9. Magnetisk energi

[RMC 12]

9.1. Magnetisk energi för en isolerad krets

Arbetet som ett batteri utför då det för en laddning dq runt en krets, från batteriets anod A till dess katod B är:

$$dW_k = dq\Delta V_k \tag{9.1}$$

där ΔV_k är batteriets spänning.

Kirchhoffs II lag:

$$\mathcal{E} + \sum_i \Delta V_{k,i} = -\sum_j \Delta V_j \tag{9.2}$$

Om all resistans kan kombineras till en enda resistor:

$$\Delta V_k = -\mathcal{E} + RI \tag{9.3}$$

så att

$$dW_k = dq\Delta V_k = dq(-\mathcal{E} + RI) = Idt(-\mathcal{E} + RI) = -Idt\mathcal{E} + RI^2dt \tag{9.4}$$

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi}{dt} \tag{9.5}$$

ger

$$dW_k = I d\Phi + RI^2 dt \tag{9.6}$$

Batteriets arbete går alltså till att bygga upp ett magnetiskt flöde Φ och därmed motverka den "bromsande" inducerade spänningen, och att dissipera värme-energi i resistorn. Om vi kan ignorera denna sistnämnda Joule-uppvärmning så får vi energin som går in i magnetfältet.

Om inget annat förändras i kretsen, t.ex. kretsen behåller sin stela form och befinner sig hela tiden i vila, så har det utförda arbetet bara gått åt att öka på kretsens magnetiska energi:

$$dU_M = I d\Phi \tag{9.7}$$

9.2. Magnetisk energi för kopplade kretsar

Låt oss nu bestämma den magnetiska energin för N st kopplade kretsar. Arbetet som kretsarnas batterier utför är

$$dW_k = \sum_{i=1}^{N} I_i d\Phi_i \tag{9.8}$$

då Joule-uppvärmningen inte beaktas.

Vi utför nu integreringen under antagande att strömmarna och flödena ökar samtidigt i alla kretsar, så att den tillfälliga strömmen i krets i är

$$I_i' \equiv \alpha I_i \tag{9.9}$$

Detta ger

$$dI_i' = I_i d\alpha \tag{9.10}$$

För **linjära magnetiska media** gäller att $\Phi_i \propto I_i$, så induktansen

$$L_i = \frac{d\Phi_i}{dI_i} = \frac{\Phi_i}{I_i} \tag{9.11}$$

som ger $I_i L_i = \Phi_i$. Vi får nu att

$$dI_i' = \frac{\Phi_i}{L_i} d\alpha \tag{9.12}$$

Men

$$L_i = L_i' = \frac{d\Phi_i'}{dI_i'} \tag{9.13}$$

så att

$$d\Phi_i' = \Phi_i d\alpha \tag{9.14}$$

Vi har nu

$$\begin{aligned} W_k &= \int dW_k = \int \sum_{i=1}^{N} I_i' d\Phi_i' \\ &= \sum_{i=1}^{N} \int_0^1 I_i \alpha \Phi_i d\alpha \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{i=1}^{N} I_i \Phi_i \int_0^1 d\alpha \alpha \\
&= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N} I_i \Phi_i \qquad (9.15)
\end{aligned}
$$

För ett system av N st kopplade, stationära och stela kretsar har vi alltså att den lagrade magnetiska energin är

$$
\boxed{U_M = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N} I_i \Phi_i \qquad (9.16)}
$$

Om inge yttre fält är närvarande är flödesförändringarna orsakade av de övriga kretsarna. Då gäller

$$
d\Phi_i = \sum_{j=1}^{N} d\Phi_{ij} = \sum_{j=1}^{N} \frac{d\Phi_{ij}}{dI_j} dI_j = \sum_{j=1}^{N} M_{ij} dI_j \qquad (9.17)
$$

Vi får:

$$
\begin{aligned}
U &= \int dW_b = \int \sum_{i=1}^{N} I_i' \sum_{j=1}^{N} M_{ij} dI_j' \\
&= \sum_{i=1}^{N} I_i \sum_{j=1}^{N} M_{ij} I_j \int_0^1 d\alpha\alpha \\
&= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N} M_{ij} I_i I_j \\
&= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N} L_i I_i^2 \\
&\quad + M_{12} I_1 I_2 + M_{13} I_1 I_3 + \ldots + M_{1N} I_1 I_N \\
&\quad + M_{23} I_2 I_3 + M_{24} I_2 I_4 + \ldots + M_{2N} I_2 I_N \\
&\quad + \ldots + M_{N-1,N} I_{N-1} I_N
\end{aligned}
\tag{9.18}
$$

Vi använde $L_i = M_{ii}$ och $M_{ij} = M_{ji}$.

Exempel 1: En isolerad krets:

$$\Phi = LI \tag{9.19}$$

$$U = \frac{1}{2}I\Phi = \frac{1}{2}LI^2 = \frac{1}{2}\frac{\Phi^2}{L} \tag{9.20}$$

□

Exempel 2: Två kopplade kretsar:

$$U = \frac{1}{2}L_1 I_1^2 + \frac{1}{2}L_2 I_2^2 + M_{12} I_1 I_2 \tag{9.21}$$

Beteckna $x = I_1/I_2$. Eftersom $U \geq 0$ får vi

$$U = \frac{1}{2}I_2^2(L_1 x^2 + L_2 + 2M_{12}x) \geq 0 \tag{9.22}$$

Nu kan vi beräkna minimi-energin som funktion av förhållandet mellan strömmarna x genom att derivera parentesen och sätta uttrycket till noll,

$$x = -\frac{M_{12}}{L_1} \tag{9.23}$$

och efter verifiering att andra derivatan är positiv.

Minimi-energin:

$$U_{\min} = \frac{1}{2} I_2^2 (\frac{M_{12}^2}{L_1} + L_2 - 2\frac{M_{12}^2}{L_1}) = \frac{1}{2} I_2^2 \frac{L_1 L_2 - M_{12}^2}{L_1} \geq 0 \tag{9.24}$$

så att

$$- M_{12}^2 + L_1 L_2 \geq 0 \tag{9.25}$$

eller

$$L_1 L_2 \geq M_{12}^2 \tag{9.26}$$

ett uttryck som vi använde oss av tidigare. □

9.3. Det magnetiska fältets energi

Som för elektriska laddningsfördelningar kan vi generalisera energin för magnetiska kretsar med hjälp av det fält dessa kretsar ger upphov till.

Betrakta ett system av kretsar i ett linjärt magnetiskt medium. Flödet genom en av dessa kretsar är

$$\Phi_i = \int_{A_i} d\mathbf{A}_i \cdot \mathbf{B} \tag{9.27}$$

En komplicerad krets kan delas upp i ett flertal slutna slingor. Detta gjorde vi redan tidigare när vi granskade kretsar med Kirchhoffs lagar.

Vi kan nu skriva

$$\begin{aligned} \Phi_i &= \int_{A_i} d\mathbf{A}_i \cdot \mathbf{B} = \sum_j \int_{A_{ij}} d\mathbf{A}_{ij} \cdot \mathbf{B} \\ &= \sum_j \int_{A_{ij}} d\mathbf{A}_{ij} \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) \\ &= \sum_j \oint_{C_{ij}} d\mathbf{r}_{ij} \cdot \mathbf{A} \end{aligned} \tag{9.28}$$

Totala energin för det magnetiska fältet är nu

$$
\begin{aligned}
U &= \frac{1}{2}\sum_i I_i \Phi_i \\
&= \frac{1}{2}\sum_i I_i \sum_j \oint_{C_{ij}} d\mathbf{r}_{ij} \cdot \mathbf{A} \\
&= \frac{1}{2}\sum_i \sum_j \oint_{C_{ij}} I_i d\mathbf{r}_{ij} \cdot \mathbf{A} \\
&= \frac{1}{2}\sum_i \sum_j \int_{V_{ij}} dV_{ij} \mathbf{J}_{ij} \cdot \mathbf{A} \qquad (9.29)
\end{aligned}
$$

Låt volymerna vara sådana att deras summa fyller upp hela volymen V. Vi får då

$$
U = \frac{1}{2}\int_V dV \mathbf{J} \cdot \mathbf{A} \qquad (9.30)
$$

där $\mathbf{J} = \sum_{ij} \mathbf{J}_{ij}$.

Fältekvationen för $\mathbf{H}$ är ju

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} \tag{9.31}$$

så vi får

$$U = \frac{1}{2}\int_V dV(\nabla \times \mathbf{H}) \cdot \mathbf{A} \tag{9.32}$$

Med hjälp av

$$\nabla \cdot (\mathbf{F} \times \mathbf{G}) = (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot \mathbf{G} - (\nabla \times \mathbf{G}) \cdot \mathbf{F} \tag{9.33}$$

fås nu

$$\begin{aligned} U &= \frac{1}{2}\int_V dV(\nabla \cdot (\mathbf{H} \times \mathbf{A}) + (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot \mathbf{H}) \\ &= \frac{1}{2}\int_A dA \cdot (\mathbf{H} \times \mathbf{A}) + \frac{1}{2}\int_V dV(\nabla \times \mathbf{A}) \cdot \mathbf{H} \\ &= \frac{1}{2}\int_A dA \cdot (\mathbf{H} \times \mathbf{A}) + \frac{1}{2}\int_V dV \mathbf{B} \cdot \mathbf{H} \end{aligned} \tag{9.34}$$

Om strömmar inte förekommer i oändligheten och de magnetiska materialen inte är oändligt stora dör $\mathbf{A}$ bort som $1/r$, och $\mathbf{H}$ som $\mathbf{B}$ som $\nabla \times \mathbf{A}$ som $1/r^2$ p.g.a. magnetiskt material och som $1/r^2$ p.g.a. strömmar. Kombinationen av $\mathbf{H}$ och $\mathbf{A}$ dör alltså bort som $1/r^3$. dA är proportionell mot r^2, så yt-integralen dör bort som $1/r$ och försvinner i oändligheten. Vi sitter nu kvar med

$$U_M = \frac{1}{2}\int_V dV \mathbf{B}\cdot\mathbf{H} \tag{9.35}$$

där V omfattar hela rummet. Detta är **energin för ett linjärt magnetiskt system**.

Energitätheten för isotropiska linjära media är

$$u_M = \frac{1}{2}\mathbf{B}\cdot\mathbf{H} = \frac{1}{2}\mu H^2 = \frac{1}{2\mu}B^2 \tag{9.36}$$

9.4. Krafter och vridmoment på stela kretsar

Vi betraktar nu ett magnetiskt system där en komponent tillåts röra sig under inverkan av magnetfältet.

Strömmen i systemet hålls konstant

Det arbete som den magnetiska kraften $\mathbf{F}$ utför på en rörlig komponent är

$$dW_I = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = dW_k - dU_M \tag{9.37}$$

där dW_k är arbetet som utförs av externa batterier för att hålla strömmen konstant, och dU_M är förändringen i systemets magnetiska energi.

Uttrycket för energin ger genast att

$$dU_M = \frac{1}{2} \sum_i I_i d\Phi_i \tag{9.38}$$

Å andra sidan, batteriets arbete är

$$dW_k = \sum_i I d\Phi_i = 2dU_M \tag{9.39}$$

enligt första sektionen. Vi får nu att

$$dW_I = dU_M \tag{9.40}$$

så att den magnetiska kraften på komponenten är

$$\boxed{\mathbf{F} = (\nabla U_M)_I \tag{9.41}}$$

För vridmoment fås

$$\boldsymbol{\tau} = (\nabla_\theta U_M)_I \tag{9.42}$$

Flödet genom systemet hålls konstant

Fortfarande gäller

$$dW_k = \sum_i I d\Phi_i \tag{9.43}$$

som nu är noll. Vi får då att

$$dW_\Phi = -dU_M \tag{9.44}$$

och

$$\boxed{\mathbf{F} = -(\nabla U_M)_\Phi \qquad (9.45)}$$

Motsvarande,

$$\boldsymbol{\tau} = -(\nabla_\theta U_M)_\Phi \tag{9.46}$$

Exempel 1: Bestäm kraften mellan två stela kretsar som bär de konstanta strömmarna I_1 och I_2.

Låt krets 1 utöva en kraft på krets 2, som flyttas som helhet.

De flöden som kretsarna ger upphov till genom sig själva ändras inte, eftersom strömmarna och tvärsnittsytorna är oföränderliga. Det enda som ändrar är kretsarnas inbördes position.

Alltså ändrar endast det ömsesidiga flödet, och vi får

$$\mathbf{F}_2 = \nabla_2 U = \nabla_2(\frac{1}{2}L_1 I_1^2 + \frac{1}{2}L_2 I_2^2 + M I_1 I_2) = I_1 I_2 \nabla_2 M \tag{9.47}$$

där enligt Neumanns formel vi har att

$$M = \frac{\mu_0}{4\pi}\oint_{C_1}\oint_{C_2}\frac{d\mathbf{r}_1 \cdot d\mathbf{r}_2}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|} \tag{9.48}$$

Tekniskt sett så borde vi inte kunna derivera detta uttryck eftersom integralen är en konstant, och dess derivata är ju då noll.

Skriv om:

$$\mathbf{r}_1 = \mathbf{r}_{1,0} + \mathbf{s}_1 \tag{9.49}$$

$$\mathbf{r}_2 = \mathbf{r}_{2,0} + \mathbf{s}_2 \tag{9.50}$$

Här är $\mathbf{r}_{i,0}$ $(i = 1, 2)$ nån fixerad punkt för kretsen, t.ex. dess massmedelpunkt. Denna rör sig om kretsen rör sig.

$\mathbf{s}_{i,0}$ är en vektor som löper över kretsens kontur, och vars origo är i massmedelpunkten.

I uttrycket för den ömsesidiga induktansen löper integreringen över konturerna:

$$M = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{C_1} \oint_{C_2} \frac{d\mathbf{s}_1 \cdot d\mathbf{s}_2}{|\mathbf{s}_2 - \mathbf{s}_2 + \mathbf{r}_{1,0} - \mathbf{r}_{2,0}|} \tag{9.51}$$

Derivering med avseende på $\mathbf{r}_2$ betyder för stela kretsar att vi deriverar med avseende på massmedelpunkten för krets 2:

$$\mathbf{F}_2 = \nabla_2 U = I_1 I_2 \nabla_{\mathbf{r}_{2,0}} \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{C_1} \oint_{C_2} \frac{d\mathbf{s}_1 \cdot d\mathbf{s}_2}{|\mathbf{s}_1 - \mathbf{s}_2 + \mathbf{r}_{1,0} - \mathbf{r}_{2,0}|}$$

$$
\begin{aligned}
&= I_1 I_2 \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{C_1} \oint_{C_2} d\mathbf{s}_1 \cdot d\mathbf{s}_2 \nabla_{\mathbf{r}_{2,0}} \frac{1}{|\mathbf{s}_1 - \mathbf{s}_2 + \mathbf{r}_{1,0} - \mathbf{r}_{2,0}|} \\
&= I_1 I_2 \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{C_1} \oint_{C_2} d\mathbf{s}_1 \cdot d\mathbf{s}_2 \frac{\mathbf{s}_1 - \mathbf{s}_2 + \mathbf{r}_{1,0} - \mathbf{r}_{2,0}}{|\mathbf{s}_1 - \mathbf{s}_2 + \mathbf{r}_{1,0} - \mathbf{r}_{2,0}|^3} \qquad (9.52)
\end{aligned}
$$

Å andra sidan, Biot-Savarts lag säger att

$$
\mathbf{F}_2 = \frac{\mu_0}{4\pi} I_1 I_2 \oint_{C_1} \oint_{C_2} \frac{d\mathbf{r}_2 \times (d\mathbf{r}_1 \times (\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1))}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|^3} \qquad (9.53)
$$

Vi kan nu för att vara konsekventa använda samma variabler i Biot-Savarts lag som i den tidigare ekvationen, men noteringarna blir lättare om vi istället återgår till $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2$:

$$
\mathbf{F}_2 = -I_1 I_2 \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{C_1} \oint_{C_2} \frac{(d\mathbf{r}_1 \cdot d\mathbf{r}_2)(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1)}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|^3} \qquad (9.54)
$$

Detta uttryck och Biot-Savarts lag måste vara samma. Vi bevisar detta!

Vi har:

$$d\mathbf{r}_2 \times (d\mathbf{r}_1 \times (\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1)) \quad = \quad d\mathbf{r}_1(d\mathbf{r}_2 \cdot (\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1)) - (\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1)(d\mathbf{r}_2 \cdot d\mathbf{r}_1) \tag{9.55}$$

enligt BAC-CAB-regeln. Sista termen ger oss det $\mathbf{F}_2$-uttryck vi härlett ovan, så vi visar att första termen försvinner.

Denna term ger integralen

$$\oint_{C_1} \oint_{C_2} \frac{d\mathbf{r}_1(d\mathbf{r}_2 \cdot (\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1))}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|^3} \quad = \quad \oint_{C_1} d\mathbf{r}_1 \oint_{C_2} \frac{d\mathbf{r}_2 \cdot (\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1)}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|^3} \tag{9.56}$$

Utför integralen över C_2 först. I integranden kommer $\mathbf{r}_1$ att vara en konstant, så att vi kan införa variabeln $\mathbf{v} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$ med $d\mathbf{v} = d\mathbf{r}_2$:

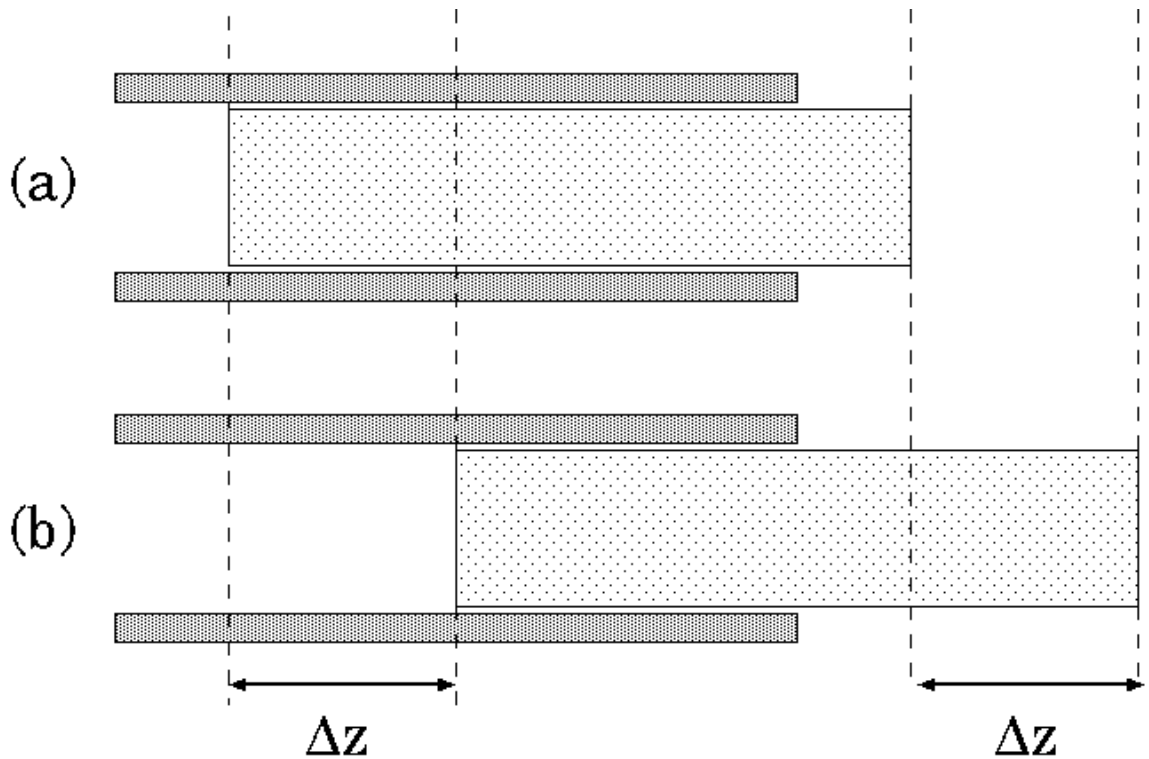
$$\begin{aligned} \oint_{C_1} d\mathbf{r}_1 \oint_{C_2} \frac{d\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}}{|\mathbf{v}|^3} \quad &= \quad \oint_{C_1} d\mathbf{r}_1 \oint_{C_2} \frac{dv v}{v^3} = \oint_{C_1} d\mathbf{r}_1 \oint_{C_2} \frac{dv}{v^2} \\ &= \quad -\oint_{C_1} d\mathbf{r}_1 \oint_{C_2} d\left(\frac{1}{v}\right) = -\oint_{C_1} d\mathbf{r}_1 \cdot 0 \end{aligned} \tag{9.57}$$

OK! □

Exempel 2: Låt en solenoid med längden L och N st lindningar av en tråd som bär strömmen I vara nästan fylld med en järnstav med den konstanta permabiliteten μ och den konstanta tvärsnittsarean $A = \pi a^2$.

Låt solenoiden ha sin symmetriaxel parallell med z-axeln. Approximera att magnetfältet är konstant i all riktningar som är vinkelräta mot z, inom solenoiden. Låt solenoidens ändpunkter vara $z = 0$ och $z = L$.

Om nu staven dras ut så att ena änden är i $0 < z < L$ medan den andra är utanför solenoiden, bestäm den kraft som påverkar staven i det nya läget. Strömmen hålls konstant under utdragandet.

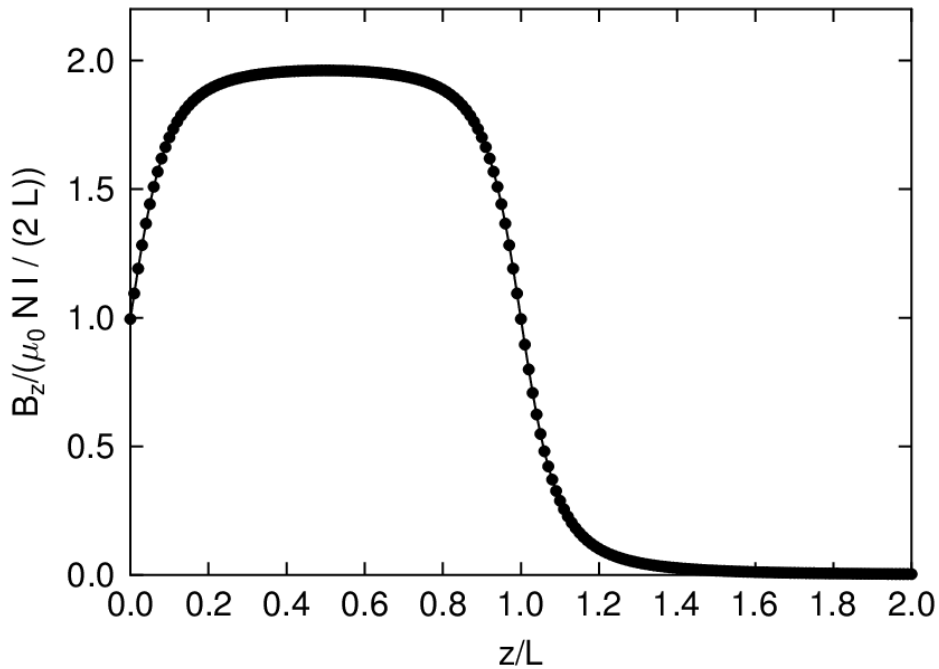


Från tidigare vet vi att

$$
\begin{aligned}
B_z(z) &= \frac{\mu_0 N I}{2L}(\cos\alpha_1 + \cos\alpha_2) \\
&= \frac{\mu_0 N I}{2L}\left(\frac{z}{\sqrt{z^2+a^2}} + \frac{L-z}{\sqrt{(z-L)^2+a^2}}\right) \\
&= \frac{\mu_0 N I}{2L}\left(\frac{z'}{\sqrt{z'^2+f^2}} + \frac{1-z'}{\sqrt{(z'-1)^2+f^2}}\right) \qquad (9.58)
\end{aligned}
$$

med beteckningarna $z' = z/L$ och $f = a/L$.

Om solenoidens radie är 10% av dess längd, d.v.s. $f = 0,1$ fås ett $B_z(z)$ beroende som i figuren.



Från detta ser vi att B_z utanför staven är mycket svagt, så vi kan ignorera fältet där ute i våra räkningar.

Den magnetiska energin är nu

$$\begin{aligned} U &= \frac{1}{2}\int_V dV \mu H^2 = \frac{1}{2}\int_z dz' A\mu H^2 \\ &= \frac{1}{2}A\left(\int_0^z dz'\mu_0 H^2 + \int_z^L dz'\mu H^2\right) \end{aligned} \tag{9.59}$$

Kraften är

$$
\begin{aligned}
F &= \frac{\partial}{\partial z} U \\
&= \frac{1}{2} A \frac{\partial}{\partial z} \left(\int_0^z dz' \mu_0 H^2 + \int_z^L dz' \mu H^2 \right) \\
&= \frac{1}{2} A \left(\int_0^z dz' \mu_0 \frac{\partial}{\partial z} H^2(z') + \mu_0 H^2(z' = z) \frac{\partial}{\partial z} z - \mu_0 H^2(z' = 0) \frac{\partial}{\partial z} 0 \right) \\
&\quad + \frac{1}{2} A \left(\int_z^L dz' \mu \frac{\partial}{\partial z} H^2(z') + \mu H^2(z' = L) \frac{\partial}{\partial z} L - \mu H^2(z' = z) \frac{\partial}{\partial z} z \right) \qquad (9.60)
\end{aligned}
$$

Här användes Leibniz' integralregel:

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial u} \left[\int_{a(u)}^{b(u)} dx f(x, u) \right] &= \int_{a(u)}^{b(u)} dx \frac{\partial}{\partial u} f(x, u) \\
&\quad + f(b(u), u) \frac{\partial}{\partial u} b(u) \\
&\quad - f(a(u), u) \frac{\partial}{\partial u} a(u) \qquad (9.61)
\end{aligned}
$$

Observera att z' i integralerna är en hjälpvariabel som integreras bort och inte syns utanför integralen. Vi får inte derivera med avseende på denna!

Nu försvinner de flesta termerna för derivatorna med avseende på z på termer som inte beror på denna variabel blir noll, och vi får

$$\begin{aligned} F &= \frac{1}{2}A\left(\mu_0 H^2(z'=z) - \mu H^2(z'=z)\right) \\ &= \frac{1}{2}A(\mu_0 - \mu)H^2(z'=z) \\ &= \frac{1}{2}A(\mu_0 - \mu_0(1+\chi_M))H^2(z'=z) \\ &= -\frac{1}{2}A\chi_M\mu_0 H^2(z'=z) \end{aligned} \tag{9.62}$$

Kraften är riktad till vänster i figuren, d.v.s. solenoiden "vill" dra in staven. □

Exempel 3: Bestäm den cylinderradiella kraften på en solenoids lindningar, per längd. Antalet lindningar är N, strömmen i dessa är I, solenoidens radie är R och dess längd är L. Ignorera fältet utanför solenoiden.

Energin är

$$\begin{aligned} U_M &= \frac{1}{2}\int dV \mu H^2 \\ &= \frac{1}{2}\mu \int dV \left(\frac{NI}{L}\right)^2 \\ &= \frac{1}{2}\mu\pi R^2 L \left(\frac{NI}{L}\right)^2 \end{aligned} \tag{9.63}$$

enligt tidigare approximation.

Kraften i den cylinderradiella riktningen är, om strömmen hålls konstant:

$$\begin{aligned} F_\rho &= (\nabla U_M)\cdot\widehat{\rho} = \partial_\rho U_M \\ &= \frac{1}{2}\mu\pi 2RL\left(\frac{NI}{L}\right)^2 \end{aligned} \tag{9.64}$$

Den sökta kraften per längd är

$$\frac{F_\rho}{2\pi R N} = \frac{1}{2}\mu\frac{N I^2}{L} \tag{9.65}$$

Om i stället flödet hålls konstant får vi ett minustecken. □