz-invariant

17.3.2. Elektrodynamiken i kovariant form

Nu kan vi använda notationerna som introduceras till att skriva om elektrpodynamiken!

Kontinuitetsekvationen:

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{j} = 0 \tag{17.80}$$

Vi konstruerar en 4-strömtäthetsvektor j^α:

$$j^\alpha = (c\rho,\ \boldsymbol{j}) \tag{17.81}$$

Kontinuitetsekvationen blir då

$$\partial_\alpha j^\alpha = (\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t},\ \boldsymbol{\nabla})(c\rho, \boldsymbol{j}) = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{j} = 0 \tag{17.82}$$

alltså:

$$\boxed{\partial_\alpha j^\alpha = 0 \qquad (17.83)}$$

j är en 4-vektor, dvs. j transformeras som x^α, ty

- $\boldsymbol{j}$ är en 3-vektor

- $\rho d^3r = \rho' d^3r'$ är en invariant som representerar laddningen i ett volymelement

- $dx^0 d^3r =$ är ett Lorentz-invariant volymelement

$$dx^0 d^3r' = \frac{\partial(x'^0, ..dx'^3)}{\partial(x^0, ..dx^3)}, \quad dx^0..dx^3 \tag{17.84}$$

$$= \underbrace{det(\Lambda)}_{+1}\underbrace{dx^0..dx^3}_{dx^0 d^3r} \tag{17.85}$$

det $(\Lambda) = +1$ för en "proper" Lorentz-transformation.

$$A'^\mu = \Lambda^\mu_\nu A^\nu \quad \tilde{\Lambda}^\nu_\mu = g_{\mu\alpha} g^{\nu\beta}\Lambda^\alpha_\beta \tag{17.86}$$

$$A'_\mu = \tilde{\Lambda}^\nu_\mu A_\nu \tag{17.87}$$

$$\tilde{\Lambda}^{\beta}_{\mu}\Lambda^{\mu}_{\alpha} = \delta^{\beta}_{\alpha} \tag{17.88}$$

$$g^{\beta\kappa} g_{\mu\nu}\Lambda^{\nu}_{\kappa}\Lambda^{\mu}_{\alpha} = \delta^{\beta}_{\alpha} \tag{17.89}$$

$$(g)_{\beta\kappa}(\Lambda^T)_{\kappa\nu}(g^T)_{\nu\mu}(\Lambda)_{\mu\alpha} = (\delta)_{\beta\alpha} \tag{17.90}$$

$$\underbrace{det(g)}_{-1}\, det(\Lambda^T)\, \underbrace{det(g^T)}_{-1}\, det(\Lambda) = 1 \tag{17.91}$$

$$det(\Lambda^T) det\Lambda = 1 \tag{17.92}$$

$$(det\Lambda)^2 = 1 \quad det\Lambda = \pm 1 \tag{17.93}$$

$det\Lambda = +1$ egentliga Lorentz-transformationer (rotationer utan reflexion)

$dx^0(\rho d^3 r) \sim$ transformeras som en tidskomponent

$\rho \underbrace{dx^0 d^3}_{\text{inv.}} r \sim$ transformeras som en tidskomponent

$\rho \sim$ transformeras som en tidskomponent!

$j^\alpha = (\rho, \boldsymbol{j})$: 4-vektor!

Laddningskonservering:

$$Q = \int d^3 r \rho = \frac{1}{c}\int d^3 r j^0 \tag{17.94}$$

$$\frac{dQ}{dt} = \frac{1}{c}\int d^3 r \frac{d^0_j}{dt} = \int d^3 r \frac{dj^0}{dx^0} \tag{17.95}$$

$$= -\int d^3 r \boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{j} = -\oint d\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{j} \tag{17.96}$$

$= 0$ för en lokaliserad laddning!

Vågekvationerna i Lorentz-måttet

Vi hade ju vågekvationerna för vektorpotentialen $\boldsymbol{A}$ samt skalärpotentialen ϕ:

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \boldsymbol{A}}{\partial t^2} - \boldsymbol{\nabla}^2 \boldsymbol{A} = \mu_0 \boldsymbol{j} \tag{17.97}$$

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} - \nabla^2 \phi = \frac{\rho}{\epsilon_0} \tag{17.98}$$

Lorentz-villkoret ger: $\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{A} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial \phi}{\partial t} = 0$

Vi definierar nu en "fyr-version" av ∇:

$$\Box \equiv \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \boldsymbol{\nabla}^2 = \partial_\alpha \partial^\alpha \tag{17.99}$$

som kallas "box" eller d'Alemberts operator. Med den kan man skriva:

$$\Box \boldsymbol{A} = \mu_0 \boldsymbol{j} \tag{17.100}$$

$$\Box \phi = \frac{\rho}{\epsilon_0} = \frac{j^0}{c\epsilon_0} \tag{17.101}$$

eller lite omskrivet:

$$\Box \boldsymbol{A} = \mu_0 \boldsymbol{j} \tag{17.102}$$

$$\Box(\frac{\phi}{c}) = \frac{1}{c^2\epsilon_0} j^0 = \mu_0 j^0 \tag{17.103}$$

Om vi nu summerar dessa två ekvationer, ser man att de högra membrum bildar en 4-vektor $\mu_0 j^\alpha$. Då måste vänstra membrum också bilda en 4-vektor, vilket ger oss en naturlig definition:

$$A^\alpha \equiv (\frac{1}{c}\phi,\ \boldsymbol{A}) \tag{17.104}$$

Lorentz-villkoret blir

$$\partial_\alpha A^\alpha = 0 = \boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{A} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial \phi}{\partial t^2} \tag{17.105}$$

Vågekvationen för A^α blir

$$\boxed{\Box A^\alpha = \mu_0 j^\alpha \qquad (17.106)}$$

De elektriska och magnetiska fälten

$$\boldsymbol{E} = -\nabla\phi - \frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t} = -\nabla(cA^0) - \frac{\partial}{\partial x_0}(c\boldsymbol{A}) \tag{17.107}$$

$$\boldsymbol{B} = \nabla \times \boldsymbol{A}, \quad \partial_\alpha = (\frac{\partial}{c\partial t}, \boldsymbol{\nabla}) \tag{17.108}$$

$$\partial^\alpha = (\frac{\partial}{c\partial t}, -\boldsymbol{\nabla}) \tag{17.109}$$

Ur dessa ser man att komponenterna för el- och magnetvektorerna kan skrivas som

$$
\begin{aligned}
E_x &= -c\partial^0 A^1 + c\partial^1 A^0 && (17.110)\\
E_y &= -c\partial^0 A^2 + c\partial^2 A^0 && (17.111)\\
E_z &= -c\partial^0 A^3 + c\partial^3 A^0 && (17.112)\\
B_x &= -(\partial^2 A^3 - \partial^3 A^2) && (17.113)\\
B_y &= -(\partial^3 A^1 - \partial^1 A^3) && (17.114)\\
B_z &= -(\partial^1 A^2 - \partial^2 A^1) && (17.115)\\
& && (17.116)
\end{aligned}
$$

så man ser att $\frac{\boldsymbol{E}}{c}$ och B är komponenter av tensorn $\partial^\alpha A^\beta - \partial^\beta A^\alpha$

Nu kan man definiera den elektromagnetiska fälttensorn som

$$F^{\alpha\beta} \equiv \partial^\alpha A^\beta - \partial^\beta A^\alpha \tag{17.117}$$

och samma tensor med kovarianta index är

$$F_{\alpha\beta} = g_{\alpha\mu} g_{\beta\nu} F^{\mu\nu} \tag{17.118}$$

I komponentform utskrivet är detta:

$$F^{\alpha\beta} = \begin{bmatrix} 0 & -E_x/c & -E_y/c & -E_z/c \\ E_x/c & 0 & -B_z & B_y \\ E_y/c & B_z & 0 & -B_x \\ E_z/c & -B_y & B_x & 0 \end{bmatrix} \tag{17.119}$$

$$F_{\alpha\beta} = \begin{bmatrix} 0 & E_x/c & E_y/c & E_z/c \\ -E_x/c & 0 & -B_z & B_y \\ -E_y/c & B_z & 0 & -B_x \\ -E_z/c & -B_y & B_x & 0 \end{bmatrix} \tag{17.120}$$

Definiera den 4-dimensionella Levi-Civita-symbolen som

$$\epsilon^{\alpha\beta\mu\nu} = \begin{cases} 0 & \text{om två eller flere index är lika} \\ 1 & \text{om } \alpha\beta\mu\nu \text{ är en jämn permutation av 0123} \\ -1 & \text{om } \alpha\beta\mu\nu \text{ är en udda permutation av 0123} \end{cases} \tag{17.121}$$

Den **duala** fälttensorn definieras som

$$\mathcal{F}^{\alpha\beta} = \frac{1}{2}\epsilon^{\alpha\beta\mu\nu} F_{\mu\nu} \tag{17.122}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & -B_x & -B_y & -B_z \\ B_x & 0 & E_z/c & -E_y/c \\ B_y & -E_z/c & 0 & E_x/c \\ B_z & E_y/c & -E_x/c & 0 \end{bmatrix} \tag{17.123}$$

Man ser att $E_k = cF^{k0}$.

Maxwell's ekvationer i kovariant form

Nu kan vi skriva om Maxwells ekvationer. Vi betraktar dessa i två delar:

$$\left.\begin{array}{l} \nabla \cdot \boldsymbol{E} = \rho/\epsilon_0 \\ \nabla \times \boldsymbol{H} = \boldsymbol{j} + \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t} \end{array}\right\} \quad \text{källekvationerna} \tag{17.124}$$

eller

$$\nabla \times \boldsymbol{B} = \mu_0 \boldsymbol{j} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} = \mu_0 \boldsymbol{j} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} \tag{17.125}$$

Då vi hade

$$E_k = cF^{k0} \tag{17.126}$$

får man

$$\nabla \cdot \boldsymbol{E} = c\partial_k F^{k0} = \frac{\rho}{\epsilon_0} = \frac{j^0}{c\epsilon_0} \tag{17.127}$$

$$\rightarrow \partial_k F^{k0} = \frac{1}{c^2\epsilon_0} j^0 = \mu_0 j^0 \tag{17.128}$$

Då $F^{00} = 0$ kan denna ekvation generaliseras till

$$\partial_\mu F^{\mu 0} = \mu_0 j^0 \tag{17.129}$$

Prova nu $\partial_\mu F^{\mu 1} = \mu_0 j^1$

$$= \frac{1}{c\partial t} F^{01} + \frac{\partial}{\partial x} F^{11} + \underbrace{\frac{\partial}{\partial y} \underbrace{F^{21}}_{B_z} + \frac{\partial}{\partial z} \underbrace{F^{31}}_{-B_y}}_{(\nabla \times \boldsymbol{B})x} \tag{17.130}$$

$$\rightarrow -\frac{1}{c^2} \frac{\partial E_x}{\partial t} + (\nabla \times \boldsymbol{B})_x = \mu_0 j^1 \tag{17.131}$$

Detta är x-komponenten av den allmänna ekvationen!

Källekvationerna kan alltså sammanfattas med en ekvation:

$$\boxed{\partial_\alpha F^{\alpha\beta} = \mu_0 j^\beta, \qquad (17.132)}$$

Det återstående paret av Maxwell-ekvationer är

$$\nabla \cdot \boldsymbol{B} = 0 \tag{17.133}$$

$$\nabla \times \boldsymbol{E} = +\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} \tag{17.134}$$

detta ekvationspar kan erhållas från det första med utbytena

$$j, \rho \to 0 \tag{17.135}$$

$$\boldsymbol{B} \to -\boldsymbol{E}/c \tag{17.136}$$

$$\boldsymbol{E} \to c\boldsymbol{B} \tag{17.137}$$

samma utbyte i fälttensorn F ger den duala tensorn $\mathcal{F}$!

$$F^{\alpha\beta} = \begin{bmatrix} 0 & -E_x/c & -E_y/c & -E_z/c \\ E_x/c & 0 & -B_z & B_y \\ E_y/c & B_z & 0 & B_x \\ E_z/c & -B_y & B_x & 0 \end{bmatrix} \tag{17.138}$$

$$\mathcal{F}^{\alpha\beta} = \begin{bmatrix} 0 & -B_x & -B_y - B_z & \\ B_x & 0 & E_z/c & -E_y/c \\ B_y & -E_z/c & 0 & E_x/c \\ B_z & E_y/c & -E_x/c & 0 \end{bmatrix} \tag{17.139}$$

I ekvationen

$$\partial_\alpha F^{\alpha\beta} = \mu_0 j^\beta \tag{17.140}$$

leder transformationen till

$$\boxed{\partial_\alpha \mathcal{F}^{\alpha\beta} = 0} \tag{17.141}$$

Denna ekvation sammanfattar då de återstående två Maxwell-ekvationerna!

Den sistnämnda ekvationen kan också uttryckas med F men på ett mer klumpigt sätt.

$$\mathcal{F}^{\alpha\beta} = \frac{1}{2}\epsilon^{\alpha\beta\mu\nu}F_{\mu\nu} \tag{17.142}$$

$$0 = \partial_\alpha \mathcal{F}^{\alpha\beta} = \frac{1}{2}\partial_\alpha \epsilon^{\alpha\beta\mu\nu}F_{\mu\nu} \tag{17.143}$$

$$= \frac{1}{2}\partial_\alpha \epsilon^{\alpha\beta\gamma\delta}F_{\gamma\delta} \tag{17.144}$$

$$= \frac{1}{2}\partial_\alpha \epsilon^{\alpha\beta\gamma\delta}g_{\gamma\mu}g_{\delta\nu}F^{\mu\nu} \tag{17.145}$$

$$= \frac{1}{2}\partial_\alpha \epsilon^{\alpha\beta}_{\mu\nu}F^{\mu\nu} \tag{17.146}$$

$$= \frac{1}{2}g_{\alpha\kappa}\partial^\kappa \epsilon^{\alpha\beta}_{\mu\nu}F^{\mu\nu} \tag{17.147}$$

$$= \frac{1}{2}\epsilon^{\beta}_{\kappa\mu\nu}\partial^\kappa F^{\mu\nu} \tag{17.148}$$

$$= \frac{1}{2}g^{\beta\varphi}\epsilon_{\kappa\varphi\mu\nu}\partial^\kappa F^{\mu\nu} = 0 \tag{17.149}$$

$g^{\beta\varphi}$: diagonal

$$\Rightarrow \epsilon_{\kappa\varphi\mu\nu}\partial^\kappa F^{\mu\nu} = 0 \tag{17.150}$$

$$\Rightarrow \epsilon_{\alpha\beta\mu\nu}\partial^\beta F^{\mu\nu} = 0 \tag{17.151}$$

$$\epsilon_{\alpha\beta\mu\nu}[\partial^\beta F^{\mu\nu} + \partial^\mu F^\nu \beta + \partial^\nu F^{\beta\mu} = 0 \tag{17.152}$$

så man ser att

$$\partial^\beta F^{\mu\nu} + \partial^\mu F^\nu \beta + \partial^\nu F^{\beta\mu} = 0 \tag{17.153}$$

är ekvivalent med

$$\partial_\alpha \mathcal{F}^{\alpha\beta} = 0. \tag{17.154}$$

17.3.3. Lorentz-kraften i kovariant form

Till slut ser vi på kraftekvationen:

$$\boldsymbol{F} = q(\boldsymbol{E} + \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}) \tag{17.155}$$

$(\frac{\varepsilon}{c},\ \boldsymbol{p})$ bildar en 4-vektor enligt den speciella relativitetsteorin, där

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = q\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{E} \tag{17.156}$$

är energiförändringen per tidsenhet hos den laddning som drivs av ett elektriskt fält $\boldsymbol{E}$.

Lorentz-kraften är

$$\frac{d\boldsymbol{p}}{dt} = \boldsymbol{F} = q(\boldsymbol{E} + \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}). \tag{17.157}$$

För att dessa ekvationer skall få en uppenbar Lorentz-invariant form måste den koordinatsystems-beroende tidsvariabeln t ersättes med den invarianta tidsvariabeln τ: egentid, tid mätt i vilosystemet.

Definition av egentiden för en partikel som rör sig med hastigheten v:

Antag koordinatsystemet K' rör sig med konstant hastighet v i förhållande till K. Låt q vara en laddning som är stationär i K':

$$x_0 = \gamma(x_0' + \boldsymbol{\beta} \cdot \boldsymbol{x}') \tag{17.158}$$

Om laddningen befinner sig i vila i origo i systemet K', $\boldsymbol{x}' = 0$, blir

$$x_0 = \gamma x_0' \rightarrow t = \gamma t' \tag{17.159}$$

t' är den tid som mäts av en klocka som rör sig med partikeln.

Under ett tidsintervall dt rör sig partikeln en sträcka $d\boldsymbol{x}$ i K:

$$d\boldsymbol{x} = \boldsymbol{v} dt \tag{17.160}$$

I vilokoordinatsystemet K' är motsvarande tidsintervall

$$dt' = \frac{1}{\gamma} dt \quad (d\boldsymbol{x}' = 0) \tag{17.161}$$

$$= \sqrt{1 - \beta^2} dt, \quad |dt'| < |dt| \tag{17.162}$$

Invariant avstånd:

$$ds = \sqrt{c^2 dt'^2 - d\boldsymbol{x}'^2} \tag{17.163}$$

$$= cdt' \tag{17.164}$$

$\longrightarrow cdt' =$ invariant

$\longrightarrow$ tiden i vilokoordinatsystemet är invariant.

$d\tau \equiv dt'$ egentid (proper time)

Man ser alltså att $d\tau = \frac{1}{\gamma}dt \quad dt > d\tau$ vilket är relativitetsteorins begrepp om **tidsdilatation**.

Vi definierar 4-vektor-hastigheten u^α:

$$\boldsymbol{u} = \frac{d\boldsymbol{x}}{d\tau} = \frac{d\boldsymbol{x}}{dt}\frac{dt}{d\tau} = \gamma\boldsymbol{v} \tag{17.165}$$

$$u^0 = \frac{dx^0}{d\tau} = c\frac{dt}{d\tau} = \gamma c \tag{17.166}$$

För att skriva om Lorentz-kraften använder vi oss nu av τ:

$$\frac{d\boldsymbol{p}}{dt} \Rightarrow \frac{d\boldsymbol{p}}{d\tau} = \frac{d\boldsymbol{p}}{dt}\frac{dt}{d\tau} = \gamma q[\boldsymbol{E} + \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}] \tag{17.167}$$

$$= q\{\underbrace{\gamma}_{u_0/c}\boldsymbol{E} + \underbrace{\gamma\boldsymbol{v}}_{\boldsymbol{u}} \times \boldsymbol{B}\} = q\{u_0\frac{\boldsymbol{E}}{c} + \boldsymbol{u} \times \boldsymbol{B}\} \tag{17.168}$$

För 0-komponenten i fyr-rörelsemängden $(\frac{\varepsilon}{c},\ \boldsymbol{p})$ gäller

$$\frac{dp^0}{d\tau} = \frac{d\varepsilon}{cd\tau} = \frac{1}{c}\frac{d\varepsilon}{dt}\frac{dt}{d\tau} = \frac{\gamma}{c}q\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{E} = \frac{q}{c}\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{E} = q\boldsymbol{u}\cdot(\frac{\boldsymbol{E}}{c}) \tag{17.169}$$

Då

$$\frac{E_k}{c} = F^{k0} = -F^{0k} \tag{17.170}$$

kan man skriva

$$\boldsymbol{u}\cdot\frac{\boldsymbol{E}}{c} = \sum u^k(-)F^{0k} = u_\beta F^{0\beta} \tag{17.171}$$

och därmed

$$\frac{dp^0}{d\tau} = qu_\beta F^{0\beta} \tag{17.172}$$

För t.ex. x-komponenten gäller:

$$\frac{dp^1}{d\tau} = q\{u^0\frac{E_1}{c} + (\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{B})_1\} \tag{17.173}$$

$$= q\{u^0\frac{E_1}{c} + u^2B_3 - u^3B_2\} \tag{17.174}$$

$$= q\{u^0\frac{E_1}{c} + u^2F^{21} + u^3F^{31}\} \tag{17.175}$$

$$= q\{u^0F^{10} - u^2F^{12} - u^3F^{13}\} \tag{17.176}$$

$$= qu_\beta F^{1\beta} \tag{17.177}$$

Härav ser man att den allmänna formen blir:

$$\boxed{\frac{dp^\alpha}{d\tau} = q u_\beta F^{\alpha\beta} \qquad (17.178)}$$

Nu har vi alltså skrivit om hela elektrodynamiken i tensorform, med kompatibel notation med den speciella relativitetsteorin: ekvationerna 17.83, 17.132, 17.141 och 17.178.

17.3.4. Magnetiska monopoler??

[Jackson 6.12]

Vid detta skede kan vi notera att för att åstadkomma den kovarianta formen av Maxwell-ekvationerna 2 och 3, gjorde vi operationen "$j, \rho \to 0$" för att få dessa att vara av liknande form som ekvationerna 1 och 4. Men ser nu att **ifall** det skulle existera magnetiska monopoler, skulle ekvationerna 2 och 3 ha formen (vi ignorerar nu konstanterna ε_0, μ_0):

$$\nabla \cdot \boldsymbol{B} = \rho_m \qquad (17.179)$$

$$\nabla \times \boldsymbol{E} = \boldsymbol{j}_m + \frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} \qquad (17.180)$$

där ρ_m, $\boldsymbol{j}_m$ är den magnetiska monopoltätheten och -strömmen. Nu är dessa ekvationer helt symmetriska med 1 och 4.

Förutom att magnetiska monopoler skulle ge högre matematisk symmetri, har Dirac dessutom visat att om *en enda* magnetisk monopol skulle existera i universum, skulle det förklara varför elektrisk laddning är kvantiserat!

P.g.a. dessa attraktiva egenskaper pågår det ständigt helt seriösa sökningar för magnetiska monopoler. Tyvärr har de tillsvidare inte gett resultat.

17.4. Final: den klassiska elektrodynamikens roll i fysiken

Som en sammanfattning av kursen, kan vi ännu repetera vilken roll den klassiska elektrodynamikens spelar i fysiken?

Den praktiska betydelsen är klar: elektrodynamiken leder till all elektronik och optik som vi känner till i vardagslivet. Via dess roll i växelverkan mellan elektroner och atomkärnor i Schrödingerekvationen har den dessutom en central roll till att leda till all kemi och materialfysik.

Fundamentalt sett konstaterade vi i början av kursen att den elektrodynamiken som baserar sig på Maxwells ekvationer och Lorentz kraftekvation är den klassiska gränsen för kvantelektrodynamiken. Den kvantmekaniska gränsen kommer i de flesta fall fram först innanför atomkärnan och mindre längdsskalor än den. Ovanom gränsen är den klassiska elektrodynamiken verifierad av otaliga experiment och fungerar extremt bra.

I slutet av kursen visade vi att den klassiska elektrodynamiken är helt kompatibel med relativitetsteorin, bara koordinattransformationen görs som Lorentz-transformationen och Einsteins postulat i speciella relativitetsteorin beaktas.

Till slut kan vi konstatera att iom. att kvantmekaniken och relativitetsteorin fortfarande inte är ihopfogade med en "teori över allting", är inte heller den klassiska elektrodynamikens slutgiltiga plats i det fysikaliska pusslet slutgiltigt klart. Men klart är att teorin över allting måste leda till den klassiska elektrodynamiken som ett gränsfall för vardagsnära fysik.

Trevlig elektrodynamisk sommar!!

(Fotnot att grubbla över under semestern: kan du lista ut från kursens innehåll (jämfört med tidigare enklare fysikkurser du tagit) orsaker till varför en bil (eller annan metallbur) inte nödvändigtvis är ett fullständigt bra skydd mot en blixt?