

10. Kretsar med långsamt varierande ström

[RMC]

10.1. Villkor för "långsamt varierande"

I detta kapitel behandlas den teori som kan användas för att analysera kretsar med långsamt varierande ström.

En ström är "långsamt varierande" om den inte ger upphov till signifikanta energiförluster p.g.a. strålning.

Detta villkor är ekvivalent med att kräva att kretsens linjära dimension L är mycket mindre än våglängden λ i vakuum för den drivande spänningens vinkelfrekvens ω (i enheter av 1/s):

$$L \ll \lambda = \frac{2\pi}{\omega} c \equiv \frac{c}{\nu} \quad (10.1)$$

där ν är frekvensen i enheter av hertz (Hz).

Om vi använder $L = \lambda/10$ som villkor, får vi följande linjära maximidimensioner:

Frekvens (Hz)	$\lambda/10$ (m)
50	6×10^5
10^6 (AM)	30
$10 \cdot 10^6$	3,0
$100 \cdot 10^6$ (FM, TV)	0,30
10^9 (mobiltelefoni)	0,030
10^{10} (mikrovågor)	0,0030

För en normalstor krets kan vi med andra ord använda drivande spänningar med frekvenser upp till $\sim 10^7$ Hz, förutsatt att analysen sker med de metoder som vi nu kommer att behandla.

10.2. Transient och stationärt beteende

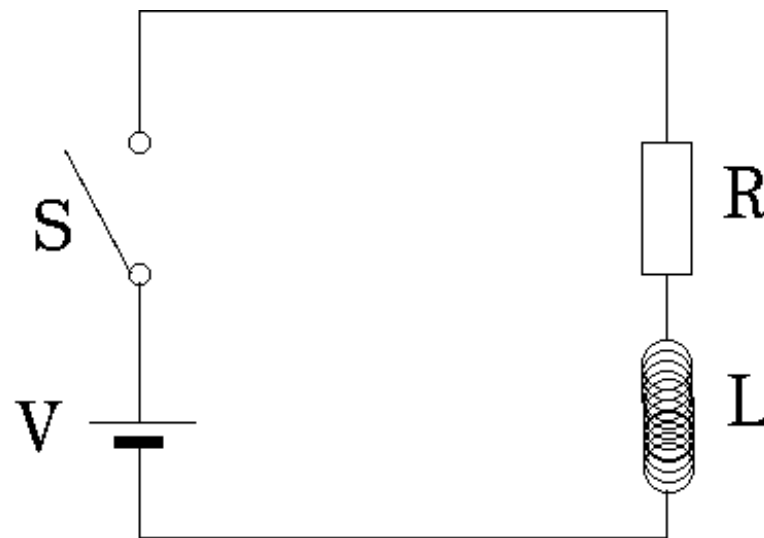
Då en krets kopplas till en periodisk eller konstant spänning uppkommer en varierande — **transient** — ström, som så småningom stabiliseras till en periodisk eller konstant ström. Detta stabila tillstånd kalls också **stationärt** (eng. *steady state*).

Vi kommer i det följande att behandla transient beteende i kretsar med konstant drivande spänning och stationärt beteende för harmoniska drivande spänningar.

10.3. Transient beteende för konstanta drivspänningar

Vi granskar nu det transienta beteendet hos några elementära kretsar, som drivs av en konstant spänning.

10.3.1. RL -krets



Kirchhoffs II lag

$$\mathcal{E} + V = RI \quad (10.2)$$

ger

$$V = RI + L \frac{dI}{dt} \quad (10.3)$$

Lösningen till denna differentialekvation är

$$I(t) = \frac{V}{R} - I_1 e^{-t/(L/R)} \equiv \frac{V}{R} - I_1 e^{-t/t_c} \quad (10.4)$$

där I_1 är en konstant.

Vid starten $t = t_0$ sluts kretsen, så $I(t = t_0) = 0$:

$$0 = \frac{V}{R} - I_1 e^{-t_0/t_c} \quad (10.5)$$

Detta ger

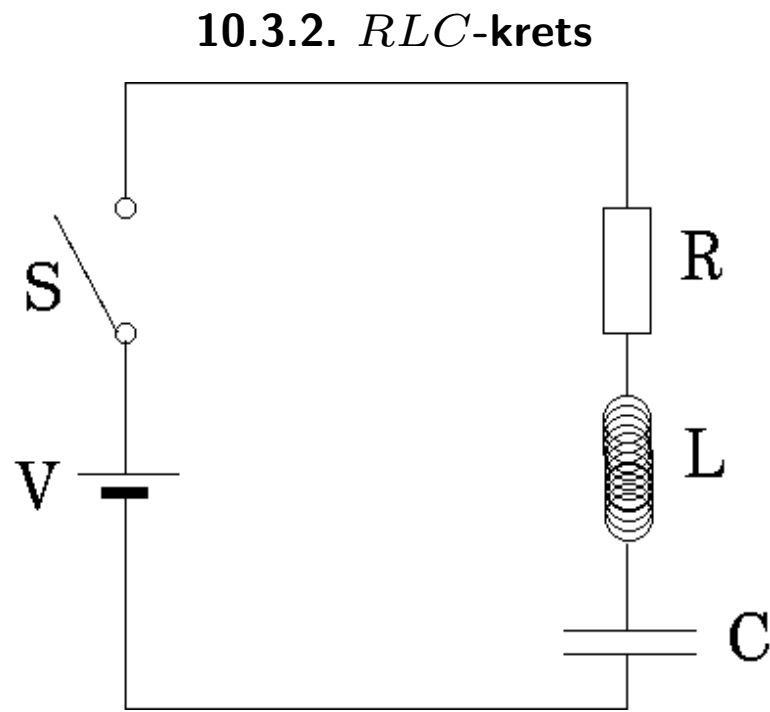
$$I_1 = \frac{V}{R} e^{t_0/t_c} \quad (10.6)$$

så att vi får

$$I(t) = \frac{V}{R} \left[1 - e^{-(t-t_0)/t_c} \right] \quad (10.7)$$

Tidskonstanten för denna krets är alltså

$$t_c = \frac{L}{R} \quad (10.8)$$



Kirchhoffs II lag:

$$V = RI + LI'(t) + \frac{Q}{C} = RI + LI'(t) + \frac{1}{C} \int_0^t dt I(t) \quad (10.9)$$

där vi betecknat $I'(t) = dI/dt$.

Derivera en gång med avseende på tiden:

$$\frac{dV}{dt} = RI'(t) + LI''(t) + \frac{I}{C} = 0 \quad (10.10)$$

eftersom spänningen är konstant. Vi får

$$I''(t) + \frac{R}{L}I'(t) + \frac{1}{LC}I = 0 \quad (10.11)$$

Lösningen är

$$I(t) = \left(Ae^{i\omega t} + Be^{-i\omega t} \right) e^{-t/(2L/R)} \quad (10.12)$$

där

$$\omega = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}} \quad (10.13)$$

Vi bör nu ta reda på värdet på (de komplexvärda) konstanterna A, B .

Vid $t = 0$ gäller $I(t = 0) = 0$:

$$0 = A + B \implies B = -A \quad (10.14)$$

så att

$$I(t) = A \left(e^{i\omega t} - e^{-i\omega t} \right) e^{-t/(2L/R)} = A2i \sin(\omega t) e^{-t/(2L/R)} \quad (10.15)$$

Strömmen är reell, så A måste vara imaginär. Definiera $D = 2Ai$ så att vi får

$$I(t) = D \sin(\omega t) e^{-t/(2L/R)} \quad (10.16)$$

D är fortfarande okänd. För att bestämma det återgår vi till det ursprungliga uttrycket för V , vilket ger:

$$V = RI(t) + LI'(t) + \frac{1}{C} \int_0^t dt I(t) \quad (10.17)$$

Då $t = 0$ gäller $I = 0$ så man får med att derivera $I(t)$ som just bestämts ovan:

$$V = LI'(t) = LD(\omega \cos(\omega t) - \sin(\omega t) \frac{1}{2L/R}) e^{-t/(2L/R)} \Big|_{t=0} = LD\omega \quad (10.18)$$

så att

$$D = \frac{V}{\omega L} = \frac{V}{\sqrt{L/C - R^2/4}} \quad (10.19)$$

Vi har nu fått en oskillerande krets, trots att den drivande spänningen är konstant. Dock avtar amplituden med tiden, så denna oskillation dör bort efter några tidskonstanter t_c . Denna är

$$t_c = \frac{2L}{R} \quad (10.20)$$

10.4. Stationärt beteende för harmoniska drivspänningar

Vi granskar nu det stationära beteendet hos några elementära kretsar, som drivs av en harmonisk (sinusoidal) spänning.

I dylika räkningar är det mycket enklare att räkna med komplexvärda spänningar och strömmar, eftersom de trigonometriska funktionerna då ersätts med exponentialfunktioner, som är lättare att manipulera.

Om vi använder den drivande spänningen

$$V(t) = V_0 e^{i\omega t} \quad (10.21)$$

får vi ut en komplexvärd ström

$$I(t) = I_0 e^{i\omega t} \quad (10.22)$$

För att få den fysikaliska strömmen måste vi först besluta om vår fysikaliska spänning är real- eller imaginärdelen av $V_0 e^{i\omega t}$. Om vi väljer imaginärdelen har vi

$$V_P(t) = \mathbf{Im}[V(t)] = V_0 \sin(\omega t) \quad (10.23)$$

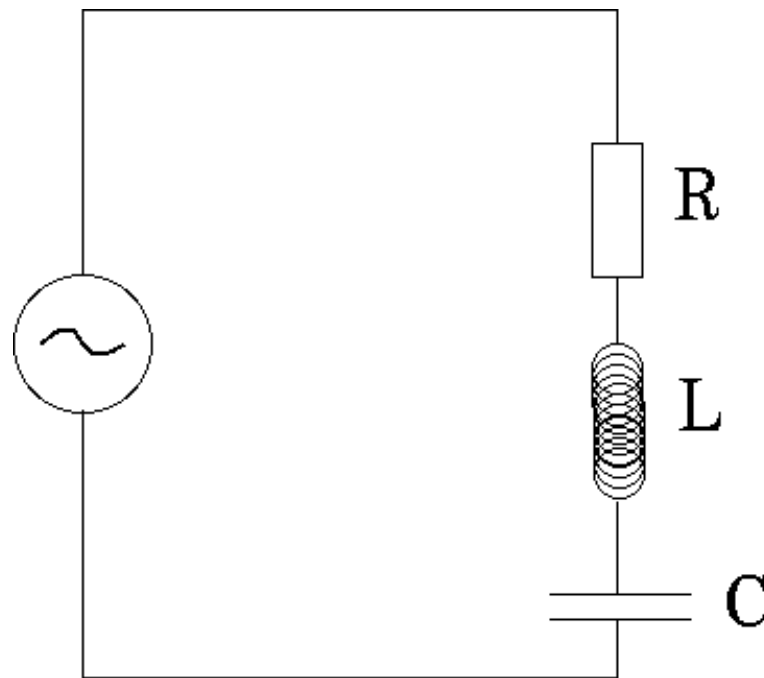
Vi måste nu göra samma val för att få den fysikaliska strömmen:

$$I_P(t) = \mathbf{Im}[I(t)] \quad (10.24)$$

★ ★ ★

Oftast väljer man att V_0 är reell, men detta betyder inte att I_0 är det. I själva verket inkorporerar man en eventuell fasförskjutning mellan spänning och ström i den komplexa konstanten I_0 .

10.4.1. *RLC*-krets



Kirchhoffs II lag:

$$V = RI + LI'(t) + \frac{1}{C} \int_0^t dt I(t) \quad (10.25)$$

Derivera med avseende på t :

$$\frac{dV}{dt} = RI'(t) + LI''(t) + \frac{I}{C} \quad (10.26)$$

Detta ger nu

$$i\omega V_0 e^{i\omega t} = i\omega R I_0 e^{i\omega t} - \omega^2 L I_0 e^{i\omega t} + \frac{I_0}{C} e^{i\omega t} \quad (10.27)$$

där vi har skrivit strömmen som $I(t) = I_0 e^{i\omega t}$.

Dividera nu med $i\omega e^{i\omega t}$:

$$\begin{aligned} V_0 &= (R + i\omega L + \frac{1}{i\omega C}) I_0 \\ &\equiv Z I_0 \end{aligned} \quad (10.28)$$

där Z kallas **impedans**. För denna seriekopplade krets har vi att

$$Z = R + i\omega L - i\frac{1}{\omega C} \equiv R + i(X_L + X_C) \quad (10.29)$$

där X_L är den **induktiva reaktansen** och X_C den **kapacitiva reaktansen**.

Impedansen kan alltid skrivas

$$Z \equiv |Z|e^{i\phi} \quad (10.30)$$

där $|Z|$ är impedansens storlek och ϕ en fasförskjutning.

Det gäller i detta fall ur grundläggande komplexalgebra att

$$|Z| = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2} \quad (10.31)$$

$$\tan \phi = \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R} \quad (10.32)$$

Strömmen är nu

$$I(t) = \frac{V(t)}{Z} = \frac{V(t)}{|Z|e^{i\phi}} = \frac{V_0}{|Z|}e^{i\omega t - i\phi} \quad (10.33)$$

Den verkliga strömmen är

$$\begin{aligned}
I_P(t) &= \mathbf{Im}[I(t)] = \mathbf{Im}\left[\frac{V(t)}{Z}\right] \\
&= \frac{V_0}{|Z|} \mathbf{Im}[e^{i(\omega t - \phi)}] \\
&= \frac{V_0}{|Z|} \sin(\omega t - \phi)
\end{aligned} \tag{10.34}$$

I denna krets kommer strömmen att variera harmoniskt, så att den är före eller efter spänningen, beroende på tecknet för fasvinkeln ϕ .

Låt oss se hur resistansen, induktansen och kapacitansen kan påverka strömmens styrka var för sig.

Vi har ju

$$\frac{X_L}{X_C} = \frac{\omega L}{1/(\omega C)} = \frac{\omega^2}{1/(LC)} \quad (10.35)$$

Från detta får vi två huvudsakliga asymptotiska fall:

(1) Om $X_L \gg X_C$ så gäller $\omega \gg 1/\sqrt{LC}$ och

$$|Z| \approx \sqrt{R^2 + \omega^2 L^2} \quad (10.36)$$

$$\tan \phi \approx \frac{\omega L}{R} \quad (10.37)$$

(1 a) Om nu $R \ll \omega L$ så gäller $\omega \gg R/L$ och

$$|Z| \approx \omega L \quad (10.38)$$

$$\tan \phi \approx \infty \Rightarrow \phi \approx \pi/2 \quad (10.39)$$

I det här fallet ges strömmens amplitud alltså av $V_0/(\omega L)$. Om vinkelfrekvensen är tillräckligt stor

(men så att den uppfyller villkoret för "långsamt varierande" ström) så blir strömmen liten.

(1 b) Om istället $R \gg \omega L$ så gäller $\omega \ll R/L$ och

$$|Z| \approx R \quad (10.40)$$

$$\tan \phi \approx 0 \quad \Rightarrow \quad \phi \approx 0 \quad (10.41)$$

(2) Om $X_L \ll X_C$ så gäller $\omega \ll 1/\sqrt{LC}$ och

$$|Z| \approx \sqrt{R^2 + 1/(\omega^2 C^2)} \quad (10.42)$$

$$\tan \phi \approx -\frac{1}{\omega RC} \quad (10.43)$$

(2 a) Om nu $R \ll 1/(\omega C)$ så gäller $\omega \ll 1/(RC)$ och

$$|Z| \approx 1/(\omega C) \quad (10.44)$$

$$\tan \phi \approx -\infty \quad \Rightarrow \quad \phi \approx -\pi/2 \quad (10.45)$$

Strömmens amplitud blir nu $\omega C V_0$, d.v.s. ju större kapacitans och vinkelfrekvens vi använder, desto starkare blir strömmen.

(2 b) Om istället $R \gg 1/(\omega C)$ så gäller $\omega \gg 1/(RC)$ och

$$|Z| \approx R \quad (10.46)$$

$$\tan \phi \approx 0 \quad \Rightarrow \quad \phi \approx 0 \quad (10.47)$$

Resonans

Om den drivande spänningen har en sådan vinkelfrekvens ω_R att $\phi = 0$ så kommer ström och spänning att vara i fas (fall 1b och 2b ovan). Detta betyder att $|Z| = R$ så att:

$$\omega_R = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad (10.48)$$

Detta ger

$$I_P(t) = \frac{V_0}{R} \sin(\omega_R t) \quad (10.49)$$

Strömmen ser alltså ut som strömmen i en ren R -krets, och spänning och ström sägs vara i **resonans**.

10.5. Serie- och parallellkoppling av impedanser

I föregående sektion fick vi att för en krets där R, L, C är **kopplade i serie** kan den drivande spänningen skrivas

$$\begin{aligned} V &= V_0 e^{i\omega t} \\ &= Z I_0 e^{i\omega t} = Z I \\ &= \left(R + i\omega L + \frac{1}{i\omega C} \right) I \\ &\equiv (Z_R + Z_L + Z_C) I \end{aligned} \tag{10.50}$$

eftersom R, L, C är i serie.

Vi har nu visat att **impedanserna för en resistor, induktor och kondensator** är

$$Z_R = R \quad (10.51)$$

$$Z_L = i\omega L \quad (10.52)$$

$$Z_C = \frac{1}{i\omega C} = -\frac{i}{\omega C} \quad (10.53)$$

Impedansen för en seriekoppling av N impedanser är alltså

$$Z = \sum_{i=1}^N Z_i \quad (10.54)$$

Om impedanserna är kopplade parallellt så har vi att spänningen över dem är densamma, $V_i = V_j$, så att

$$V = V_i = V_j \Rightarrow Z_i I_i = Z_j I_j \quad (10.55)$$

Men totalströmmen är

$$I = \frac{V}{Z} = I_i + I_j = V \left(\frac{1}{Z_i} + \frac{1}{Z_j} \right) \quad (10.56)$$

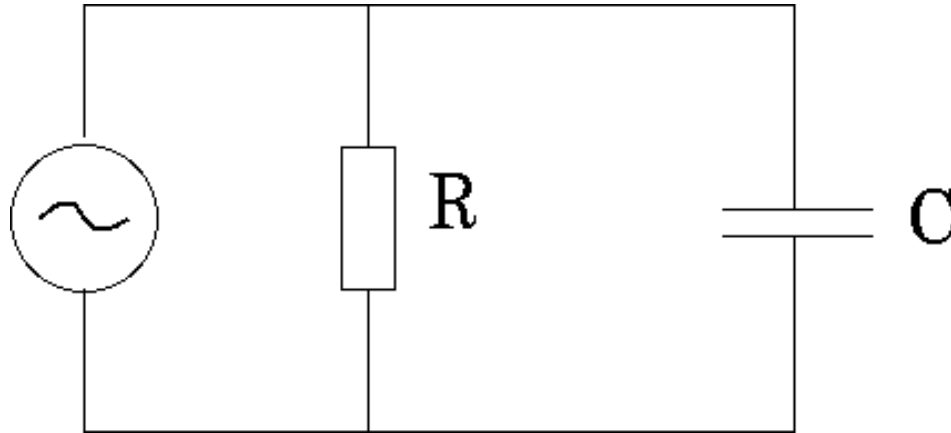
så att

$$\frac{1}{Z} = \left(\frac{1}{Z_i} + \frac{1}{Z_j} \right) \quad (10.57)$$

Impedansen för en parallellkoppling av N impedanser ges alltså av uttrycket

$$\frac{1}{Z} = \sum_{i=1}^N \frac{1}{Z_i} \quad (10.58)$$

Exempel : R och C parallellkopplade. Bestäm strömmarna.



Kirchhoffs II lag:

$$V(t) = V_0 e^{i\omega t} = RI_1(t) = \frac{1}{C} \int_0^t dt I_2(t) \quad (10.59)$$

där

$$I(t) = I_1(t) + I_2(t) \quad (10.60)$$

Vi får

$$I_1(t) = \frac{V_0}{R} e^{i\omega t} \quad (10.61)$$

och

$$V_0 e^{i\omega t} = \frac{1}{C} \int_0^t dt I_2(t) \quad (10.62)$$

Derivera med avseende på tiden:

$$i\omega V_0 e^{i\omega t} = \frac{1}{C} I_2(t) \quad (10.63)$$

Vi får

$$I_2(t) = i\omega C V_0 e^{i\omega t} = \omega C V_0 e^{i(\omega t + \pi/2)} \quad (10.64)$$

Totala strömmen är

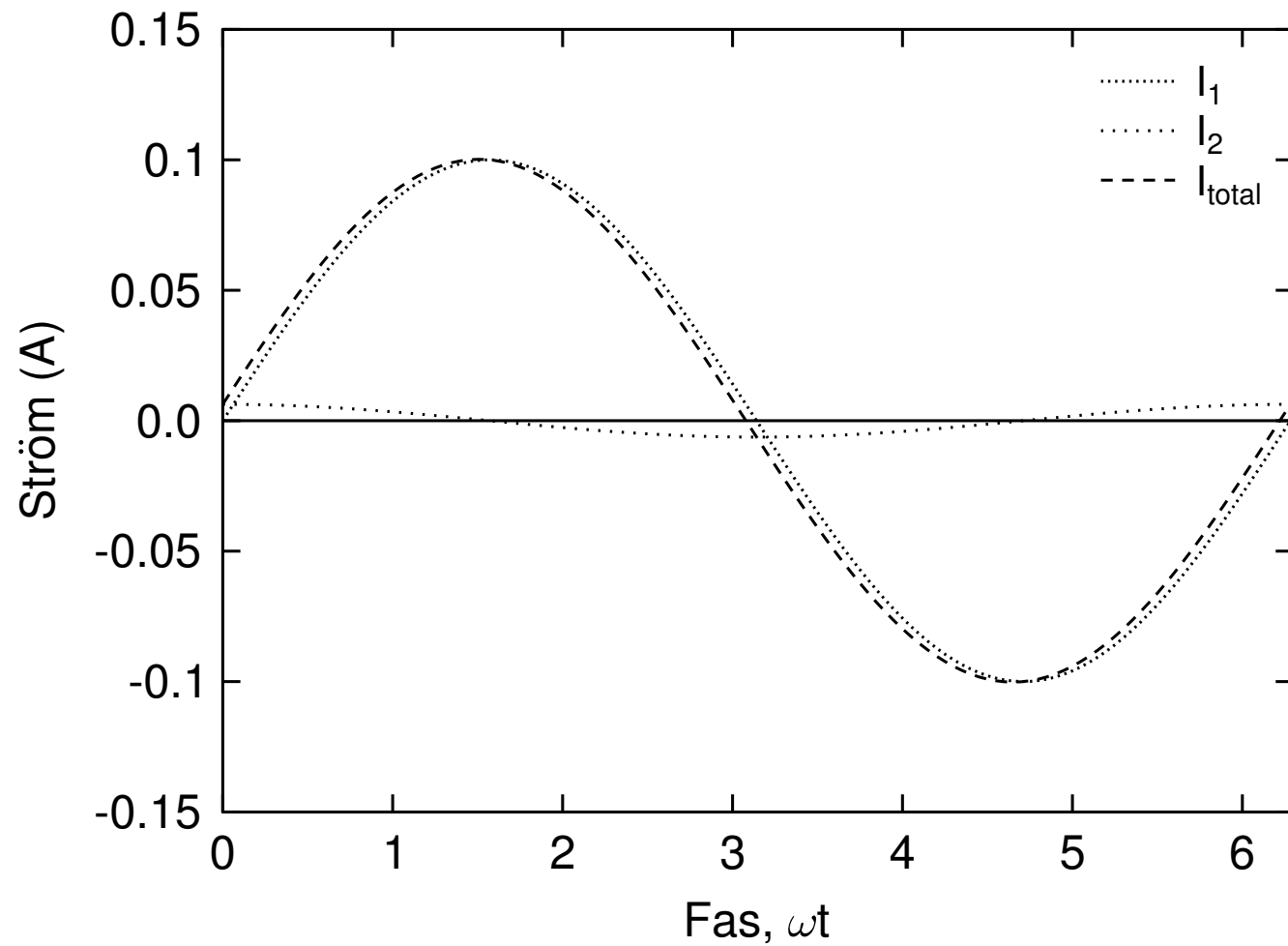
$$I(t) = V_0 \left(\frac{1}{R} + \omega C e^{i\pi/2} \right) e^{i\omega t} \quad (10.65)$$

Om den fysikaliska drivspänningen är $V(t)_P = V_0 \sin(\omega t)$ fås nu strömmarna

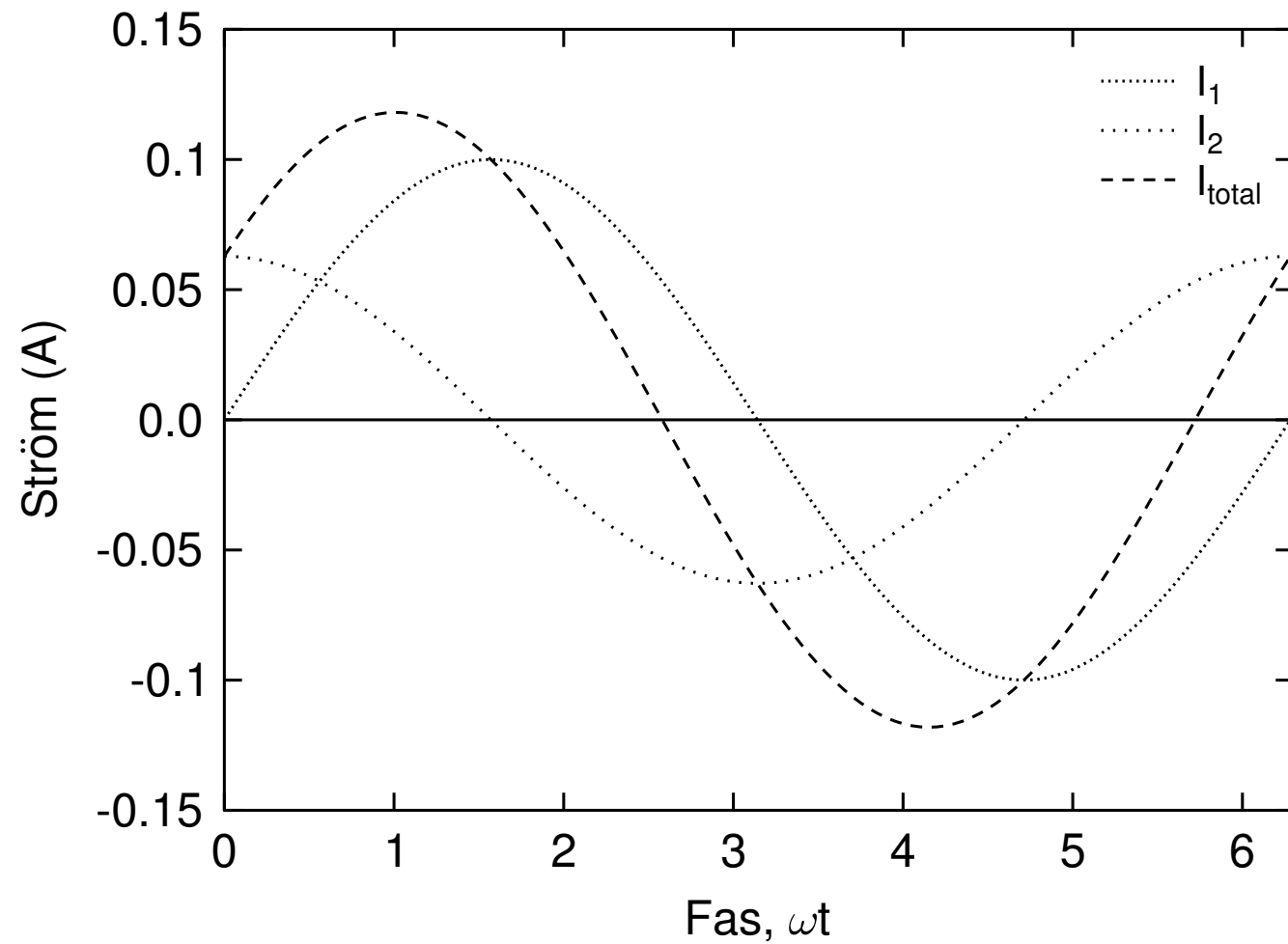
$$I_{1,P}(t) = (V_0/R) \sin(\omega t) \quad (10.66)$$

$$I_{2,P}(t) = \omega C V_0 \sin(\omega t + \pi/2) \quad (10.67)$$

Med $\nu = 100 \text{ Hz}$, $R = 100 \Omega$, $C = 10^{-6} \text{ F}$ och $V_0 = 10 \text{ V}$ fås följande graf:



Om kapacitansen höjs med en faktor 10 till $C = 10^{-5}$ F:



10.6. Effektfaktor

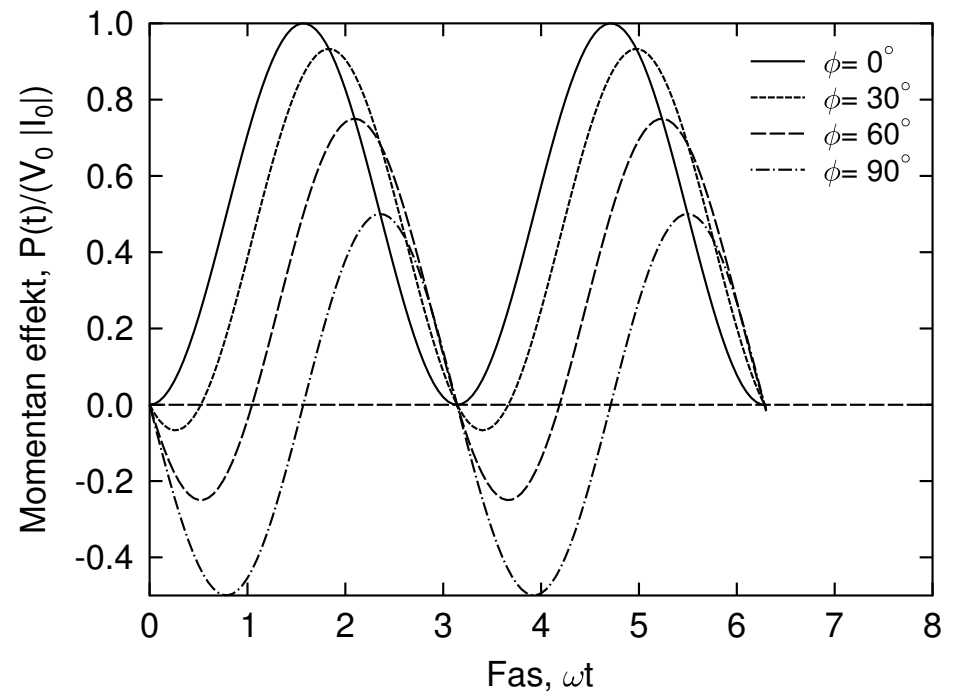
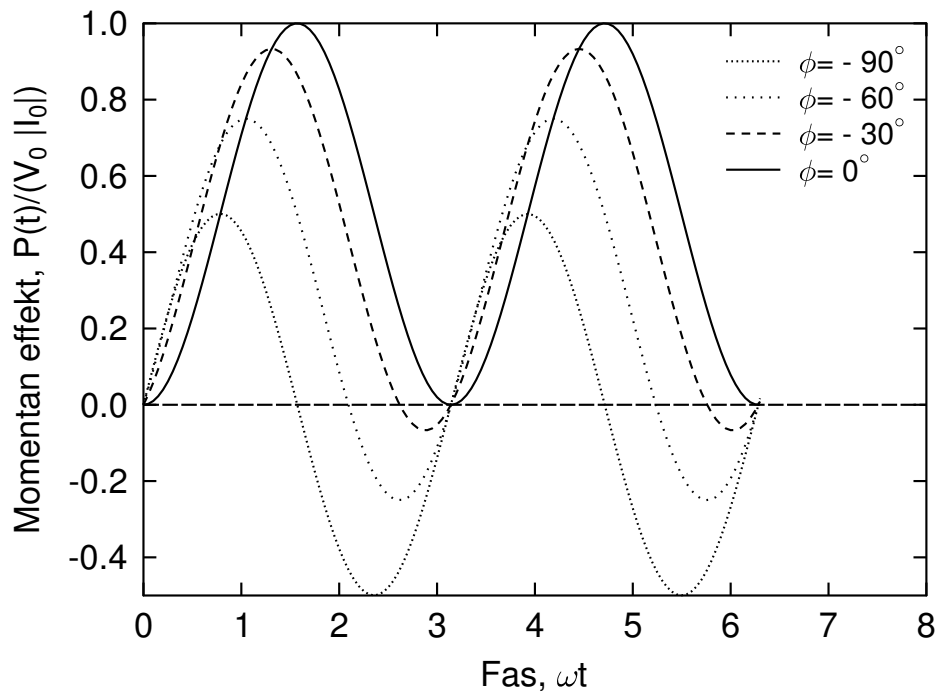
Den momentana effekt som konsumeras av en belastning (eng. *load*) eller belastande komponent/krets i en växelströmskrets är

$$P(t) = I_P(t)V_P(t) \quad (10.68)$$

För en harmonisk drivande spänning gäller (jfr. ekvationerna 10.23 och 10.34):

$$P(t) = V_0 |I_0| \sin(\omega t) \sin(\omega t - \phi) \quad (10.69)$$

Observera att denna effekt kan vara både positiv och negativ. Negativ effekt betyder att kretsen ger effekt tillbaka till spänningskällan.



Tidsmedelvärdet över en period $T = 1/\nu = 2\pi/\omega$ är

$$\begin{aligned}
 \langle P(t) \rangle &= V_0 |I_0| \frac{1}{T} \int_0^T dt \sin(\omega t) \sin(\omega t - \phi) \\
 &= V_0 |I_0| \frac{1}{T} \int_0^T dt \sin(\omega t) (\sin(\omega t) \cos \phi - \cos(\omega t) \sin \phi) \\
 &= V_0 |I_0| \frac{1}{T} \left(\cos \phi \int_0^T dt \sin^2(\omega t) - \sin \phi \int_0^T dt \sin(\omega t) \cos(\omega t) \right)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= V_0 |I_0| \frac{1}{T} \left(\cos \phi \int_0^T dt \sin^2(\omega t) - \sin \phi \frac{1}{2\omega} \sin^2(\omega t) \Big|_{t=0}^{t=T} \right) \\
&= V_0 |I_0| \frac{1}{T} \cos \phi \int_0^T dt \sin^2(\omega t) \\
&= \frac{1}{2} V_0 |I_0| \cos \phi
\end{aligned} \tag{10.70}$$

eftersom $\sin(\omega T) = \sin(2\pi\nu T) = \sin(2\pi) = 0$. Den trigonometriska integralen kan lättast utföras genom att skriva om $\sin(\omega t)$ med exponentialfunktioner.

I ekvationen ovan kallas $\cos \phi$ för **effekt-faktorn**.

Observera att formeln ovan gäller endast för sinusoidala drivspänningar och strömmar.

Exempel : För en RLC -krets där resistansen dominerar över reaktansen gäller

$$\langle P(t) \rangle = \frac{1}{2} V_0^2 \frac{1}{R} \cos 0 = \frac{1}{2} V_0^2 \frac{1}{R} \quad (10.71)$$

Om den induktiva reaktansen dominerar:

$$\langle P(t) \rangle = \frac{1}{2} V_0^2 \frac{1}{\omega L} \cos \frac{\pi}{2} = 0 \quad (10.72)$$

Om den kapacitiva reaktansen dominerar fås igen 0 p.g.a. fasvinkeln.

□

Man definierar också **effektiv- eller rms-värden** för spänning V_{eff} och ström I_{eff} så att

$$\langle P(t) \rangle = \frac{1}{2} V_0 I_0 \cos \phi = V_{\text{rms}} I_{\text{rms}} \cos \phi \quad (10.73)$$

rms är förkortning för *root-mean-square*.

Ekvationen ovan ger

$$V_{\text{rms}} = \frac{V_0}{\sqrt{2}} \quad (10.74)$$

$$I_{\text{rms}} = \frac{I_0}{\sqrt{2}} \quad (10.75)$$

Den konsumerade effekten är maximal om impedansen är en ren resistans, eller om spänningen och strömmen är i resonans p.g.a. lämplig kombination av induktiv och kapacitiv reaktans. I båda fallen fås $\phi = 0$.

För att effekten i en ström berör på fasskillnaden ϕ mellan V och I , och denna inte alltid är lätt att bestämma i praktiska fall, använder man i praktiskt bruk ofta också enheten VA (volt-ampere) för att beskriva växelström. Denna storhet, som betecknas helt enkelt VA, definieras som

$$VA = V_{\text{rms}} I_{\text{rms}} \quad (10.76)$$

och är alltså lika med effekten P endast ifall $\phi = 0$. Oftast anges VA som kilo-VA och betecknas KVA (notera det stora "K":et!)

Skillnaden mellan effekt och VA är alltså effektfaktorn och definieras i praktiskt bruk som

$$PF = \frac{P}{VA} \quad (10.77)$$

Uppenbart gäller att

$$PF = \cos \phi \quad (10.78)$$

[<http://www.powerstream.com/VA-Watts.htm>]

Exempel : Typiskt används KVA i reservströmkällor som UPS:ar (“uninterrupted power source”). För att tillverkaren av dessa omöjligen kan i förväg veta vad fasfaktorn i maskinerna som UPS:en kopplas till är, anger de gärna istället kapaciteten som KVA, som alltså anger hur mycket effekt UPS:en ger ifall den kopplas till ett rent resistiv system med $\phi = 0$. För alla andra fall ges mindre effekt, och användaren måste veta sin effektfaktor för att veta UPS:ens kapacitet.

Vanlig nätström i Finland anges ju ha spänningen 220 V. Detta är i själva verket just rms-spänningen, maximispänningen är alltså högre, ung. 310 V.
