

12. Plana vågors fortskridande i oändliga media

Extra material som ges som referens, men krävs inte i mellanförhören eller räkneövningarna:

12.0.1. Tredimensionella vågor

En harmonisk elementarvåg i tre dimensioner skrivs som

$$\tilde{A}(\boldsymbol{\kappa})e^{i(\boldsymbol{\kappa}\cdot\mathbf{r}-\omega t)} \quad (12.1)$$

där $\boldsymbol{\kappa} = \kappa\hat{\mathbf{u}}$ och $\hat{\mathbf{u}}$ anger vågens fortskridningsriktning.

Vi har nu att

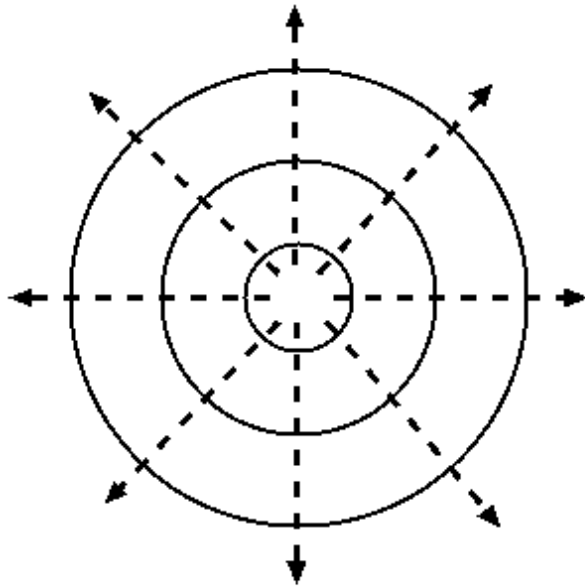
$$\omega = \boldsymbol{\kappa} \cdot \mathbf{v} = \kappa v \quad (12.2)$$

så att **fashastigheten** är som tidigare

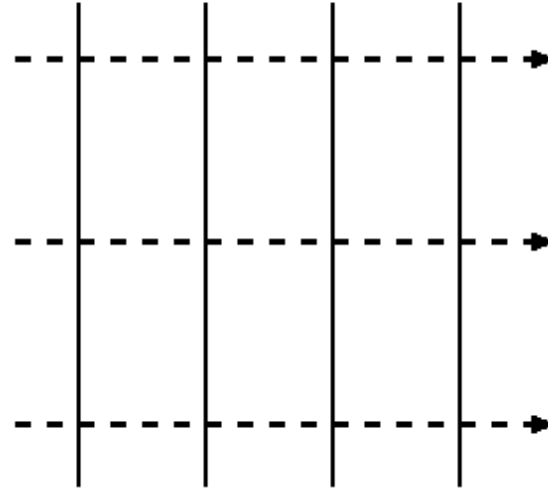
$$v_f = \frac{du}{dt} = \frac{\omega}{\kappa} \equiv \frac{c}{n} \quad (12.3)$$

Vektorn är $\mathbf{v}_f = v\hat{\mathbf{u}}$.

Två viktiga specialfall av tredimensionella vågor är **plana vågor** och **sfäriska vågor**. Vi återkommer eventuellt i ett senare skede till sfäriska vågor, tills dess fokuserar vi uteslutande på plana vågor.



(a)



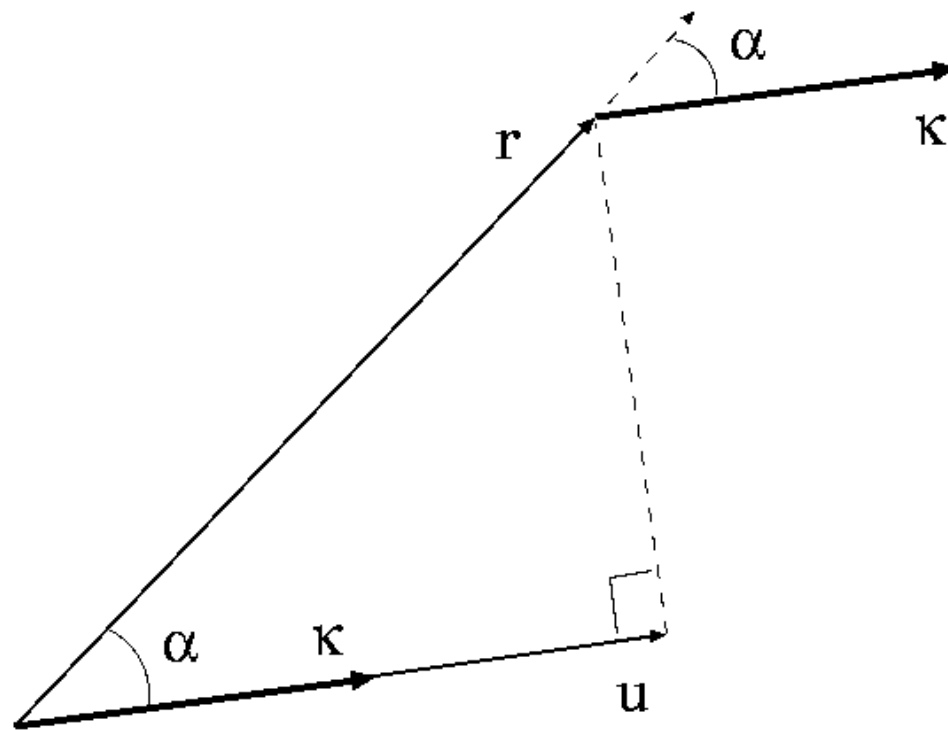
(b)

Plana vågor är vågor vars fas är konstant på varje plan som är vinkelrätt mot vågens fortskridningsriktning.

Om exempelvis $\hat{\mathbf{u}} = \hat{\mathbf{z}}$ så får vi

$$\tilde{A}(\boldsymbol{\kappa})e^{i(\boldsymbol{\kappa}z - \omega t)} \quad (12.4)$$

och κ måste vara oberoende av x och y .



Produkten av vågvektorn och positionen kan skrivas

$$\boldsymbol{\kappa} \cdot \mathbf{r} = \kappa r \cos \alpha \equiv \kappa u \quad (12.5)$$

där $u = r \cos \alpha$ är **koordinaten längs med riktningen $\boldsymbol{\kappa}$** .

Elementarvågen kan vi nu skriva som

$$\tilde{A}(\boldsymbol{\kappa}) e^{i(\boldsymbol{\kappa} \cdot \mathbf{r} - \omega t)} = \tilde{A}(\boldsymbol{\kappa}) e^{i(\kappa u - \omega t)} \quad (12.6)$$

Storleken av en godtycklig komplex-värd våg — utan riktningsvektorn — ges av integralen

$$\tilde{E}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int dV_{\kappa} \tilde{A}(\boldsymbol{\kappa}) e^{-i\omega(\boldsymbol{\kappa})t} e^{i\boldsymbol{\kappa} \cdot \mathbf{r}} \quad (12.7)$$

Detta motsvarar den **tredimensionella Fouriertransformen**.

Observera att dispersiva effekter har inkluderats i och med att $\omega = \omega(\boldsymbol{\kappa})$.

Amplituden ges av

$$\tilde{A}(\boldsymbol{\kappa}) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} e^{i\omega(\boldsymbol{\kappa})t} \int dV_r \tilde{E}(\mathbf{r}, t) e^{-i\boldsymbol{\kappa} \cdot \mathbf{r}} \quad (12.8)$$

Det fysikaliska fältet eller den fysikaliska amplituden fås med hjälp av följande regler. Antag $z = a + ib$ där a, b är reella. Då gäller

$$a = \mathbf{Re}(z) = \frac{1}{2}(z + z^*) \quad (12.9)$$

$$b = \mathbf{Im}(z) = \frac{1}{2i}(z - z^*) \quad (12.10)$$

där z^* betyder komplexkonjugering.

12.0.2. Initialvillkor

Om vågens form $\mathbf{Re}(\tilde{E}(\mathbf{r}, 0)) = E_r(\mathbf{r}, 0)$ och dess tidsderivata är kända vid $t = 0$ kan amplituden bestämmas enligt följande.

Vi börjar med att notera att

$$\tilde{E}(\mathbf{r}, t) = E_r(\mathbf{r}, t) + iE_i(\mathbf{r}, t) \quad (12.11)$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int dV_\kappa \tilde{A}(\boldsymbol{\kappa}) e^{-i\omega(\boldsymbol{\kappa})t} e^{i\boldsymbol{\kappa} \cdot \mathbf{r}} \quad (12.12)$$

$$\partial_t \tilde{E}(\mathbf{r}, t) = \partial_t E_r(\mathbf{r}, t) + i\partial_t E_i(\mathbf{r}, t) \quad (12.13)$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int dV_{\kappa} (-i\omega(\boldsymbol{\kappa}) \tilde{A}(\boldsymbol{\kappa}) e^{-i\omega(\boldsymbol{\kappa})t} e^{i\boldsymbol{\kappa} \cdot \mathbf{r}} \quad (12.14)$$

Insättning av $t = 0$ och tillbakatransformation ger oss

$$\tilde{A}(\boldsymbol{\kappa}) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int dV_r [E_r(\mathbf{r}, 0) + iE_i(\mathbf{r}, 0)] e^{-i\boldsymbol{\kappa} \cdot \mathbf{r}} \quad (12.15)$$

$$-i\omega(\boldsymbol{\kappa})\tilde{A}(\boldsymbol{\kappa}) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int dV_r [\partial_t E_r(\mathbf{r}, 0) + i\partial_t E_i(\mathbf{r}, 0)] e^{-i\boldsymbol{\kappa} \cdot \mathbf{r}} \quad (12.16)$$

Detta system ger att

$$E_i(\mathbf{r}, 0) = \frac{1}{\omega(\boldsymbol{\kappa})} \partial_t E_r(\mathbf{r}, 0) \quad (12.17)$$

så att vi får

$$\tilde{A}(\boldsymbol{\kappa}) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int dV_r \left[E_r(\mathbf{r}, 0) + \frac{i}{\omega(\boldsymbol{\kappa})} \partial_t E_r(\mathbf{r}, 0) \right] e^{-i\boldsymbol{\kappa} \cdot \mathbf{r}} \quad (12.18)$$

Exempel 1: Vi har genererat en sinusvåg som rör sig i z -riktningen, och som består av N våglängder, $L = N\lambda_0$. Bestäm frekvensspektret $\tilde{A}(\kappa)$.

Låt vågen vara $E_r(z, t) = \sin(kz - \omega t)$. Vågen och dess tidsderivata är

$$E_r(z, 0) = \sin(\kappa_0 z), \quad 0 < z < L \quad (12.19)$$

$$\partial_t E_r(z, 0) = -\omega \cos(\kappa_0 z), \quad 0 < z < L \quad (12.20)$$

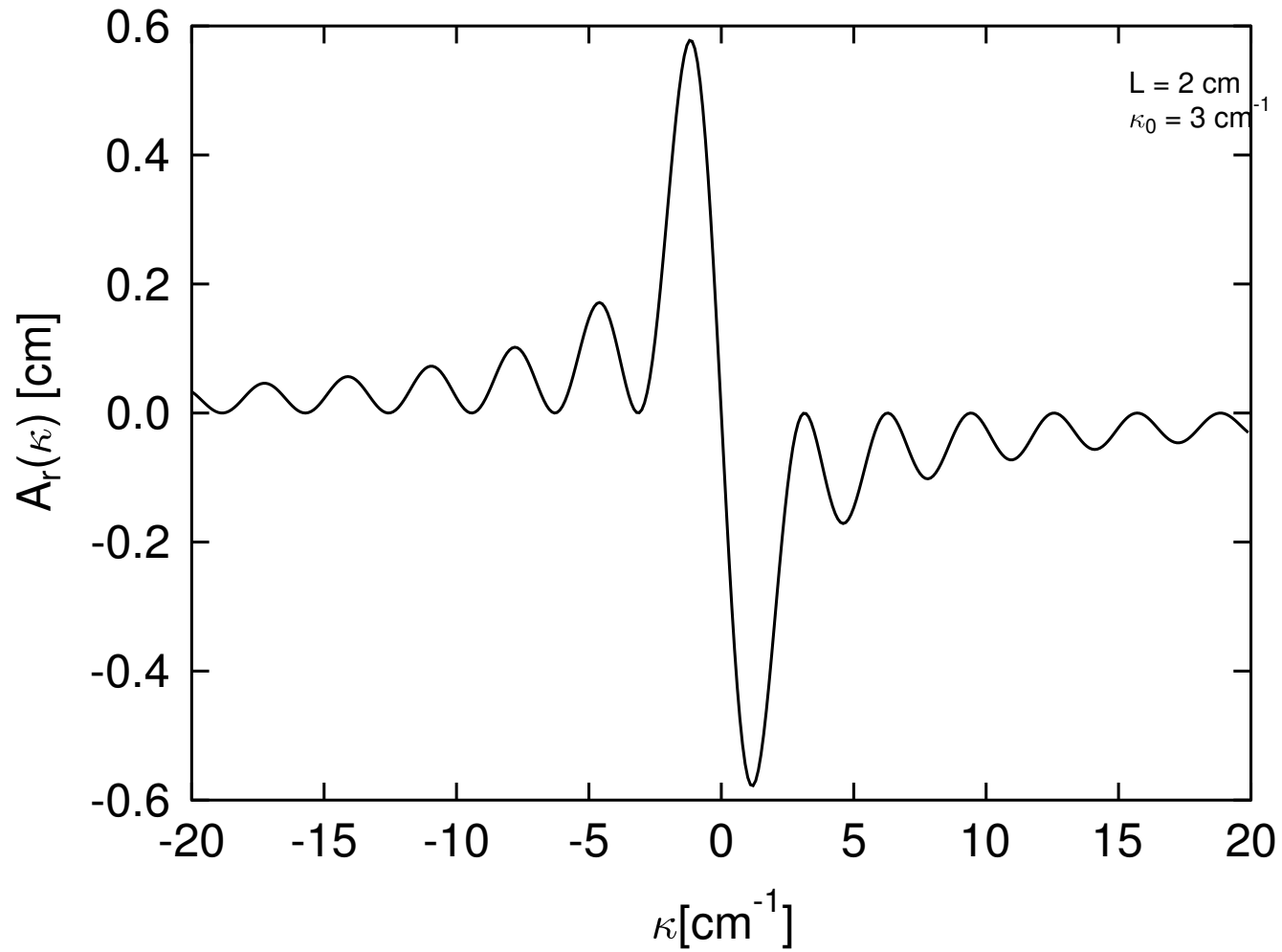
Amplituden:

$$\tilde{A}(\kappa) = \frac{1}{(2\pi)^{1/2}} \int_0^L dz [\sin(\kappa_0 z) - i \cos(\kappa_0 z)] e^{-i\kappa z} \quad (12.21)$$

$$= -i \frac{1}{(2\pi)^{1/2}} \int_0^L dz [\cos(\kappa_0 z) + i \sin(\kappa_0 z)] e^{-i\kappa z} \quad (12.22)$$

$$= -i \frac{1}{(2\pi)^{1/2}} \int_0^L dz e^{-i(\kappa - \kappa_0)z} \quad (12.23)$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^{1/2}} \frac{1}{\kappa - \kappa_0} (e^{i(\kappa_0 - \kappa)L} - 1) \quad (12.24)$$



Check: Får vi tillbaka samma fält som vi startade med ?

$$\tilde{E}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{(2\pi)^{1/2}} \int_{-\infty}^{\infty} d\kappa \tilde{A}(\kappa) e^{-i\omega(\kappa)t} e^{i\kappa z} \quad (12.25)$$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\kappa \frac{1}{\kappa - \kappa_0} e^{i(\kappa_0 - \kappa)L} e^{-i\omega(\kappa)t + i\kappa z} \\ &\quad - \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\kappa \frac{1}{\kappa - \kappa_0} e^{-i\omega(\kappa)t + i\kappa z} \end{aligned} \quad (12.26)$$

$$(12.27)$$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{2\pi} e^{i\kappa_0 L} \int_{-\infty}^{\infty} d\kappa \frac{1}{\kappa - \kappa_0} e^{-i\omega(\kappa)t} e^{i\kappa(z-L)} \\ &\quad - \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\kappa \frac{1}{\kappa - \kappa_0} e^{-i\omega(\kappa)t + i\kappa z} \end{aligned} \quad (12.28)$$

$$(12.29)$$

Vid $t = 0$:

$$\begin{aligned}\tilde{E}(\mathbf{r}, 0) &= \frac{1}{2\pi} e^{i\kappa_0 L} \int_{-\infty}^{\infty} d\kappa \frac{e^{i\kappa(z-L)}}{\kappa - \kappa_0} \\ &\quad - \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\kappa \frac{e^{i\kappa z}}{\kappa - \kappa_0}\end{aligned}\tag{12.30}$$

Från residykalkyl har vi följande regel:

$$\int_{-\infty}^{\infty} d\kappa \frac{e^{ia\kappa}}{\kappa - \kappa_0} = \text{sgn}(a) \pi i e^{ia\kappa_0}\tag{12.31}$$

där $\text{sgn}(a) = a/|a|$ ger tecknet på a .

Då $z < 0$ och $z > L$ fås

$$\tilde{E}(\mathbf{r}, 0) = \pm \pi i \frac{1}{2\pi} e^{i\kappa_0 L} e^{i\kappa_0(z-L)} - (\pm) \pi i \frac{1}{2\pi} e^{i\kappa_0 z} = 0\tag{12.32}$$

Då $0 < z < L$:

$$\widetilde{E}(\mathbf{r}, 0) = -\pi i \frac{1}{2\pi} e^{i\kappa_0 L} e^{i\kappa_0(z-L)} - \pi i \frac{1}{2\pi} e^{i\kappa_0 z} \quad (12.33)$$

$$= -\pi i \frac{1}{2\pi} e^{i\kappa_0 z} - \pi i \frac{1}{2\pi} e^{i\kappa_0 z} \quad (12.34)$$

$$= -i e^{i\kappa_0 z} = -i \cos(\kappa_0 z) + \sin(\kappa_0 z) \quad (12.35)$$

så att $E_r(\mathbf{r}, 0) = \sin(\kappa_0 z)$, $0 < z < L$, exakt som väntat ! $\square$



12.1. Energitäthet och -ström

Vi har upp tills nu kunnat använda komplexvärda fält i Maxwells ekvationer. Detta har möjliggjorts av det att ekvationerna är linjära, och reella och imaginära delarna av ett komplext fält därför var för sig uppfyller ekvationerna. Vi kommer nu att granska energitätheten u_{EM} och Poynting-vektorn $\mathbf{S}$, som båda innehåller produkter av fälten. I dessa sammanhang måste vi använda de reella eller imaginära fälten, och inte den komplexa versionen.

De fysikaliska fälten är ju

$$\mathbf{E}_P(\mathbf{r}, t) = E_{0p} \sin(\omega t - \boldsymbol{\kappa} \cdot \mathbf{r} - \phi) \hat{\mathbf{p}} + E_{0s} \sin(\omega t - \boldsymbol{\kappa} \cdot \mathbf{r}) \hat{\mathbf{s}} \quad (12.36)$$

$$\mathbf{B}_P(\mathbf{r}, t) = \frac{n}{c} (E_{0p} \sin(\omega t - \boldsymbol{\kappa} \cdot \mathbf{r} - \phi) \hat{\mathbf{s}} - E_{0s} \sin(\omega t - \boldsymbol{\kappa} \cdot \mathbf{r}) \hat{\mathbf{p}}) \quad (12.37)$$

Välj $\mathbf{r} = 0$ för att förenkla uttrycken.

$$\mathbf{E}_P(\mathbf{r}, t) = E_{0p} \sin(\omega t - \phi) \hat{\mathbf{p}} + E_{0s} \sin(\omega t) \hat{\mathbf{s}} \quad (12.38)$$

$$\mathbf{B}_P(\mathbf{r}, t) = \frac{n}{c} E_{0p} \sin(\omega t - \phi) \hat{\mathbf{s}} - \frac{n}{c} E_{0s} \sin(\omega t) \hat{\mathbf{p}} \quad (12.39)$$

Kvadraterna är

$$E_P^2 = E_{0p}^2 \sin^2(\omega t - \phi) + E_{0s}^2 \sin^2(\omega t) \quad (12.40)$$

$$B_P^2 = \frac{n^2}{c^2} E_{0p}^2 \sin^2(\omega t - \phi) + \frac{n^2}{c^2} E_{0s}^2 \sin^2(\omega t) \quad (12.41)$$

$$= \frac{n^2}{c^2} E_P^2 = \varepsilon \mu E_P^2 \quad (12.42)$$

Energitätheten:

$$\begin{aligned} u_{\text{EM}} &= \frac{1}{2}(\mathbf{E}_P \cdot \mathbf{D}_P + \mathbf{B}_P \cdot \mathbf{H}_P) \\ &= \frac{1}{2}(\varepsilon E_P^2 + \mu^{-1} B_P^2) \\ &= \frac{1}{2}(\varepsilon E_P^2 + \varepsilon E_P^2) \\ &= \varepsilon E_P^2 = \frac{1}{\mu} B_P^2 \end{aligned} \quad (12.43)$$

Poyntingvektorn:

$$\begin{aligned}\mathbf{S} &= \mathbf{E}_P \times \mathbf{H}_P = \frac{1}{\mu} \mathbf{E}_P \times \mathbf{B}_P = \frac{1}{\mu} E_P B_P \hat{\mathbf{u}} \\&= \frac{1}{\mu} E_P \sqrt{\varepsilon \mu} E_P \hat{\mathbf{u}} = \frac{1}{\varepsilon \mu} \varepsilon \sqrt{\varepsilon \mu} E_P^2 \hat{\mathbf{u}} \\&= \frac{1}{\mu} \frac{n}{c} E_P^2 \hat{\mathbf{u}} \\&= \frac{1}{\mu} \frac{c}{n} B_P^2 \hat{\mathbf{u}} \\&= \frac{1}{\sqrt{\varepsilon \mu}} u_{\text{EM}} \hat{\mathbf{u}} = \frac{c}{n} u_{\text{EM}} \hat{\mathbf{u}} \\&= u_{\text{EM}} \mathbf{v}_f\end{aligned}\tag{12.44}$$

där $\mathbf{v}_f$ är vågens fas-hastighet.

Observera att enheten för $\mathbf{S}$ är $\text{J}/(\text{m}^2 \text{ s}) = \text{W}/\text{m}^2$, d.v.s. energi per area och tid, eller effekt per area. Detta är ju enheten för **intensitet**.

Jämför:

$$\mathbf{J} = \rho \mathbf{v} \quad (12.45)$$

Vågen transporterar alltså energi i.o.m. Poyntingvektorn.

Vid höga frekvenser går det inte alltid att mäta den momentana intensiteten $\mathbf{S}$, så man bestämmer istället tidsmedelvärdet $\langle \mathbf{S} \rangle$.

Vi bevisar nu ett teorem med vilket dylika tidsmedelvärden fås snabbare från de komplexa ursprungsuttrycken.

Teorem

Låt

$$f = f_0 e^{i\omega t} = (f_{0r} + i f_{0i}) e^{i\omega t} \quad (12.46)$$

$$g = g_0 e^{i\omega t} = (g_{0r} + i g_{0i}) e^{i\omega t} \quad (12.47)$$

Realdelarna är

$$f_r = f_{0r} \cos(\omega t) - f_{0i} \sin(\omega t) \quad (12.48)$$

$$g_r = g_{0r} \cos(\omega t) - g_{0i} \sin(\omega t) \quad (12.49)$$

medan imaginärdelarna är

$$f_i = f_{0r} \sin(\omega t) + f_{0i} \cos(\omega t) \quad (12.50)$$

$$g_i = g_{0r} \sin(\omega t) + g_{0i} \cos(\omega t) \quad (12.51)$$

Följande gäller:

$$\langle f_r g_r \rangle = \langle f_i g_i \rangle = \frac{1}{2}(f^* g)_r = \frac{1}{2}(f g^*)_r \quad (12.52)$$

Bevis:

$$\begin{aligned} f_r g_r &= f_{0r} g_{0r} \cos^2(\omega t) - f_{0r} \cos(\omega t) g_{0i} \sin(\omega t) \\ &\quad - f_{0i} \sin(\omega t) g_{0r} \cos(\omega t) + f_{0i} g_{0i} \sin^2(\omega t) \end{aligned} \quad (12.53)$$

så att

$$\langle f_r g_r \rangle = \frac{1}{2} f_{0r} g_{0r} + \frac{1}{2} f_{0i} g_{0i} \quad (12.54)$$

$$\begin{aligned} f_i g_i &= f_{0r} g_{0r} \sin^2(\omega t) + f_{0r} \sin(\omega t) g_{0i} \cos(\omega t) \\ &\quad + f_{0i} \cos(\omega t) g_{0r} \sin(\omega t) + f_{0i} g_{0i} \cos^2(\omega t) \end{aligned} \quad (12.55)$$

så att

$$\langle f_i g_i \rangle = \frac{1}{2} f_{0r} g_{0r} + \frac{1}{2} f_{0i} g_{0i} \quad (12.56)$$

$$\begin{aligned} (f^* g)_r &= [(f_{0r} + i f_{0i})^* (g_{0r} + i g_{0i})]_r \\ &= [(f_{0r} - i f_{0i})(g_{0r} + i g_{0i})]_r \\ &= f_{0r} g_{0r} + f_{0i} g_{0i} \end{aligned} \quad (12.57)$$

eftersom $(z_1 z_2)^* = z_1^* z_2^*$ så att vi kan plocka bort exponentialfunktionerna direkt.

$$\begin{aligned} (f g^*)_r &= [(f_{0r} + i f_{0i})(g_{0r} + i g_{0i})^*]_r \\ &= [(f_{0r} + i f_{0i})(g_{0r} - i g_{0i})]_r \\ &= f_{0r} g_{0r} + f_{0i} g_{0i} \end{aligned} \quad (12.58)$$

□

Vi kan nu enkelt bestämma tidsmedelvärdet för E_P^2 :

$$\begin{aligned}
 \langle E_P^2 \rangle &= \frac{1}{2}(\mathbf{E}^* \cdot \mathbf{E})_r \\
 &= \frac{1}{2}((E_{0p}e^{-i(-\phi)}\hat{\mathbf{p}} + E_{0s}\hat{\mathbf{s}})^* \cdot (E_{0p}e^{-i(-\phi)}\hat{\mathbf{p}} + E_{0s}\hat{\mathbf{s}}))_r \\
 &= \frac{1}{2}\sqrt{E_{0p}^2 + E_{0s}^2}
 \end{aligned} \tag{12.59}$$

Detta ger tidsmedelvärdet av Poynting-vektorn som

$$\langle \mathbf{S} \rangle = \frac{1}{\mu} \frac{n}{c} \frac{1}{2} \sqrt{E_{0p}^2 + E_{0s}^2} \hat{\mathbf{u}} \tag{12.60}$$

★ ★ ★

12.2. Hastighetsbegrepp

Det existerar ett flertal olika hastighetsbegrepp angående elektromagnetisk strålning:

- Fashastighet i vågens fortskridningsriktning, v_f , och $|v_f| \leq c$.
- Fashastighet i annan riktning, v'_f , $|v'_f| \leq c$ eller $|v'_f| \geq c$.
- Grupphastighet
- Hastigheten från väntevärdet av vågens position
- Energins transporthastighet
- . . .

Då man frågar efter en "vågs eller signals hastighet" bör man ha klart för sig vad för slags hastighet man egentligen är intresserad av.

12.2.1. Fashastighet

[J. Weber, *Am. J. Phys.* **22** (1954) 618; R. L. Smith, *Am. J. Phys.* **38** (1970) 978; A. M. Steinberg, "No thing goes faster than light", *Phys. World*, September (2000)]

Fashastigheten i vågens färdriktning ges av kravet att argumentet $\kappa \cdot \mathbf{r} - \omega t$ ska vara konstant.

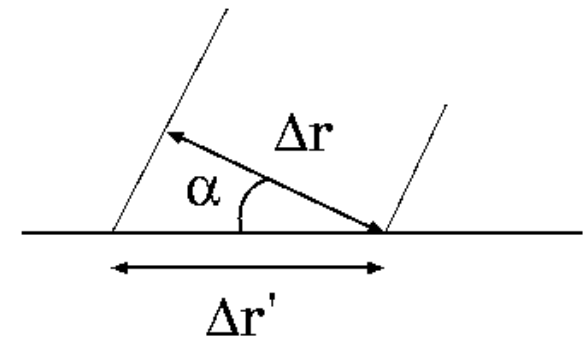
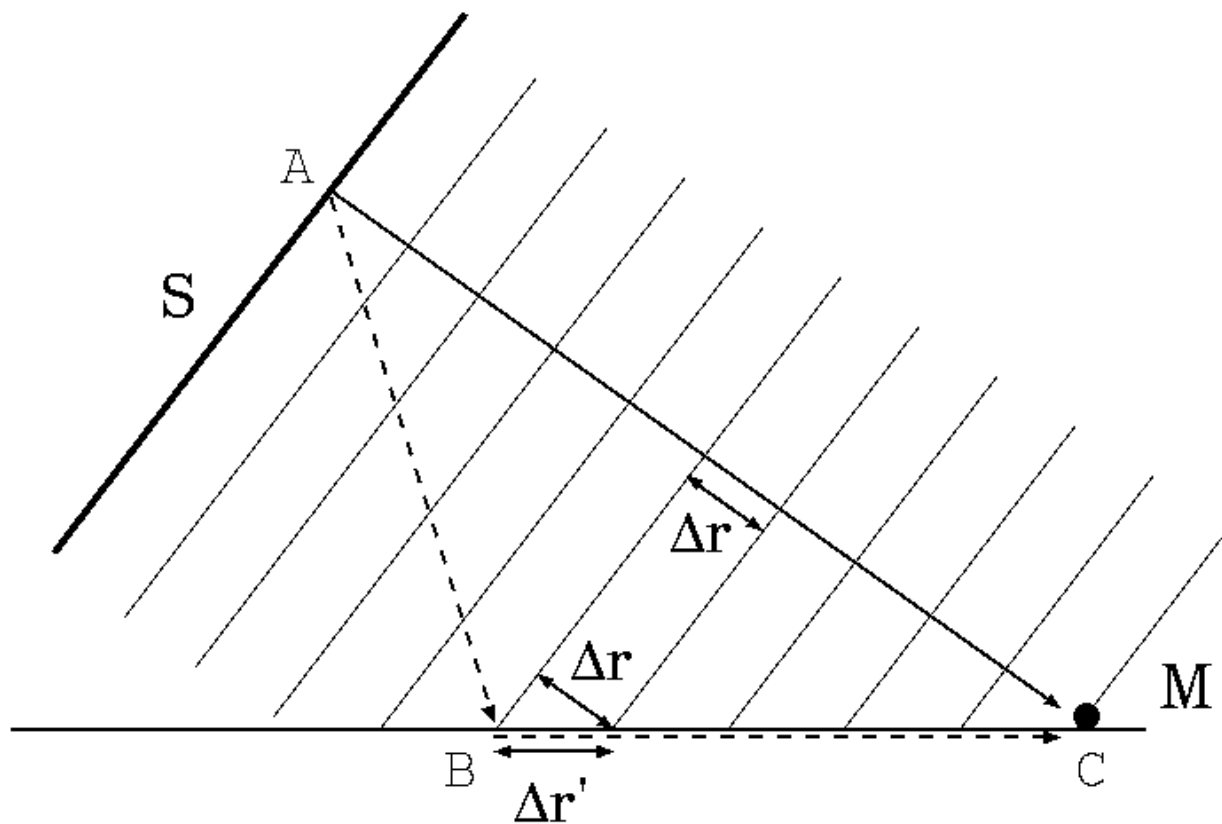
Om vi rör oss i vågens färdriktning gäller att $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + s\hat{\mathbf{u}}$ och

$$\boldsymbol{\kappa} \cdot \mathbf{r} = \boldsymbol{\kappa} \cdot \mathbf{r}_0 + \kappa s \quad (12.61)$$

så att

$$\frac{d}{dt} \boldsymbol{\kappa} \cdot \mathbf{r} = \kappa \frac{ds}{dt} = \kappa v_f = \omega \quad (12.62)$$

och $v_f = \omega/\kappa$.



Låt en signal — bestående av t.ex. N st sinusoidala våglängder — sändas ut från A . Signalen anländer till mottagaren i C , efter att ha rört sig den kortaste möjliga sträckan mellan A och C . Om mediet är icke-dispersivt är signalens hastighet c .

Enligt bilden sammanfaller detta med fashastigheten i signalens fortskridningsriktning, så att $v = \Delta r / \Delta t = c$.

Å andra sidan, om sträckan BC består av en ljuskänslig vägg så kommer ljuspulsen som faller in på väggen att röra sig längs väggen mot mottagaren i C , eftersom vågfronten utanför gör det. Hastigheten för denna ljusspalt längs med väggen rör sig med en hastighet $\Delta r' / \Delta t$.

Eftersom

$$\cos \alpha = \frac{\Delta r}{\Delta r'} \quad (12.63)$$

ger

$$v'_f = \frac{\Delta r'}{\Delta t} = \frac{1}{\cos \alpha} \frac{\Delta r}{\Delta t} = \frac{1}{\cos \alpha} v_f \quad (12.64)$$

vars storlek är $\geq |v_f| = c$!

Strider inte detta mot lagen att ingen signal kan röra sig snabbare än ljuset ?!

Förklaringen är att det som rör sig längs med väggen inte är en signal.

Ljusspalten är en sekundär effekt till signalen, och består egentligen av **skärningspunkten** mellan väggen och vågfronterna i den riktiga signalen.

Endast om vi har en mottagare och sändare i B , som skickar signalen från A vidare till C , så kommer en riktig signal att gå längs med sträckan ABC , med maximalt ljusets hastighet.

Observera, att mottagaren i C tar emot signalen längs med linjen AB och "signalen" längs med ACB vid samma tillfälle. För att mäta signalens hastighet dividerar mottagaren sträckan AC mellan sig själv och sändaren med den tid som gått åt för att signalen att anlända. Detta ger c som största möjliga hastighet för information att passera mellan A och C .

12.2.2. Grupphastighet

[Jackson; J. Weber, *Am. J. Phys.* **22** (1954) 618; H. M. Bradford, *Am. J. Phys.* **44** (1976) 1058; P. C. Peters, *Am. J. Phys.* **56** (1988) 129; K. T. McDonald, *Am. J. Phys.* **66**(8) (1998) 656-658]

En vågs eller ett vågpakets **grupphastighet** definieras som

$$v_g = \left. \frac{d\omega}{d\kappa} \right|_{\kappa=\kappa_0} \quad (12.65)$$

evaluerat i nåt värde κ_0 av vågvektorn κ .

Denna definition kan motiveras med följande resonemang.

Låt ett vågpakets amplitudfunktion vara $\tilde{A}(\kappa)$.

Antag att $\tilde{A}(\kappa)$ är stor då $\kappa = \kappa_0$ och liten för övriga värden. Detta betyder att vågpaketet innehåller många vågor med vågtalet exakt lika med eller mycket nära κ_0 .

Låt vågen röra sig längs med z -axeln, så att $\kappa = \kappa \hat{\mathbf{z}}$ och $\kappa_0 = \kappa_0 \hat{\mathbf{z}}$.

Expandera vinkelfrekvensen kring vågtalet κ_0 enligt

$$\omega(\kappa) \approx \omega(\kappa_0) + (\kappa - \kappa_0) \partial_\kappa \omega(\kappa) \Big|_{\kappa=\kappa_0} \equiv \omega_0 + \omega'_0(\kappa - \kappa_0) \quad (12.66)$$

Elfältet blir

$$\begin{aligned} \tilde{E}(z, t) &= \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int dV_\kappa \tilde{A}(\kappa) e^{i\kappa \cdot z} e^{-i\omega(\kappa)t} \\ &\approx \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int dV_\kappa \tilde{A}(\kappa) e^{i\kappa \cdot z} e^{-i\omega_0 t} e^{-i\omega'_0 t(\kappa - \kappa_0)} \\ &= e^{-i\omega_0 t + i\omega'_0 t \kappa_0} \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int dV_\kappa \tilde{A}(\kappa) e^{i(z - \omega'_0 t)\kappa} \\ &= e^{-it(\omega_0 - \omega'_0 \kappa_0)} E(z - \omega'_0 t, 0) \end{aligned} \quad (12.67)$$

Detta är en funktion i $z - \omega'_0 t$. Detta motsvarar en våg som rör sig med hastigheten ω'_0 . Amplituden varierar periodiskt med tiden, p.g.a. exponentialfaktorn.

Vågens hastighet är alltså

$$v_g = \omega'_0 = \left. \frac{d\omega}{d\kappa} \right|_{\kappa=\kappa_0} \quad (12.68)$$

och kallas **grupphastighet**.

I allmänhet gäller

$$v_f = \frac{c}{n(\kappa)} \quad (12.69)$$

så att

$$\kappa = \frac{\omega(\kappa)}{v_f} = \frac{\omega(\kappa)n(\kappa)}{c} \quad (12.70)$$

Detta ger

$$\frac{1}{v_g} = \frac{d\kappa}{d\omega} = \frac{n}{c} + \frac{\omega}{c} \frac{dn}{d\omega} = \frac{n + \omega dn/d\omega}{c} \quad (12.71)$$

och

$$v_g = \frac{c}{n + \omega dn/d\omega} \quad (12.72)$$

För **normal dispersion** gäller $n \geq 1$ och $dn/d\omega > 0$ så att $v_g < c$.

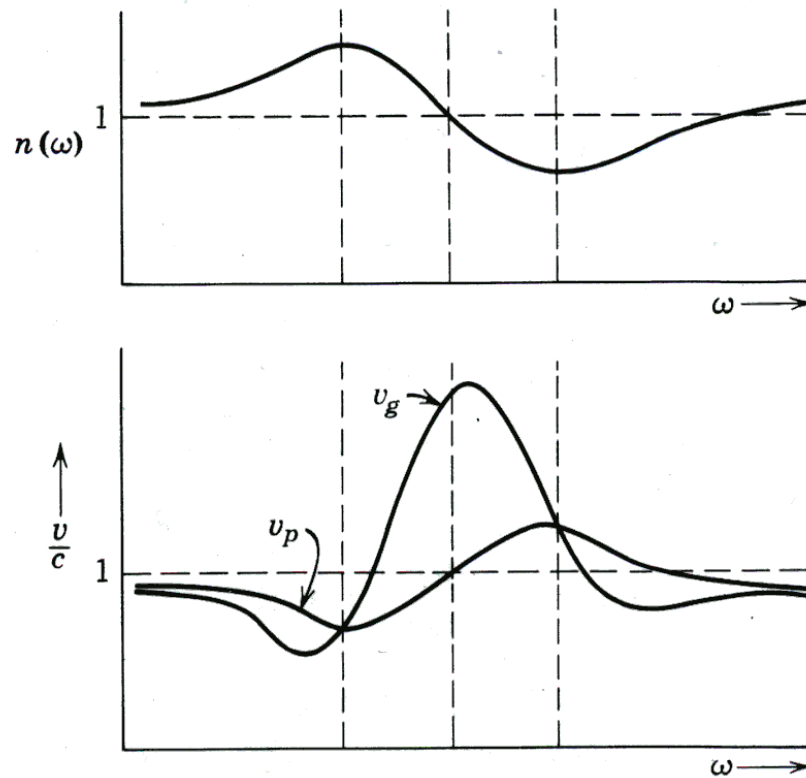


Fig. 7.13 Index of refraction $n(\omega)$ as a function of frequency ω at a region of anomalous dispersion; phase velocity v_p and group velocity v_g as functions of ω .

[Jackson]

I vissa frekvensområden med anomalisk/abnormal (eng. *anomalous*) dispersion kan dock gälla att $dn/d\omega \ll 0$, så att man rentav kan få $v_g > c$, så att vågen tycks röra sig snabbare än ljuset !

Denna paradox är snabbt löst genom att inse att en snabb variation i $n = n(\omega)$ innebär en snabb variation i $\kappa = \kappa(\omega)$ så kan vi inte längre göra expansionen

$$\omega(\kappa) \approx \omega(\kappa_0) + \left. \frac{d\omega}{d\kappa} \right|_{\kappa=\kappa_0} (\kappa - \kappa_0) \quad (12.73)$$

Detta betyder att

$$v_g = \omega'_0 = \left. \frac{d\omega}{d\kappa} \right|_{\kappa=\kappa_0} \quad (12.74)$$

inte längre duger som definition av vågens hastighet.

12.2.3. Hastigheten från väntevärdet av vågens position

[E. E. Bergmann, *Am. J. Phys.* **44**(9) (1976) 890-891, H. M. Bradford, *Am. J. Phys.* **44**(11) (1976) 1058-1063]

En möjlig definition av ett vågpakets hastighet får vi från väntevärdet av vågens position. Väntevärdet är

$$\langle \mathbf{r}(t) \rangle_r \quad (12.75)$$

$$= \int dV_r \tilde{E}^*(\mathbf{r}, t) \mathbf{r} \tilde{E}(\mathbf{r}, t) \quad (12.76)$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^3} \int dV_r \int dV_\kappa \int dV_{\kappa'} \tilde{A}^*(\boldsymbol{\kappa}) e^{i\omega(\boldsymbol{\kappa})t} e^{-i\boldsymbol{\kappa} \cdot \mathbf{r}} \mathbf{r} \tilde{A}(\boldsymbol{\kappa}') e^{-i\omega(\boldsymbol{\kappa}')t} e^{i\boldsymbol{\kappa}' \cdot \mathbf{r}}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int dV_{\kappa} \int dV_{\kappa'} \tilde{A}^*(\boldsymbol{\kappa}) e^{i\omega(\boldsymbol{\kappa})t} \left[\frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int dV_r \mathbf{r} e^{i\boldsymbol{\kappa}' \cdot \mathbf{r}} e^{-i\boldsymbol{\kappa} \cdot \mathbf{r}} \right] \tilde{A}(\boldsymbol{\kappa}') e^{-i\omega(\boldsymbol{\kappa}')t} \\
&= \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int dV_{\kappa} \int dV_{\kappa'} \tilde{A}^*(\boldsymbol{\kappa}) e^{i\omega(\boldsymbol{\kappa})t} F \tilde{A}(\boldsymbol{\kappa}') e^{-i\omega(\boldsymbol{\kappa}')t}
\end{aligned} \tag{12.77}$$

där F är Fouriertransformen av $\mathbf{r} e^{i\boldsymbol{\kappa}' \cdot \mathbf{r}}$:

$$\begin{aligned}
F &= \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int dV_r \mathbf{r} e^{i\boldsymbol{\kappa}' \cdot \mathbf{r}} e^{-i\boldsymbol{\kappa} \cdot \mathbf{r}} = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int dV_r \mathbf{r} e^{i(\boldsymbol{\kappa}' - \boldsymbol{\kappa}) \cdot \mathbf{r}} \\
&= \frac{1}{i} \nabla_{\boldsymbol{\kappa}'} \delta(\boldsymbol{\kappa}' - \boldsymbol{\kappa})
\end{aligned} \tag{12.78}$$

Detta ger

$$\begin{aligned}
&\langle \mathbf{r}(t) \rangle_r \tag{12.79} \\
&= \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int dV_{\boldsymbol{\kappa}} \int dV_{\boldsymbol{\kappa}'} \tilde{A}^*(\boldsymbol{\kappa}) e^{i\omega(\boldsymbol{\kappa})t} \frac{1}{i} \nabla_{\boldsymbol{\kappa}'} \delta(\boldsymbol{\kappa}' - \boldsymbol{\kappa}) \tilde{A}(\boldsymbol{\kappa}') e^{-i\omega(\boldsymbol{\kappa}')t} \\
&= \frac{1}{i(2\pi)^{3/2}} \int dV_{\boldsymbol{\kappa}} \tilde{A}^*(\boldsymbol{\kappa}) e^{i\omega(\boldsymbol{\kappa})t} \left[\int dV_{\boldsymbol{\kappa}'} \nabla_{\boldsymbol{\kappa}'} \delta(\boldsymbol{\kappa}' - \boldsymbol{\kappa}) \tilde{A}(\boldsymbol{\kappa}') e^{-i\omega(\boldsymbol{\kappa}')t} \right] \\
&= -\frac{1}{i(2\pi)^{3/2}} \int dV_{\boldsymbol{\kappa}} \tilde{A}^*(\boldsymbol{\kappa}) e^{i\omega(\boldsymbol{\kappa})t} \nabla_{\boldsymbol{\kappa}} \tilde{A}(\boldsymbol{\kappa}) e^{-i\omega(\boldsymbol{\kappa})t}
\end{aligned} \tag{12.80}$$

där vi använde regeln

$$\int dV_r f(\mathbf{r}) \nabla \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') = - \int dV_r (\nabla f(\mathbf{r})) \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') = - \nabla f(\mathbf{r}) \big|_{\mathbf{r}=\mathbf{r}'} \tag{12.81}$$

Vi får nu

$$\begin{aligned}
 & \langle \mathbf{r}(t) \rangle_r \tag{12.82} \\
 = & -\frac{1}{i(2\pi)^{3/2}} \int dV_\kappa \tilde{A}^*(\boldsymbol{\kappa}) e^{i\omega(\boldsymbol{\kappa})t} \nabla_\kappa \tilde{A}(\boldsymbol{\kappa}) e^{-i\omega(\boldsymbol{\kappa})t} \\
 = & -\frac{1}{i(2\pi)^{3/2}} \int dV_\kappa \tilde{A}^*(\boldsymbol{\kappa}) e^{i\omega(\boldsymbol{\kappa})t} e^{-i\omega(\boldsymbol{\kappa})t} \nabla_\kappa \tilde{A}(\boldsymbol{\kappa}) \\
 & + i \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int dV_\kappa \tilde{A}^*(\boldsymbol{\kappa}) e^{i\omega(\boldsymbol{\kappa})t} \tilde{A}(\boldsymbol{\kappa}) \nabla_\kappa e^{-i\omega(\boldsymbol{\kappa})t} \\
 = & -\frac{1}{i(2\pi)^{3/2}} \int dV_\kappa \tilde{A}^*(\boldsymbol{\kappa}) i \nabla_\kappa \tilde{A}(\boldsymbol{\kappa}) + t \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int dV_\kappa |\tilde{A}(\boldsymbol{\kappa})|^2 \nabla_\kappa \omega(\boldsymbol{\kappa}) \\
 = & -\frac{1}{i(2\pi)^{3/2}} \int dV_\kappa \tilde{A}^*(\boldsymbol{\kappa}) \nabla_\kappa \tilde{A}(\boldsymbol{\kappa}) + t \langle \nabla_\kappa \omega(\boldsymbol{\kappa}) \rangle_r \tag{12.83}
 \end{aligned}$$

Jämför:

$$\begin{aligned}
 \langle \mathbf{r}(t=0) \rangle_r &= -\frac{1}{i(2\pi)^{3/2}} \int dV_\kappa \tilde{A}^*(\boldsymbol{\kappa}) e^{i\omega(\boldsymbol{\kappa})0} \nabla_\kappa \tilde{A}(\boldsymbol{\kappa}) e^{-i\omega(\boldsymbol{\kappa})0} \\
 &= -\frac{1}{i(2\pi)^{3/2}} \int dV_\kappa \tilde{A}^*(\boldsymbol{\kappa}) \nabla_\kappa \tilde{A}(\boldsymbol{\kappa})
 \end{aligned} \tag{12.84}$$

Vi får alltså:

$$\langle \mathbf{r}(t) \rangle_r = \langle \mathbf{r}(0) \rangle_r + t \langle \nabla_\kappa \omega(\boldsymbol{\kappa}) \rangle_r \tag{12.85}$$

$$\equiv \langle \mathbf{r}(0) \rangle_r + t \mathbf{V} \tag{12.86}$$

där $\mathbf{V}$ kan kallas vågpaketets medelhastighet:

$$\mathbf{V} = \langle \nabla_\kappa \omega(\boldsymbol{\kappa}) \rangle_r \tag{12.87}$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int dV_\kappa |\tilde{A}(\boldsymbol{\kappa})|^2 \nabla_\kappa \omega(\boldsymbol{\kappa}) \tag{12.88}$$

Konsistens-check: Om vinkelfrekvensen kan approximeras som

$$\omega \approx \omega(\boldsymbol{\kappa}_0) + (\boldsymbol{\kappa} - \boldsymbol{\kappa}_0) \cdot \nabla_{\boldsymbol{\kappa}} \omega \big|_{\boldsymbol{\kappa}=\boldsymbol{\kappa}_0} \quad (12.89)$$

får vi

$$\begin{aligned} \mathbf{V} &\approx \left\langle \nabla_{\boldsymbol{\kappa}} \left(\boldsymbol{\kappa} \cdot \nabla_{\boldsymbol{\kappa}} \omega \big|_{\boldsymbol{\kappa}=\boldsymbol{\kappa}_0} \right) \right\rangle_r \\ &= \left\langle \left(\nabla_{\boldsymbol{\kappa}} \omega \big|_{\boldsymbol{\kappa}=\boldsymbol{\kappa}_0} \cdot \nabla_{\boldsymbol{\kappa}} \right) \boldsymbol{\kappa} \right\rangle_r \\ &= \left\langle \nabla_{\boldsymbol{\kappa}} \omega \big|_{\boldsymbol{\kappa}=\boldsymbol{\kappa}_0} \right\rangle_r \\ &= \nabla_{\boldsymbol{\kappa}} \omega \big|_{\boldsymbol{\kappa}=\boldsymbol{\kappa}_0} \end{aligned} \quad (12.90)$$

som är samma svar som tidigare.

12.2.4. Energins transporthastighet

[R. L. Smith, *Am. J. Phys.* **38** (1970) 978; F. S. Johnson, *Am. J. Phys.* **58** (1990) 1044; A. Bers, *Am. J. Phys.* **68** (2000) 482]

Då man i praktiken vill mäta en signals hastighet genom ett medium använder man en detektor. Denna ger utslag då den träffas av en puls med en styrka över ett visst gränsvärde.

Antag att signalen som sänds ut har den maximala intensiteten $I_m = E_{r,m}^2$.

Som villkor för att signalen skall anses ha anlänt till detektorn kan man ha att den uppmätta intensiteten skall vara $\geq I_m/\alpha$, där $\alpha \geq 1$.

Då dispersiva eller dissipativa effekter inte spelar någon större roll kommer detta villkor att ge korrekt uppskattning av vågpaketets hastighet.

Då dispersion och dissipation förekommer, kommer utgångssignalen att dämpas. Om t.ex. hela pulsen dämpas med faktorn $\beta > \alpha$, där $\beta = I_m/I'_m$ och I'_m är den mottagna signalens maximala intensitet, så kommer $I'_m < I_m/\alpha$ och detektorn mäter inte alls upp den anlända pulsen. Signalens hastighet kan då tyckas vara 0.

Man kan visa att för media med normal dispersion och svag absorption vid de frekvenser som förekommer i vågpaketet så gäller att

$$\langle S \rangle = \langle u_{\text{EM}} \rangle v_f = \langle u_t \rangle v_g \quad (12.91)$$

där

$$\langle u_t \rangle = \langle u_{\text{EM}} \rangle + \langle u_{\text{abs}} \rangle \quad (12.92)$$

där u_{abs} är den energitäthet som absorberas av mediet.

Detta visar att energin – och en elektromagnetisk signal — färdas med grupp hastigheten i ett medium utan dissipation och då vågpaketet är koncentrerat omkring en bestämd vågvektor κ_0 (som ger v_g).