

4. Elektrostatisk energi

[RMC 6]

4.1. Introduktion

Vi såg tidigare att arbetet som utförs på en laddning q då den förs av kraften $\mathbf{F}$ från punkt A till punkt B är

$$W' = \int_A^B \mathbf{dr} \cdot \mathbf{F} \quad (4.1)$$

Om kraften är den elektrostatiska kraften, så utför denna arbetet

$$W'' = q \int_A^B \mathbf{dr} \cdot \mathbf{E} = -q \int_A^B \mathbf{dr} \cdot \nabla \varphi = -q(\varphi_B - \varphi_A) \quad (4.2)$$

Om en annan kraft *motverkar* den elektrostatiska kraften för att föra laddningen från A till B utför den arbetet

$$W = -W'' = -q \int_A^B \mathbf{dr} \cdot \mathbf{E} = q(\varphi_B - \varphi_A) \quad (4.3)$$

I detta fall *växer* laddningens elektrostatiska energi (potentialenergi).

Motsvarande bestämmer man (den elektrostatiska) energin för ett system av laddningar som det arbete en extern kraft utför då den tvingar ihop isolerade laddningar för att bygga upp systemet i fråga.

4.2. Energin för ett system av punktladdningar

Ingen energi krävs för att sätta en isolerad laddning i positionen $\mathbf{r}_1$ i en region utan yttre fält:

$$W_1 = q_1(\varphi_1 - \varphi_{A,1}) = 0 \quad (4.4)$$

Här är $\varphi_{A,1}$ potentialen i startpunkten.

För att tillföra laddningen q_2 från en isolerad position till $\mathbf{r}_2$ behövs energin

$$W_2 = q_2(\varphi_2 - \varphi_{A,2}) = q_2\varphi_2 = q_2 \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|} \quad (4.5)$$

eftersom q_2 förs in från oändligheten (isolerad position!). Obs: φ_2 är den potential som laddning 2 känner av, inte ger upphov till!

För att tillföra laddningen q_3 behövs arbetet

$$W_3 = q_3\varphi_3 = q_3 \left(\frac{q_1}{4\pi\epsilon_0|\mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_1|} + \frac{q_2}{4\pi\epsilon_0|\mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_2|} \right) \quad (4.6)$$

O.s.v.

I korthet: energin som behövs för att bygga upp ett system av N st laddningar är

$$U = \sum_{i=1}^N W_i = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^{i-1} \frac{q_i q_j}{4\pi\epsilon_0 r_{ij}} \equiv \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^{i-1} W_{ij} \quad (4.7)$$

där $r_{ij} \equiv |\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|$.

Observera: $W_{ij} = W_{ji}$ och $W_{ii} \equiv 0$.

Vi kan nu skriva

$$U = \frac{1}{2} \sum_{i=1, i \neq j}^N \sum_{j=1}^N W_{ij} = \frac{1}{2} \sum_{i=1, i \neq j}^N \sum_{j=1}^N \frac{q_i q_j}{4\pi\epsilon_0 r_{ij}} \quad (4.8)$$

Alternativt, eftersom

$$W_i = q_i \varphi_i = q_i \sum_{j=1}^{i-1} \frac{q_j}{4\pi\epsilon_0 r_{ij}} \quad (4.9)$$

där φ_i är den potential som laddningen q_i känner av, så kan vi modifiera ekv. (4.8) till

$$U = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N q_i \varphi_i \quad (4.10)$$

Sammanfattningsvis:

$$U = \frac{1}{2} \sum_{i=1, i \neq j}^N \sum_{j=1}^N \frac{q_i q_j}{4\pi\epsilon_0 r_{ij}} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N q_i \varphi_i \quad (4.11)$$

★ ★ ★

Exempel : Två punktladdningar q_1 och q_2 .

$$U = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N q_i \varphi_i = \frac{1}{2} \left(q_1 \frac{q_2}{4\pi\epsilon_0 |\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|} + q_2 \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0 |\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|} \right) = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 |\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|} \quad (4.12)$$

□

4.3. Energin för en kontinuerlig laddningsfördelning

Om dq läggs till ett system med potentialen $\varphi'(\mathbf{r})$ utförs arbetet $dW = dq\varphi'(\mathbf{r})$.

Här gäller i allmänhet att $dq = dq_V + dq_A \equiv dV\rho + dA\sigma$.

För att inte vara tvungna att välja en specifik ordning i vilken fördelningen byggs upp, och därmed begränsa härledningen av U , så låter vi fördelningen byggas upp *överallt på samma gång*. Fördelningen i volymen dV eller på ytan dA skriver vi då som $d\alpha\rho(\mathbf{r})$ eller $d\alpha\sigma(\mathbf{r})$, där α går från 0 till 1.

Vi har nu

$$dU = dV d\alpha \rho(\mathbf{r}) \varphi'(\alpha, \mathbf{r}) + dA d\alpha \sigma(\mathbf{r}) \varphi'(\alpha, \mathbf{r}) \quad (4.13)$$

där $\varphi'(\alpha, \mathbf{r})$ är potentialen som laddningen $dV d\alpha \rho(\mathbf{r})$ eller $dA d\alpha \sigma(\mathbf{r})$ känner av.

Men den övriga laddningen som orsakar φ' befinner sig på nivån $d\alpha$ av sin slutliga nivå, så vi måste ha $\varphi' = \alpha\varphi$:

$$\varphi' = \int dV' \frac{d\alpha' \rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = \int_0^\alpha d\alpha' \int_V dV' \frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \equiv \alpha\varphi \quad (4.14)$$

Vi får

$$dU = dV d\alpha \rho(\mathbf{r}) \alpha \varphi(\mathbf{r}) + dA d\alpha \sigma(\mathbf{r}) \alpha \varphi(\mathbf{r}) \quad (4.15)$$

som ger

$$U = \frac{1}{2} \int_V dV \rho(\mathbf{r}) \varphi(\mathbf{r}) + \frac{1}{2} \int_A dA \sigma(\mathbf{r}) \varphi(\mathbf{r}) \quad (4.16)$$

Volymen V och arean A väljs så att de går genom de regioner där laddningen finns.

Potentialen är ju

$$\varphi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon} \int_V dV' \frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} + \frac{1}{4\pi\epsilon} \int_A dA' \frac{\sigma(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \quad (4.17)$$

Om vi t.ex. har bara volym-laddning, så ges energin av uttrycket

$$U = \frac{1}{2} \frac{1}{4\pi\epsilon} \int_V \int_V dV dV' \frac{\rho(\mathbf{r}) \rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \quad (4.18)$$

Ytintegralen kan vi ännu indela i ytor som sammanfaller med ledares ytor och övriga: $A = A_l + A'$. För ledares ytor har vi

$$U_{\text{led}} = \frac{1}{2} \int_{A_l} dA \sigma(\mathbf{r}) \varphi_{\text{led}} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N_l} Q_i^{\text{led}} \varphi_i^{\text{led}} \quad (4.19)$$

Ekvationerna (4.10) och (4.19) ser likadana ut, men där finns en väsentlig skillnad.

En ledare är en utsträckt kropp, medan en punktladdning inte har någon dimension. Ledarens energi innehåller därför både energi från växelverkan med andra externa laddningar *och* energi från växelverkan mellan laddningar på ledarens egen yta. Den senare energin kallas *ledarens självenergi*. Punktladdningens energi innehåller enbart det första bidraget.

Det mest allmänna uttrycket för energin blir nu

$$U = \frac{1}{2} \int_V dV \rho(\mathbf{r}) \varphi(\mathbf{r}) + \frac{1}{2} \int_{A'} dA \sigma(\mathbf{r}) \varphi(\mathbf{r}) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N_l} Q_i^{\text{led}} \varphi_i^{\text{led}} \quad (4.20)$$

där A' exkluderar ledares ytor.

★ ★ ★

Exempel : En sfärisk laddningsfördelning, med $\rho = \rho_0$ (konstant) ut till en radie a , därefter $\rho = 0$.

$$U = \frac{1}{2} \int_V dV \rho(\mathbf{r}) \varphi(\mathbf{r}) \quad (4.21)$$

För $r > a$: Gauss' lag ger

$$E_{1,r} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2} \equiv -\frac{d\varphi_1}{dr} \quad (4.22)$$

Vi får

$$\varphi_1(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r} \quad (4.23)$$

För $r < a$: Gauss' lag ger:

$$4\pi r^2 E_{2,r} = \frac{1}{\epsilon_0} \frac{Q}{4\pi a^3/3} \frac{4\pi r^3}{3} \quad (4.24)$$

Vi får

$$E_{2,r} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{a^3} r = -\frac{d\varphi_2}{dr} \quad (4.25)$$

Integrera:

$$\varphi_2(r) - \varphi_2(a) = -\int_a^r dr E_{2,r} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{a^3} \int_a^r dr r = -\frac{1}{2} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{a^3} (r^2 - a^2) \quad (4.26)$$

så att

$$\varphi_2(r) = \varphi_2(a) - \frac{1}{2} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{a^3} (r^2 - a^2) \quad (4.27)$$

Insättning av $\varphi_1(a) = \varphi_2(a)$ ger

$$\varphi_2(r) = \frac{3}{2} \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 a} - \frac{1}{2} \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 a^3} r^2 \quad (4.28)$$

Energin:

$$\begin{aligned} U &= \frac{1}{2} \int_V dV \rho \varphi(r) \\ &= \frac{1}{2} 4\pi \frac{Q}{4\pi a^3/3} \int_0^a dr r^2 \varphi_2(r) \\ &= \frac{3Q}{2a^3} \left[\frac{3}{2} \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 a} \int_0^a dr r^2 - \frac{1}{2} \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 a^3} \int_0^a dr r^4 \right] \\ &= \frac{3Q}{2a^3} \left[\frac{3}{2} \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 a} \frac{1}{3} a^3 - \frac{1}{2} \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 a^3} \frac{1}{5} a^5 \right] \\ &= \frac{3Q}{2a^3} \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} a^2 \left[\frac{1}{2} - \frac{1}{10} \right] \\ &= \frac{3}{5} \frac{Q^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{a} \end{aligned} \tag{4.29}$$

□

4.4. Energin i ett elektrostatiskt fält

Låt oss nu i uttrycket

$$U = \frac{1}{2} \int_V dV \rho(\mathbf{r}) \varphi(\mathbf{r}) + \frac{1}{2} \int_A dA \sigma(\mathbf{r}) \varphi(\mathbf{r}) \quad (4.30)$$

ersätta laddningsfördelningarna och potentialerna med enbart fältstorheter.

Eftersom

$$\sigma = \mathbf{D} \cdot \hat{\mathbf{n}} \quad (4.31)$$

$$\rho = \nabla \cdot \mathbf{D} \quad (4.32)$$

får vi

$$U = \frac{1}{2} \int_{V_0 - V_l} dV (\nabla \cdot \mathbf{D}) \varphi(\mathbf{r}) + \frac{1}{2} \int_{A_l} dA (\mathbf{D} \cdot \hat{\mathbf{n}}) \varphi(\mathbf{r}) \quad (4.33)$$

Volymen $V = V_0 - V_l$ exkluderar ledarnas inre. V_0 är hela regionens volym, medan V_l är ledarnas volym. Ytan A_l omfattar enbart ledarnas ytor.

Vi har nu antagit att de dielektrika som finns i systemet är oladdade.

Använd nu räkneregeln $f \nabla \cdot \mathbf{F} = \nabla \cdot (f\mathbf{F}) - \mathbf{F} \cdot (\nabla f)$, med $f = \varphi$ och $\mathbf{F} = \mathbf{D}$:

$$U = \frac{1}{2} \int_{V_0-V_l} dV \nabla \cdot (\varphi \mathbf{D}) - \frac{1}{2} \int_{V_0-V_l} dV \mathbf{D} \cdot (\nabla \varphi) + \frac{1}{2} \int_{A_l} \mathbf{dA} \cdot \mathbf{D} \varphi(\mathbf{r}) \quad (4.34)$$

Med divergensteoremets hjälp:

$$U = \frac{1}{2} \int_{A_0+A_l} \mathbf{dA}' \cdot (\varphi \mathbf{D}) - \frac{1}{2} \int_{V_0-V_l} dV \mathbf{D} \cdot (\nabla \varphi) + \frac{1}{2} \int_{A_l} \mathbf{dA} \cdot (\mathbf{D} \varphi(\mathbf{r})) \quad (4.35)$$

Eftersom den första integralen löpte över ledarnas exteriörer är ytans normalvektor på ledarnas nu riktad in i ledarna. I den sista termen är normalvektorn ut ur ledarna, så hela uttrycket kan förenklas till

$$U = \frac{1}{2} \int_{A_0} \mathbf{dA}' \cdot (\varphi \mathbf{D}) - \frac{1}{2} \int_{V_0-V_l} dV \mathbf{D} \cdot (\nabla \varphi) \quad (4.36)$$

Hela systemets yta kan väljas borta i oändligheten. Om $\mathbf{D}$ är approximativt sfäriskt får vi

$$\mathbf{dA}' \cdot (\varphi \mathbf{D}) \sim d\Omega' r^2 \frac{1}{r} \frac{1}{r^2} = d\Omega' \frac{1}{r} \quad (4.37)$$

Detta går mot noll då $r \Rightarrow \infty$.

Kvar har vi nu

$$U = -\frac{1}{2} \int_{V_0-V_l} dV \mathbf{D} \cdot (\nabla \varphi) = \frac{1}{2} \int_{V_0-V_l} dV \mathbf{D} \cdot \mathbf{E} \quad (4.38)$$

Definiera energitätheten:

$$u = \frac{1}{2} \mathbf{D} \cdot \mathbf{E} \quad (4.39)$$

Eftersom $\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E}$ har vi också

$$u = \frac{1}{2} \mathbf{D} \cdot \mathbf{E} = \frac{1}{2} \varepsilon E^2 = \frac{1}{2} \frac{1}{\varepsilon} D^2 \quad (4.40)$$

Exempel : Två punktladdningar med fälten $\mathbf{E}_1$ och $\mathbf{E}_2$.

Vi måste nu tillämpa ekv. (4.40) med eftertanke.

Från tidigare behandling vet vi ju att vi måste behandla problemet så att laddning 1 befinner sig i fältet från laddning 2, och laddning 2 i fältet från 1. Annars får vi ju med laddningarnas växelverkan med sig själva! Detta skulle ge oss laddningarnas självenergi, som är oändligt stor.

Energitätheten blir då

$$u = \frac{1}{2} \mathbf{D}_1 \cdot \mathbf{E}_2 + \frac{1}{2} \mathbf{D}_2 \cdot \mathbf{E}_1 = \frac{1}{2} \varepsilon_0 \mathbf{E}_1 \cdot \mathbf{E}_2 + \frac{1}{2} \varepsilon_0 \mathbf{E}_2 \cdot \mathbf{E}_1 = \varepsilon_0 \mathbf{E}_1 \cdot \mathbf{E}_2 \quad (4.41)$$

□

Exempel : Ytladdningsenergi för ledare.

För ledare gäller ju enligt pillerburkstechniken

$$\sigma = E_n \quad (4.42)$$

där E_n är normalkomponenten av elfältet.

Nu kan energitätheten för en ledares ytladdning direkt skrivas

$$u = \frac{1}{2} \varepsilon_0 E^2 = \frac{1}{2 \varepsilon_0} \sigma^2 \quad (4.43)$$

Exempel : En sfärisk laddningsfördelning, med $\rho = \rho_0$ (konstant) ut till en radie a , därefter $\rho = 0$.

Vi har från tidigare:

$$E_{1,r} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2}, \quad r > a \quad (4.44)$$

$$E_{2,r} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{a^3} r, \quad r < a \quad (4.45)$$

Energien:

$$\begin{aligned} U &= \frac{1}{2} \varepsilon_0 \int_V dV E^2(r) \\ &= \frac{1}{2} \varepsilon_0 4\pi \frac{Q^2}{(4\pi \varepsilon_0)^2} \int_a^\infty dr r^2 \frac{1}{r^4} + \frac{1}{2} \varepsilon_0 4\pi \frac{Q^2}{(4\pi \varepsilon_0)^2} \frac{1}{a^6} \int_0^a dr r^2 r^2 \\ &= \frac{1}{2} \varepsilon_0 4\pi \frac{Q^2}{(4\pi \varepsilon_0)^2} \left(-0 + \frac{1}{a} \right) + \frac{1}{2} \varepsilon_0 4\pi \frac{Q^2}{(4\pi \varepsilon_0)^2} \frac{1}{a^6} \frac{1}{5} \left(a^5 - 0 \right) \\ &= \frac{1}{2} \frac{Q^2}{4\pi \varepsilon_0} \left[\frac{1}{a} + \frac{1}{5} \frac{1}{a^6} a^5 \right] \\ &= \frac{1}{2} \frac{Q^2}{4\pi \varepsilon_0} \frac{6}{5} \frac{1}{a} \\ &= \frac{3}{5} \frac{Q^2}{4\pi \varepsilon_0} \frac{1}{a} \end{aligned} \tag{4.46}$$

Detta är exakt samma resultat som ovan fickas med integrering av $\rho\varphi \implies$ allt OK!

□

4.5. Potential-, kapacitans, och induktans-koefficienter

Betrakta ett system av N ledare. Låt alla ledare vara oladdade, förutom ledare j , som har en laddning Q_j .

Beteckna lösningen av Laplaces ekvation för detta system med $\varphi(j, \mathbf{r})$. Beteckna ledarnas ytpotentialer med φ_{A_i} .

Låt nu laddningen Q_j växa till λQ_j .

Elfältet på ledare j :s yta växer nu med en faktor λ , vilket betyder att *potentialen* där växt med samma faktor. Detta betyder i sin tur att *hela systemets potential* har växt med samma faktor.

Detta medför att potentialen på ledarnas ytor är proportionella mot laddningen på ledare j :

$$\varphi_{A_i} = p_{ij} Q_j \quad (4.47)$$

Upprepa nu hela resonemanget, men byt j mot k . På motsvarande sätt får vi nu att

$$\varphi_{A_i} = p_{ik} Q_k \quad (4.48)$$

Om vi nu har att både ledare j och k är laddade, så betyder Laplace-ekvationens superpositionsegenskap att

$$\varphi_{A_i} = p_{ij}Q_j + p_{ik}Q_k \quad (4.49)$$

är en lösning.

I största allmänhet, med N st laddade ledare, har vi då att

$$\varphi_{A_i} = \sum_{j=1}^N p_{ij}Q_j \quad (4.50)$$

Koefficienterna p_{ij} kallas **potentialkoefficienter**.

Resonemanget gäller också då dielektrika finns i systemet under betraktelse, så länge dessa är oladdade.

Vi kan nu skriva energin som

$$U = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N p_{ij}Q_iQ_j \equiv U(Q_1, \dots, Q_n) \quad (4.51)$$

Från detta har vi

$$dU = \sum_{i=1}^N \frac{\partial U}{\partial Q_i} dQ_i \quad (4.52)$$

Om enbart Q_j förändras:

$$dU = \frac{\partial U}{\partial Q_j} dQ_j = \frac{1}{2} \sum_i (p_{ij} + p_{ji}) Q_i dQ_j \quad (4.53)$$

Å andra sidan,

$$dU = dQ_j (\varphi_j - 0) = dQ_j \sum_{i=1}^N p_{ij} Q_i \quad (4.54)$$

enligt ekv. (4.50). Vi har nu att

$$\frac{1}{2} (p_{ij} + p_{ji}) = p_{ij} \quad (4.55)$$

så att

$$p_{ij} = p_{ji} \quad (4.56)$$

Detta är fysikaliskt vettigt - växelverkan är symmetrisk.

Vidare, låt $Q_j = 0$, $j \neq i$, och $Q_i > 0$:

$$\varphi_{A_i} = p_{ii}Q_i \quad (4.57)$$

Nu måste ju $\varphi_{A_i} > 0$, så att $p_{ii} > 0$.

Låt enbart ledare i och j vara laddade, så att $Q_j = -Q_i$, $Q_i \geq 0$.

$$\varphi_{A_i} = p_{ii}Q_i + p_{ij}Q_j = (p_{ii} - p_{ij})Q_i \geq 0 \quad (4.58)$$

eftersom $\varphi_{A_i} \geq 0$. Detta ger

$$p_{ii} \geq p_{ij} \quad (4.59)$$

Vi har nu tre egenskaper för potentialkoefficienterna:

$$p_{ij} = p_{ji} \quad (4.60)$$

$$p_{ij} > 0 \quad (4.61)$$

$$p_{ii} \geq p_{ij} \quad (4.62)$$

$$\varphi_{A_i} = \sum_{j=1}^N p_{ij} Q_j \quad (4.63)$$

kan inverteras till

$$Q_i = \sum_{j=1}^N c_{ij} \varphi_{A_j}, \quad (4.64)$$

där c_{ii} kallas **kapacitans-koefficienter** och c_{ij} , $i \neq j$, **induktans-koefficienter**. Dessa är funktioner av p_{ij} .

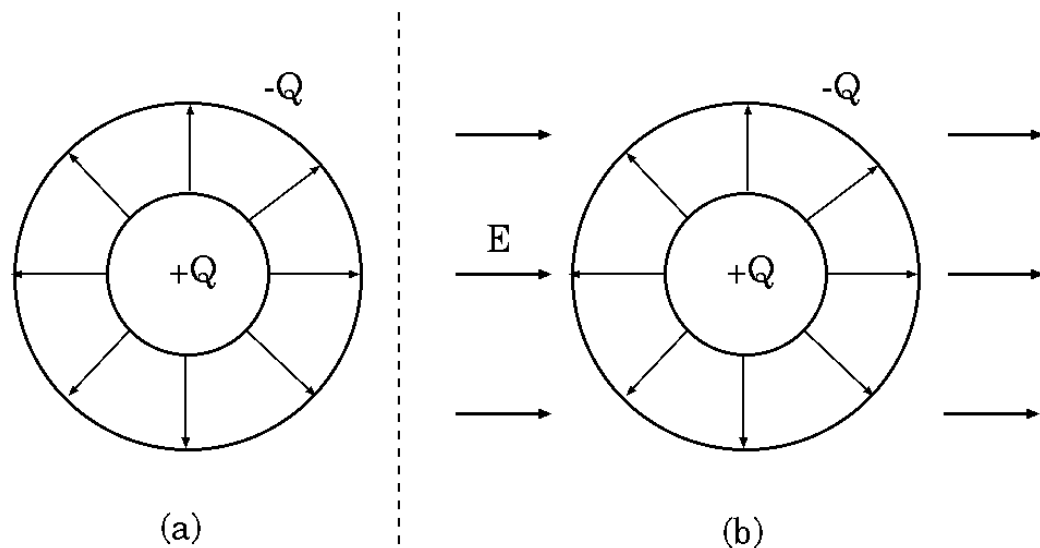
Med dessa kan man skriva

$$U = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N c_{ij} \varphi_{A_i} \varphi_{A_j} \quad (4.65)$$

4.6. Kondensatorer

”Behållare” i vilka laddningar, och därmed elfält och energi, kan lagras kallas **kondensatorer**. I sin enklaste form består dessa av två ledare, som kan lagra lika stor men motsatt laddning, med en potentialskillnad mellan ledarna som är oberoende av laddningarna på övriga ledare i systemet.

Detta betyder att den ena ledaren måste vara skyddad från yttre elfält tack vare den andra ledaren. En dylik konfiguration är följande:



Det externa elfältet från de övriga ledarnas laddningar inducerar en extra laddning på den yttre ledaren, ledare 2.

Detta inducerade fält utsläcker det externa fältet innanför ledare 2, så att elfältet mellan ledarna förblir detsamma.

Om ledare 2 alltså sitter på en potential φ_0 p.g.a. de övriga laddningarna, så kommer ledare 1 också att sitta på samma ”baspotential” — eftersom elfältet är oförändrat.

Ledarnas potentialer är alltså

$$\varphi_{A_1} = p_{11}Q + p_{12}(-Q) + \varphi_0 \quad (4.66)$$

$$\varphi_{A_2} = p_{21}Q + p_{22}(-Q) + \varphi_0 \quad (4.67)$$

Potentialskillnaden mellan ledarna är

$$\Delta\varphi = \varphi_{A_1} - \varphi_{A_2} = (p_{11} + p_{22} - 2p_{12})Q \equiv \frac{Q}{C}, \quad (4.68)$$

där vi definierat

$$C = \frac{Q}{\Delta\varphi} \quad (4.69)$$

eller

$$Q = C\Delta\varphi \quad (4.70)$$

där C är kondensatorns **kapacitans**. Enhet: $[C] = C/V \equiv F$, som kallas **farad**.

Den lagrade energin är

$$U = \frac{1}{2}Q_1\varphi_1 + \frac{1}{2}Q_2\varphi_2 = \frac{1}{2}Q(\varphi_1 - \varphi_2) = \frac{1}{2}Q\Delta\varphi = \frac{1}{2}C(\Delta\varphi)^2 = \frac{1}{2C}Q^2 \quad (4.71)$$

Kapacitansen kan bestämmas analytiskt för enkla geometrier som två parallella plan (skivkondensator), koaxiala cylindrar, och koncentrisk sfärer, eftersom potentialskillnaden är enkel att bestämma i dessa fall.

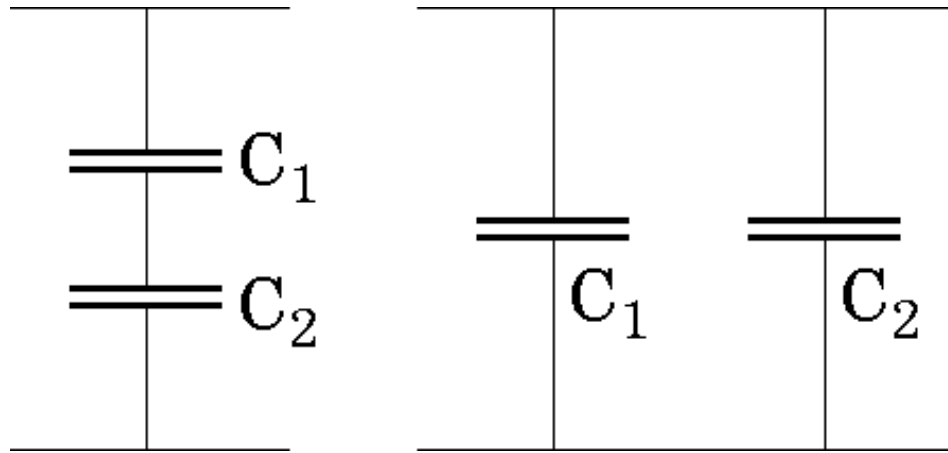
För en skivkondensator där de ledande planen har arean A och är på det konstanta avståndet d från varandra, gäller (då kantfältet kan ignoreras) att

$$E = \frac{1}{\varepsilon}\sigma = \frac{1}{\varepsilon}\frac{Q}{A} = \frac{\Delta\varphi}{d} \quad (4.72)$$

då mellanrummet är fyllt med ett dielektrikum. Kapacitansen är

$$C = \frac{Q}{\Delta\varphi} = \frac{\varepsilon A}{d} \quad (4.73)$$

Kondensatorer kan kopplas i serie eller parallellt:



Serie-koppling:

$$\Delta\varphi = \Delta\varphi_1 + \Delta\varphi_2 \quad (4.74)$$

d.v.s.

$$\frac{Q}{C} = \frac{Q_1}{C_1} + \frac{Q_2}{C_2} \quad (4.75)$$

Men

$$Q = Q_1 = Q_2 \quad (4.76)$$

eftersom laddningen ska vara densamma oberoende av vilken "väg" man tittar in i kretsen.

Vi får

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} \quad (4.77)$$

Parallell-koppling:

$$\Delta\varphi = \Delta\varphi_1 = \Delta\varphi_2 \quad (4.78)$$

d.v.s.

$$\frac{Q}{C} = \frac{Q_1}{C_1} = \frac{Q_2}{C_2} \quad (4.79)$$

där

$$Q = Q_1 + Q_2 \quad (4.80)$$

så att

$$C = C_1 + C_2 \quad (4.81)$$

4.7. Kraft och vridmoment på laddningselement

Låt oss nu använda vad vi lärt oss för att ta reda på med hur stor kraft ett laddningselement i en given fördelning påverkas, på grund av av alla de övriga elementen.

Arbetet som den elektriska kraften utför då den flyttar ett element sträckan $d\mathbf{r}$ är

$$dW = d\mathbf{r} \cdot \mathbf{F} \quad (4.82)$$

Systemets energi har nu sjunkit, så att $dU = -dW < 0$ och

$$dU = -dW = -F_x dx - F_y dy - F_z dz \quad (4.83)$$

Detta ger

$$\mathbf{F} = -(\nabla U)_Q \quad (4.84)$$

eftersom

$$d\mathbf{r} \cdot \mathbf{F} = -d\mathbf{r} \cdot \nabla U \equiv -dU \quad (4.85)$$

Indexet Q anger att fördelningens totala laddning är konstant under operationen.

Motsvarande, om det existerar ett elektrostatiskt vridmoment τ som försöker vrida ett element i laddningen runt en given punkt, har vi

$$dW = d\theta \cdot \tau \quad (4.86)$$

där $d\theta = d\theta_x \hat{\mathbf{x}} + d\theta_y \hat{\mathbf{y}} + d\theta_z \hat{\mathbf{z}}$ anger med hur stor vinkel vridningen utförs. Vi får i detta fall

$$\tau = -(\nabla_{\theta} U)_Q \quad (4.87)$$

där

$$\nabla_{\theta} = \underset{\star}{\hat{\mathbf{x}}} \partial_{\theta_x} + \underset{\star}{\hat{\mathbf{y}}} \partial_{\theta_y} + \underset{\star}{\hat{\mathbf{z}}} \partial_{\theta_z} \quad (4.88)$$

Låt oss nu titta på situationen att Q inte nödvändigtvis hålls konstant, utan att systemets potential hålls oförändrad t.ex. med hjälp av batterier.

Arbetet som den elektrostatiska kraften utför blir nu

$$dW = dW_b - dU, \quad (4.89)$$

där dW_b är det arbete som batterierna utför.

Fokusera nu på enbart ledarna i systemet. Då gäller

$$dU = \frac{1}{2} \sum_j dQ_j \varphi_j, \quad (4.90)$$

enligt tidigare, då potentialerna φ_j hålls konstanta.

Å andra sidan, batteriernas arbete går ut på att föra laddning från noll-potential till ledarens potential:

$$dW_b = \sum_j dQ_j \varphi_j = 2dU \quad (4.91)$$

Vi får

$$dW = 2dU - dU = dU \quad (4.92)$$

så att

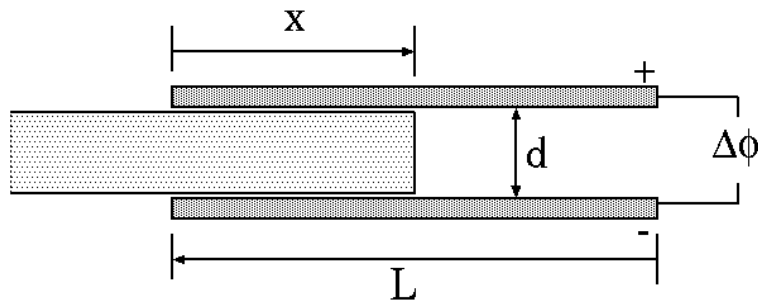
$$\mathbf{F} = (\nabla U)_\varphi \quad (4.93)$$

Motsvarande,

$$\tau = (\nabla_{\theta} U)_{\varphi} \quad (4.94)$$

★ ★ ★

Exempel : Ett dielektrikum halvvägs inne i en skivkondensator.



Vi bör bestämma kraften som vill dra dielektriket tillbaka in i skivkondensatorn, som är ansluten till ett batteri.

Om dielektriket är orienterat längs med x -axeln:

$$F_x = \partial_x U \quad (4.95)$$

$$U = \frac{1}{2} \int_V dV \varepsilon(x) E^2 \quad (4.96)$$

där

$$E = \frac{\Delta\varphi}{d} \quad (4.97)$$

gäller både i vakuum och inne i dielektriket (elfältets tangentiella komponent är kontinuerlig vid gränsytan).

Låt de ledande planens bredd vara w . Vi får nu

$$U = \frac{1}{2}\varepsilon x w d E^2 + \frac{1}{2}\varepsilon_0(l - x) w d E^2 \quad (4.98)$$

och

$$F_x = \partial_x U \quad (4.99)$$

$$= \frac{1}{2}\varepsilon w d E^2 - \frac{1}{2}\varepsilon_0 w d E^2 = \frac{1}{2}\varepsilon_0 w d E^2 (\varepsilon_r - 1)$$

$$= \frac{1}{2}\varepsilon_0 w d \left(\frac{\Delta\varphi}{d} \right)^2 (\varepsilon_r - 1)$$

$$= \frac{\varepsilon - \varepsilon_0}{2} \frac{w}{d} (\Delta\varphi)^2 > 0, \quad (4.100)$$

så kondensatorn "vill" dra in dielektriket. $\square$

Exempel : Bestäm det arbete som krävs för att föra in ett dielektrikum i en skiv-kondensator fylld med luft, om kondensatorns potential hålls konstant med hjälp av ett batteri.

Enligt tidigare exempel har vi

$$W = \int_0^L dx F_x = \frac{\varepsilon - \varepsilon_0}{2} \frac{wL}{d} (\Delta\varphi)^2 = \frac{\varepsilon - \varepsilon_0}{2} \frac{A}{d} (\Delta\varphi)^2 \quad (4.101)$$

Detta arbete utförs av kondensatorn, som får sin energi ur batteriet.

Å andra sidan, förändringen i kondensatorns energi är

$$\begin{aligned} \Delta U &= U_2 - U_1 \\ &= \frac{1}{2} C_2 (\Delta\varphi)^2 - \frac{1}{2} C_1 (\Delta\varphi)^2 \\ &= \frac{1}{2} (\Delta\varphi)^2 (C_2 - C_1) \\ &= \frac{1}{2} (\Delta\varphi)^2 \frac{A}{d} (\varepsilon - \varepsilon_0) > 0, \end{aligned} \quad (4.102)$$

eftersom luften har s.g.s. samma permittivitet som vakuum. ε är dielektrikets permittivitet.

Med andra ord, kondensatorns energi har ökat, trots att den utfört arbete när den dragit in dielektriket. Energiåtgången har kompensrats av batteriet, som alltså förlorat energin $W + \Delta U = 2\Delta U$. $\square$

Exempel : Bestäm det arbete som krävs för föra in ett dielektrikum i en skiv-kondensator fylld med luft, om kondensatorns laddning hålls konstant.

Förändringen i kondensatorns energi är

$$\begin{aligned}\Delta U &= U_2 - U_1 = \frac{Q}{2C_2} - \frac{Q}{2C_1} \\ &= \frac{Q}{2} \left(\frac{d}{\varepsilon A} - \frac{d}{\varepsilon_0 A} \right) = \frac{Qd}{2A} \left(\frac{1}{\varepsilon} - \frac{1}{\varepsilon_0} \right) \\ &= \frac{\varepsilon_0 - \varepsilon}{\varepsilon_0 \varepsilon} \frac{Qd}{2A} < 0,\end{aligned}\tag{4.103}$$

så att i detta fall har kondensatorn själv utfört arbetet

$$W = -\Delta U = \frac{\varepsilon - \varepsilon_0}{\varepsilon_0 \varepsilon} \frac{Qd}{2A}\tag{4.104}$$

Potentialskillnaden över kondensatorns skivor har sjunkit till

$$\Delta\varphi_2 = \frac{Q}{C_2} = \frac{Qd}{\varepsilon A} = \frac{Qd}{\varepsilon_r \varepsilon_0 A} = \frac{\Delta\varphi_1}{\varepsilon_r} \quad (4.105)$$

□