

13. Plana vågors reflektion och brytning

Extra material som ges som referens, men krävs inte i mellanförhören eller räkneövningarna:

13.1. Vågledare

...

Hastigheter

Behandlas ej, men ges som referens på kursens webbsidor. Materialet krävs inte i mellanförhören.

Vågornas fashastighet i $\hat{\mathbf{z}}$ -riktningen ges av

$$\kappa_z = \kappa \sin \theta = \frac{\omega}{v_z} \quad (13.1)$$

så att

$$v_z = \frac{\omega}{\kappa \sin \theta} = \frac{\omega}{(\omega/c) \sin \theta} = \frac{c}{\sin \theta} \quad (13.2)$$

vars storlek är $\geq c$.

Som vi vet från tidigare är denna allmänna fashastighet inte relaterad till hastigheten med vilken information färdas, så resultatet att ljushastigheten överskrids har inte så stor betydelse i det här fallet.

Signalhastigheten är hastigheten med vilken energin transporteras. Vi såg tidigare att

$$\mathbf{S} = u_{\text{EM}} \mathbf{v}_f \quad (13.3)$$

där $\mathbf{v}_f$ är fashastigheten i vågens riktning.

P.g.a. reflektionen ändrar riktningen hela tiden, så det lönar sig inte att räkna ut den momentana Poyntingvektorn utan tidsmedelvärdet av denna. Det lönar sig också att integrera Poyntingvektorn och energitätheten över avståndet mellan planen, för att få ett rums-medelvärde av energin mellan planen.

För hastigheten v_E i $\hat{\mathbf{z}}$ -riktningen har vi nu att

$$\langle S_z \rangle = \langle u_{EM} \rangle v_E \quad (13.4)$$

Vi känner redan elfältet. Magnetfältet fås via

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\partial_t \mathbf{B} = i\omega \mathbf{B} \quad (13.5)$$

med den sedvanliga *Ansatz* $\mathbf{B} = \mathbf{B}_0 e^{-i\omega t}$.

Detta ger

$$\begin{aligned} \mathbf{B}(z, t) = & \hat{\mathbf{y}} E_0 \frac{2\pi}{\omega \lambda_g} \sin\left(\frac{2\pi y}{\lambda_c}\right) e^{i2\pi z/\lambda_g - i\omega t} \\ & + \hat{\mathbf{z}} i E_0 \frac{2\pi}{\omega \lambda_c} \cos\left(\frac{2\pi y}{\lambda_c}\right) e^{i2\pi z/\lambda_g - i\omega t} \end{aligned} \quad (13.6)$$

Energitätheten är

$$u_{\text{EM}} = \frac{1}{2}(\mathbf{E}_P \cdot \mathbf{D}_P + \mathbf{B}_P \cdot \mathbf{H}_P) = \frac{1}{2}(\varepsilon E_P^2 + \frac{1}{\mu} B_P^2) \quad (13.7)$$

Tidsmedelvärdet med hjälp av teoremet i föregående kapitel är

$$\begin{aligned} \langle u_{\text{EM}} \rangle &= \frac{1}{4}(\mathbf{E}^* \cdot \mathbf{D} + \mathbf{B}^* \cdot \mathbf{H})_r \\ &= \frac{1}{4}(\varepsilon |\tilde{\mathbf{E}}|^2 + \frac{1}{\mu} |\tilde{\mathbf{B}}|^2)_r \\ &= \frac{1}{4} \varepsilon_0 |\tilde{E}_0|^2 \sin^2 \left(\frac{2\pi y}{\lambda_c} \right) + \frac{1}{4} \frac{1}{\mu_0} |\tilde{E}_0|^2 \left(\frac{2\pi}{\omega \lambda_g} \right)^2 \sin^2 \left(\frac{2\pi y}{\lambda_c} \right) \\ &\quad + \frac{1}{4} \frac{1}{\mu_0} |\tilde{E}_0|^2 \left(\frac{2\pi}{\omega \lambda_c} \right)^2 \cos^2 \left(\frac{2\pi y}{\lambda_c} \right) \end{aligned} \quad (13.8)$$

Integralen över y :

$$\int_0^b dy \langle u_{\text{EM}} \rangle = \frac{1}{4} |\tilde{E}_0|^2 \frac{b}{2} \left(\varepsilon_0 + \frac{1}{\mu_0} \frac{4\pi^2}{\omega^2} \left(\frac{1}{\lambda_g^2} + \frac{1}{\lambda_c^2} \right) \right) = \frac{1}{4} |\tilde{E}_0|^2 \varepsilon_0 b \quad (13.9)$$

Poyntingvektorn är

$$S_z = (\mathbf{E}_P \times \mathbf{H}_P)_z = E_{Px}H_{Py} - H_{Px}E_{Py} = E_{Px}H_{Py} \quad (13.10)$$

Tidsmedelvärdet är

$$\langle S_z \rangle = \frac{1}{2}(\tilde{E}_x^* \tilde{H}_y)_r = \frac{1}{2}|\tilde{E}_0|^2 \frac{1}{\mu_0 \omega \lambda_g} \sin^2 \left(\frac{2\pi y}{\lambda_c} \right) \quad (13.11)$$

Integralen över y :

$$\int_0^b dy \langle S_z \rangle = \frac{1}{4}|\tilde{E}_0|^2 \frac{2\pi}{\mu_0 \omega \lambda_g} b \quad (13.12)$$

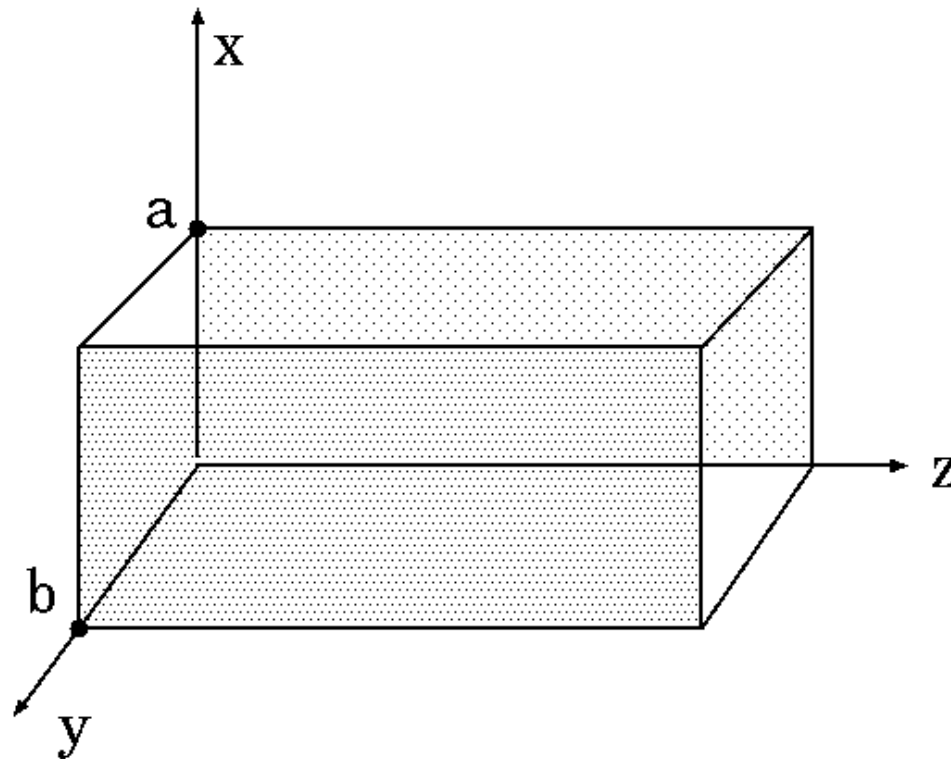
Hastighet med vilken energin fortskrider är

$$\begin{aligned} v_E &= \frac{\int_0^b dy \langle S_z \rangle}{\int_0^b dy \langle u_{EM} \rangle} \\ &= \frac{2\pi}{\varepsilon_0 \mu_0 \omega \lambda_g} = \frac{2\pi c^2}{\omega \lambda_g} = c \frac{\lambda_0}{\lambda_g} \\ &= c \frac{\lambda_0}{\lambda_0 / \sin \theta} = c \sin \theta \end{aligned} \tag{13.13}$$

$$= c \sqrt{1 - \left(\frac{m \lambda_0}{2b} \right)^2} \tag{13.14}$$

som är maximalt lika stor ljushastigheten.

13.1.1. Rektangulära vågledare



Med $\tilde{\mathbf{E}}'(\mathbf{r}, t) = \tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{r})e^{-i\omega t}$ och $\tilde{\mathbf{H}}'(\mathbf{r}, t) = \tilde{\mathbf{H}}(\mathbf{r})e^{-i\omega t}$ har vi vågekvationerna

$$\nabla^2 \tilde{\mathbf{E}} + \frac{\omega^2}{c^2} \tilde{\mathbf{E}} = 0 \quad (13.15)$$

$$\nabla^2 \tilde{\mathbf{H}} + \frac{\omega^2}{c^2} \tilde{\mathbf{H}} = 0 \quad (13.16)$$

Förutom dessa skall fälten uppfylla alla Maxwells ekvationer.

Vi fokuserar nu på TE-moderna. För dessa gäller att $\widetilde{E}_z \equiv 0$.

Från behandlingen av vågor mellan parallella ledande plan vet vi att vågorna skall ha en fasfaktor $\exp[-i(\omega t - 2\pi z/\lambda_g)]$.

Vi förenklar nu notationen genom att plocka bort tilde-symbolen från de komplexa el- och magnetfältets-amplituderna.

Rotorekvationen för elfältet,

$$\nabla \times \mathbf{E} - i\mu_0\omega\mathbf{H} = 0 \quad (13.17)$$

ger att

$$(1) \quad x : \quad \partial_y E_z - \partial_z E_y = -i\frac{2\pi}{\lambda_g} E_y = i\mu_0\omega H_x \quad (13.18)$$

$$(2) \quad y : \quad \partial_z E_x - \partial_x E_z = i\frac{2\pi}{\lambda_g} E_x = i\mu_0\omega H_y \quad (13.19)$$

$$(3) \quad z : \quad \partial_x E_y - \partial_y E_x = i\mu_0\omega H_z \quad (13.20)$$

Magnetfältet propagerar i z -riktningen, så $\mathbf{H} \propto \exp[i2\pi z/\lambda_g]$.

Rotorekvationen för magnetfältet,

$$\nabla \times \tilde{\mathbf{H}} + i\varepsilon_0\omega\tilde{\mathbf{E}} = 0 \quad (13.21)$$

ger att

$$(4) \quad x : \quad \partial_y H_z - \partial_z H_y = \partial_y H_z - i\frac{2\pi}{\lambda_g} H_y = -i\varepsilon_0\omega E_x \quad (13.22)$$

$$(5) \quad y : \quad \partial_z H_x - \partial_x H_z = i\frac{2\pi}{\lambda_g} H_x - \partial_x H_z = -i\varepsilon_0\omega E_y \quad (13.23)$$

$$(6) \quad z : \quad \partial_x H_y - \partial_y H_x = 0 \quad (13.24)$$

Om nu H_z är känd fås H_y från (2) och (4). H_x fås sedan från (1) och (5). Elfälten fås i sin tur från (2) och (1).

H_z fås från vågekvationen, med observationen att H_z skall bero på z endast via fasen:

$$\nabla^2 \tilde{H}_z - \varepsilon_0 \mu_0 \partial_t^2 H_z = (\partial_x^2 + \partial_y^2) H_z + \left[- \left(\frac{2\pi}{\lambda_g} \right)^2 + \varepsilon_0 \mu_0 \omega^2 \right] H_z \quad (13.25)$$

$$= 0 \quad (13.26)$$

Gör nu *Ansätzen*

$$H_z(x, y, z) = F(x)G(y)e^{i2\pi z/\lambda_g} \quad (13.27)$$

Insättning i vågekvationen ger

$$F''(x)G(y)e^{i2\pi z/\lambda_g} + F(x)G''(y)e^{i2\pi z/\lambda_g} + \left[\frac{\omega^2}{c^2} - \left(\frac{2\pi}{\lambda_g} \right)^2 \right] F(x)G(y)e^{i2\pi z/\lambda_g} = 0 \quad (13.28)$$

Med beteckningen $W \equiv \omega^2/c^2 - (2\pi/\lambda_g)^2$, och efter division med $F(x)G(y)e^{i2\pi z/\lambda_g}$ får vi

$$\frac{F''}{F} + \frac{G''}{G} + W = 0 \quad (13.29)$$

Detta ger systemet

$$\frac{F''}{F} = -W' \quad (13.30)$$

$$\frac{G''}{G} = W' - W \quad (13.31)$$

Lösningen till F är summan $A' \sin(\sqrt{W'}x) + B' \cos(\sqrt{W'}x)$.

Lösningen till G är summan $C' \sin(\sqrt{W - W'}y) + D' \cos(\sqrt{W - W'}y)$.

Med identifikationen

$$\kappa_x = \sqrt{W'} \quad (13.32)$$

$$\kappa_y = \sqrt{W - W'} \quad (13.33)$$

fås

$$\kappa_x^2 + \kappa_y^2 - W = \kappa_x^2 + \kappa_y^2 - \left(\frac{\omega^2}{c^2} - \left(\frac{2\pi}{\lambda_g} \right)^2 \right) = 0 \quad (13.34)$$

och den allmänna lösningen

$$\begin{aligned} H_z(x, y, z) = & (A \cos \kappa_x x \cos \kappa_y y \\ & + B \cos \kappa_x x \sin \kappa_y y \\ & + C \sin \kappa_x x \cos \kappa_y y \\ & + D \sin \kappa_x x \sin \kappa_y y) e^{i2\pi z/\lambda_g} \end{aligned} \quad (13.35)$$

(i) Enligt det tidigare receptet får vi nu

$$\partial_y H_z = \frac{2\pi}{\mu_0 \omega \lambda_g} \left[i \frac{\omega^2 \lambda_g}{c^2 2\pi} - i \frac{2\pi}{\lambda_g} \right] E_x = \frac{i}{\mu_0 \omega} \left[\frac{\omega^2}{c^2} - \left(\frac{2\pi}{\lambda_g} \right)^2 \right] E_x \quad (13.36)$$

som ger

$$E_x = -i\mu_0\omega \left[\frac{\omega^2}{c^2} - \left(\frac{2\pi}{\lambda_g} \right)^2 \right]^{-1} \partial_y H_z \quad (13.37)$$

eller att

$$\begin{aligned} E_x \propto & -\kappa_y (A \cos \kappa_x x \sin \kappa_y y \\ & - B \cos \kappa_x x \cos \kappa_y y \\ & + C \sin \kappa_x x \sin \kappa_y y \\ & - D \sin \kappa_x x \cos \kappa_y y) e^{i2\pi z/\lambda_g} \end{aligned} \quad (13.38)$$

Det tangentiella elfältet skall vara noll på ytorna, så att vi måste kräva $E_x = 0$ då $y = 0$ och $y = b$.

Detta ger $\sin(\kappa_y b) = 0$ och $B = D = 0$, så att $\kappa_y b = m\pi$, där m är ett heltal.

(ii) Enligt det tidigare receptet får vi också att

$$\partial_x H_z = \left(i\epsilon_0\omega - i\frac{2\pi}{\lambda_g} \frac{2\pi}{\mu_0\omega\lambda_g} \right) E_y = \frac{i}{\mu_0\omega} \left(\frac{\omega^2}{c^2} - \left(\frac{2\pi}{\lambda_g} \right)^2 \right) E_y \quad (13.39)$$

eller att

$$\begin{aligned} E_y \propto & -\kappa_x (A \sin \kappa_x x \cos \kappa_y y \\ & + B \sin \kappa_x x \sin \kappa_y y \\ & - C \cos \kappa_x x \cos \kappa_y y \\ & - D \cos \kappa_x x \sin \kappa_y y) e^{i2\pi z/\lambda_g} \end{aligned} \quad (13.40)$$

Det tangentiella elfältet skall vara noll på ytorna, så att vi måste kräva $E_y = 0$ då $x = 0$ och $x = a$.

Detta ger $\sin(\kappa_x a) = 0$ och $C = D = 0$, så att $\kappa_x a = l\pi$, där l är ett heltal.

Magnetfältet i z -riktningen är alltså

$$H_z(x, y, z) = A \cos\left(\frac{l\pi x}{a}\right) \cos\left(\frac{m\pi y}{b}\right) e^{i2\pi z/\lambda_g} \quad (13.41)$$

De motsvarande elfälten kallas **TE_{lm}-moder**.

Konventionen är att indexet l motsvarar den bredare dimensionen (x , om $a > b$), och m den smalare dimensionen (x , om $a < b$).

Obs:

$$\kappa_x^2 + \kappa_y^2 - \left(\frac{\omega^2}{c^2} - \left(\frac{2\pi}{\lambda_g} \right)^2 \right) = 0 \quad (13.42)$$

$$\kappa_x = \frac{l\pi}{a} \quad (13.43)$$

$$\kappa_y = \frac{m\pi}{b} \quad (13.44)$$

$$\frac{\omega}{c} = \frac{2\pi}{\lambda_0} \quad (13.45)$$

ger oss nu

$$\left(\frac{2\pi}{\lambda_g}\right)^2 = \left(\frac{2\pi}{\lambda_0}\right)^2 - \left(\frac{l\pi}{a}\right)^2 - \left(\frac{m\pi}{b}\right)^2 \quad (13.46)$$

Energins eller signalens hastighet är

$$v_g = \frac{c\lambda_0}{\lambda_g} \quad (13.47)$$

för en monokromatisk våg.

En fortskridande våg förekommer nu om

$$\left(\frac{2\pi}{\lambda_0}\right)^2 > \left(\frac{l\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{m\pi}{b}\right)^2 \equiv \left(\frac{2\pi}{\lambda_c}\right)^2 \quad (13.48)$$

Detta ger

$$\frac{1}{\lambda_0^2} > \left(\frac{l}{2a}\right)^2 + \left(\frac{m}{2b}\right)^2 \quad (13.49)$$

För fixerade kantlängder a , b och en viss mod (l, m) kan bara vågor med våglängden λ_0 uppfyllande ekvationen ovan fortskrida.

Alternativt, med hjälp av frekvensen $\nu_0 = c/\lambda_0$, fås

$$\nu_0 > \frac{c}{2} \sqrt{\left(\frac{l}{a}\right)^2 + \left(\frac{m}{b}\right)^2} = \nu_{\min} = \frac{c}{\lambda_{\max}} \quad (13.50)$$

Vanligtvis väljs vågledarens dimensioner så att endast TE₁₀-moden av den sökta frekvensen eller våglängden fortskrider.

l	m	$\nu_{\min}$ (Hz)	$\lambda_{\max}$ (m)
0	0	0	∞
1	0	$c/(2a)$	$2a$
0	1	$c/(2b)$	$2b$
2	0	c/a	a
0	2	c/b	b

Exempel : Mikrovågor har frekvensen $\nu = 10^{10}$ Hz. TE₁₀-moden motsvarar $\nu_{\min} = c/(2a)$, så om mikrovågor och vågor med högre frekvens skall fortskrida, men inte vågor med lägre frekvens (radio), måste vi ha $a > c/(2\nu) = 1,5$ cm.

Vågledare har en standardstorlek given av $a = 0,9 \text{ tum} = 2,28 \text{ cm}$ och $b = 0,4 \text{ tum} = 1,01 \text{ cm}$. En tum motsvarar 2,54 cm.

Minimumfrekvensen för TE_{10} -moden är nu $\nu_{\min} = c/(2a) = 6,56 \times 10^9 \text{ Hz}$ så att maximumvåglängden är $\lambda_{\max} = c/\nu_{\min} = 2a = 4,57 \text{ cm}$. Detta betyder att mikrovågor och högfrekventare strålning kan fortskrida.

P.g.a. starka förluster för frekvenser nära bryt-frekvensen höjer man lite på det teoretiska standardvärdet för a så att det är mellan 2,42 cm och 4,35 cm.

13.2. Kavitetsresonatorer

Vi behandlade tidigare en RLC -krets och såg att strömmen i denna hade två tidsberoenden. För det första förekom en faktor med harmoniskt tidsberoende, och för det andra förekom också en faktor med exponentiellt dämpat tidsberoende. Dämpningen var orsakad av resistorn i kretsen.

Om resistorn avlägsnas kan man visa att strömmen blir harmonisk, så att energin i kretsen pendlar mellan fullständigt elektrisk (kondensatorn fulladdad) och fullständigt magnetisk (spolens magnetfält har maximal styrka).

Ett annat sätt att lagra elektromagnetisk energi är att generera EM-fält inne i en kavitet med starkt ledande väggar. Dylika kallas **kavitetsresonatorer**.

Dessa är bättre än LC -kretsar, av två anledningar:

- (1) Relativ energiförlust per oskillation i en resonator är endast ca $1/20 = 5\%$ av vad den är i en LC -krets.
- (2) LC -kretsar mer eller mindre omöjliga att konstruera för frekvenser av storleksordningen 100 MHz och större.

Låt resonatorns väggar vara i $x = 0$, $x = a$, $y = 0$, $y = b$, $z = 0$ och $z = d$. På dessa plan gäller att elfältets tangentiella komponent och den magnetiska flödestäthetens normalkomponent båda skall vara noll.

Beteckna elfältet med

$$\mathbf{E}'(x, y, z, t) = \mathbf{E}(x, y, z)e^{-i\omega t} \quad (13.51)$$

Vågekvationen

$$\nabla^2 \mathbf{E}' - \varepsilon_0 \mu_0 \partial_t^2 \mathbf{E}' = 0 \quad (13.52)$$

skall vara uppfylld för varje komponent. Detta ger t.ex.

$$\nabla^2 E_x + \varepsilon_0 \mu_0 \omega^2 E_x = \nabla^2 E_x + \frac{\omega^2}{c^2} E_x = 0 \quad (13.53)$$

E_x är tangenten av elfältet på väggarna i $y = 0$, $y = b$, $z = 0$ och $z = d$.

En enkel lösning som uppfyller detta är

$$E_x = E_1 f_1(x) \sin \kappa_y y \sin \kappa_z z \quad (13.54)$$

där

$$\kappa_y b = m\pi \quad (13.55)$$

$$\kappa_z d = n\pi \quad (13.56)$$

med m, n heltal.

Motsvarande för E_y och E_z ger att elfältets komponenter är

$$E_x = E_1 f_1(x) \sin \kappa_y y \sin \kappa_z z \quad (13.57)$$

$$E_y = E_2 f_2(y) \sin \kappa_x x \sin \kappa_z z \quad (13.58)$$

$$E_z = E_3 f_3(z) \sin \kappa_x x \sin \kappa_y y \quad (13.59)$$

där

$$\kappa_x a = l\pi \quad (13.60)$$

med l ett heltal, så att t.ex. $E_y = 0$ då $x = 0$ eller $x = a$.

I vakuum gäller ännu att $\nabla \cdot \mathbf{E} = 0$:

$$\begin{aligned} & E_1 f_1'(x) \sin \kappa_y y \sin \kappa_z z + E_2 f_2'(y) \sin \kappa_x x \sin \kappa_z z \\ & + E_3 f_3'(z) \sin \kappa_x x \sin \kappa_y y \\ = & 0 \end{aligned} \tag{13.61}$$

Med

$$f_1(x) = \cos \kappa_x x \tag{13.62}$$

$$f_2(y) = \cos \kappa_y y \tag{13.63}$$

$$f_3(z) = \cos \kappa_z z \tag{13.64}$$

fås

$$- (\kappa_x E_1 + \kappa_y E_2 + \kappa_z E_3) \sin \kappa_x x \sin \kappa_y y \sin \kappa_z z = 0 \tag{13.65}$$

så att vi får villkoret

$$\kappa_x E_1 + \kappa_y E_2 + \kappa_z E_3 = 0 \tag{13.66}$$

eller

$$\frac{lE_1}{a} + \frac{mE_2}{b} + \frac{nE_3}{d} = 0 \quad (13.67)$$

Detta binder samman elfältsamplituderna för en viss **TE_{lmn}-mod**.

Ett mera användbart villkor fås med ekv. (??), som ger

$$-\kappa_x^2 - \kappa_y^2 - \kappa_z^2 + \frac{\omega^2}{c^2} = 0 \quad (13.68)$$

Med uttrycken för vågvektorerna och relationen $\omega = 2\pi\nu$ fås

$$\left(\frac{l\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{m\pi}{b}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{d}\right)^2 = \frac{4\pi^2\nu^2}{c^2} \quad (13.69)$$

eller förenklat

$$\nu = \frac{c}{2} \sqrt{\left(\frac{l}{a}\right)^2 + \left(\frac{m}{b}\right)^2 + \left(\frac{n}{d}\right)^2} \quad (13.70)$$

Varje kombination av l, m, n ger en bestämd **resonansfrekvens** ν för det elfält som kan existera inne i kaviteten.

Det associerade magnetfältet fås med hjälp av Maxwells IV lag

$$\nabla \times \mathbf{E}'(x, y, z, t) = -\partial_t \mathbf{B}'(x, y, z, t) \quad (13.71)$$

som ger

$$\mathbf{B}(x, y, z) = -\frac{i}{\omega} \mathbf{E}(x, y, z) \quad (13.72)$$

Elfälten kan nu skrivas

$$E_x = E_1 \cos\left(\frac{l\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{m\pi y}{b}\right) \sin\left(\frac{n\pi z}{d}\right) \quad (13.73)$$

$$E_y = E_2 \sin\left(\frac{l\pi x}{a}\right) \cos\left(\frac{m\pi y}{b}\right) \sin\left(\frac{n\pi z}{d}\right) \quad (13.74)$$

$$E_z = E_3 \sin\left(\frac{l\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{m\pi y}{b}\right) \cos\left(\frac{n\pi z}{d}\right) \quad (13.75)$$

Om en standard-vågledare används för att konstruera kaviteten, så är dimensionerna i x och y fixerade till $a = 0,9 \text{ tum} = 2,28 \text{ cm}$ och $b = 0,4 \text{ tum} = 1,01 \text{ cm}$. Genom att spela med olika längder d och index l, m, n kan kaviteten skräddarsys för önskad frekvens.

Exempel : En standardkonfiguration av TE-moder i en kaviteten är $(l, m, n) = (1, 0, 2)$. Om mikrovågor vill lagras i denna gäller att $\nu = 10^{10} \text{ Hz}$. Bestäm d .

Ekvationen ovan ger

$$d = \frac{a}{\sqrt{\nu^2 a^2 / c^2 - 1/4}} \approx 3,00 \text{ cm} \quad (13.76)$$

□