

0. Introduktion, matematisk bakgrund

Kai Nordlund vt. 2008.

Dessa anteckningar baserar sig i mycket stor utsträckning på anteckningarna förberedda av FD Krister Henriksson till kursen ht. 2005. Vissa delar, speciellt avsnitten om spridning och relativitetsteori, baserar sig till stor del på de tidigare anteckningarna av Prof. Dan Olof Riska.

0.1. Introduktion

Denna kurs behandlar **klassisk elektrodynamik**, läran om elektricitet och magnetism i både statiska och dynamiska tillstånd.

- Detta är en del av fysiken som är helt klassisk i den bemärkelsen att den har inga som helst kvantmekaniska bidrag. Detta är en av de allra starkaste grenarna av fysiken i att den baserar sig på några enkla matematiska ekvationer som är extremt väl baserade på och testade mot experimentellt.

Verkligheten är givetvis kvantmekanisk, och den kvantmekaniska generaliseringen av elektrodynamik ("quantum electrodynamics", QED) är numera väl känd. Men den klassiska gränsen fungerar så bra i makroskopiska och tom. atomnivås fall att QED behövs sällan utanför elementarpartikelfysiken.

Denna kurs behandlar inte QED, och kräver inga insikter i kvantmekanik. Det att atomer består av kärnor som omkretsas av elektroner antas vara känt för studeranden, men inte de kvantmekaniska orsakerna till det.

- Däremot har klassisk elektrodynamik ett mycket intressant samband med den speciella relativitetsteorin (som ju inte är en kvantmekanisk teori). Denna behandlas i slutet av kursen.
- Elektrodynamiken är naturligtvis extremt viktig i olika grenar av fysiken och i tillämpningar. T.ex. plasmafysiken grundar sig helt på elektrodynamik, elektrostatiska växelverknings är centrala i molekylfysiken, magnetism i fasta tillståndets fysik, osv. Grundekvationerna i elektronik kan härledas från elektrodynamiken, så därmed är hela elektronikindustrin i grund och botten beroende av elektrodynamik.

På denna kurs behandlas dock inte tillämpningar annat än i förbifarten i några exempel.

- Praktisk information om kursen finns på dess hemsida.

0.2. Matematisk bakgrund

[RMC, Arfken, Lahtinen]

Elektrodynamiken grundar sig i mycket stor utsträckning på vektoralgebra. Därför repeteras här några centrala begrepp och ekvationer i den. På kursens hemsida finns också litet nyttig tilläggsinformation.

0.3. Centrala vektorbegrepp

En vektor med storleken F betecknas $\mathbf{F}$ eller $\vec{F}$. I komponentform, i Cartesiska koordinater, skriver man

$$\mathbf{F} = F_x \hat{\mathbf{x}} + F_y \hat{\mathbf{y}} + F_z \hat{\mathbf{z}} \equiv F_1 \hat{\mathbf{x}} + F_2 \hat{\mathbf{y}} + F_3 \hat{\mathbf{z}} \equiv (F_x, F_y, F_z) \equiv F_x \mathbf{i} + F_y \mathbf{j} + F_z \mathbf{k} \quad (0.1)$$

På denna kurs använder vi främst de första två beteckningstyperna.

Skalärprodukten av vektorerna $\mathbf{A}$ och $\mathbf{B}$ är

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \sum_i A_i B_i \equiv |\mathbf{A}| |\mathbf{B}| \cos \alpha, \quad (0.2)$$

där α är vinkeln mellan vektorerna.

Skalärprojektion av $\mathbf{A}$ på vektorn $\mathbf{n}$ är

$$A_n = |\mathbf{A}| \cos \alpha = \mathbf{A} \cdot \hat{\mathbf{n}} = \frac{\mathbf{A} \cdot \mathbf{n}}{n} \quad (0.3)$$

där $n = |\mathbf{n}|$.

Vektorprojektionen är skalärprojektionens längd gånger enhetsvektorn för riktningen:

$$\mathbf{A}_n = A_n \hat{\mathbf{n}} = (\mathbf{A} \cdot \hat{\mathbf{n}}) \hat{\mathbf{n}} = \frac{\mathbf{A} \cdot \mathbf{n}}{n} \hat{\mathbf{n}} = \frac{\mathbf{A} \cdot \mathbf{n}}{n^2} \mathbf{n} \quad (0.4)$$

Vektorprodukten av vektorerna $\mathbf{A}$ och $\mathbf{B}$ är

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = \sum_{ijk} \epsilon_{ijk} \hat{\mathbf{u}}_i A_j B_k = \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{x}} & \hat{\mathbf{y}} & \hat{\mathbf{z}} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} = AB \sin \alpha \hat{\mathbf{n}}, \quad (0.5)$$

där $\hat{\mathbf{n}}$ är en enhetsvektor vinkelrät mot $\mathbf{A}$ och $\mathbf{B}$, och ϵ_{ijk} är **Levi-Civitas symbol**:

$$\epsilon_{ijk} = \begin{cases} +1, & (ijk) = (123), (231), (312) \\ -1, & (ijk) = (132), (213), (321) \\ 0, & i = j, j = k, i = k \end{cases} \quad (0.6)$$

Arean av en parallelogram som spänns upp av vektorerna $\mathbf{A}$ och $\mathbf{B}$ är $|\mathbf{A} \times \mathbf{B}|$.

Trippelprodukten av vektorerna **A**, **B** och **C** är

$$\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = \begin{vmatrix} A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \\ C_x & C_y & C_z \end{vmatrix} \quad (0.7)$$

Volymen av en parallelepiped som spänns upp av vektorerna **A**, **B** och **C** är $|\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{C})|$.

0.4. Vektor-identiteter

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = -\mathbf{B} \times \mathbf{A} \quad (0.8)$$

$$\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{C} \quad (0.9)$$

$$\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = \mathbf{B}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{C}) - \mathbf{C}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) \quad (0.10)$$

0.5. Gradient, divergens, rotor, och Laplaceoperatorn

Gradienten av ett skalärfält $f = f(x, y, z)$ definieras i Cartesiska koordinater som

$$\nabla_{\mathbf{r}} f = \hat{\mathbf{x}} \frac{\partial f}{\partial x} + \hat{\mathbf{y}} \frac{\partial f}{\partial y} + \hat{\mathbf{z}} \frac{\partial f}{\partial z} \equiv \hat{\mathbf{x}} \partial_x f + \hat{\mathbf{y}} \partial_y f + \hat{\mathbf{z}} \partial_z f. \quad (0.11)$$

Här betecknar underindexet att derivatan tas med avseende på positionen $\mathbf{r} = (x, y, z)$. Derivatorna kan tas med avseende på en godtycklig punkt $\mathbf{s} = (t, u, v)$ och gradienten betecknas då $\nabla_{\mathbf{s}}$. Om inget underindex ges, är det underförstått att derivatan är med avseende på (x, y, z) .

Gradienten kan grovt sagt förstås vara en "3-dimensionell derivata".

Divergensen av vektorfältet $\mathbf{A} = \mathbf{A}(x, y, z) = A_x(x, y, z)\hat{\mathbf{x}} + A_y(x, y, z)\hat{\mathbf{y}} + A_z(x, y, z)\hat{\mathbf{z}}$ definieras som

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = \sum_i \frac{\partial A_i}{\partial x_i} = \partial_x A_x + \partial_y A_y + \partial_z A_z. \quad (0.12)$$

Rotorn definieras som

$$\nabla \times \mathbf{A} = \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{x}} & \hat{\mathbf{y}} & \hat{\mathbf{z}} \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix}. \quad (0.13)$$

Laplaceoperatorn på skalärfältet f definieras som

$$\nabla \cdot (\nabla f) \equiv \nabla^2 f = \partial_x^2 f + \partial_y^2 f + \partial_z^2 f. \quad (0.14)$$

0.6. Potentialteori

[Lahtinen]

Låt f vara ett skalärfält och $\mathbf{u}$ ett vektorfält.

Om

$$\nabla \times \mathbf{u} = 0 \quad (0.15)$$

sägs $\mathbf{u}$ vara **irrotationell**.

Teorem 1:

$\nabla f = \mathbf{u}$ om och endast om $\mathbf{u}$ är irrotationell. Skalärfältet f är nu vektorfältets $\mathbf{u}$ **potential**.

Teorem 2:

$\nabla f = \mathbf{u}$ om och endast om

$$\int_A^B \mathbf{dr} \cdot \mathbf{u} \quad (0.16)$$

är oberoende av kurvan mellan A och B .

Teorem 3:

Om $\nabla f = \mathbf{u}$, så gäller att

$$f(\mathbf{r}) - f(\mathbf{r}_0) = \int_C \mathbf{dr} \cdot \mathbf{u}, \quad (0.17)$$

där C är nån kurva från $\mathbf{r}_0$ till $\mathbf{r}$.

★ ★ ★

Teoremen säger att $\nabla f = \mathbf{u}$, $\int_A^B \mathbf{dr} \cdot \mathbf{u}$ oberoende av vägen, och $\nabla \times \mathbf{u} = 0$ ($\mathbf{u}$ irrotationell) är helt ekvivalenta egenskaper.

I klartext: Om vi känner $\mathbf{u}$ kan vi bestämma $\nabla \times \mathbf{u}$. Om detta uttryck är noll vet vi att det existerar en potential f , för vilken gäller att $\int_A^B \mathbf{dr} \cdot \mathbf{u}$ är oberoende av vägen. Potentialen själv ges sedan av teorem 3.

Inom fysiken kallas irrotationella fält **konservativa**.

Exempel : Gravitationsfältet $\mathbf{F} = Gm_1m_2\hat{\mathbf{r}}/r^2$.

Vektorfältet är nu väsentligen faktorn $\hat{\mathbf{r}}/r^2$!

$$\begin{aligned} & \nabla \times \frac{\hat{\mathbf{r}}}{r^2} \\ &= \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{x}} & \hat{\mathbf{y}} & \hat{\mathbf{z}} \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ \frac{x}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} & \frac{y}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} & \frac{z}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} \end{vmatrix} \\ &= \hat{\mathbf{x}} \frac{3}{2} \left(\frac{2yz}{r^5} - \frac{2zy}{r^5} \right) + \hat{\mathbf{y}} \frac{3}{2} \left(\frac{2zx}{r^5} - \frac{2xz}{r^5} \right) + \hat{\mathbf{z}} \frac{3}{2} \left(\frac{2xy}{r^5} - \frac{2yx}{r^5} \right) \\ &= 0. \end{aligned} \tag{0.18}$$

Alltså gäller att gravitationsfältet är konservativt (irrotationellt), och t.ex. kurvan C i arbetsintegralen $\int_C \mathbf{dr} \cdot \mathbf{F}$ mellan två punkter kan väljas fritt. Den motsvarande potentialen kallas gravitationspotential och är

$$V_G(r) = \frac{Gm_1m_2}{r} \tag{0.19}$$

0.7. Nabla-formler

Motsvarande som i exemplet ovan kan vi lätt visa att

$$\nabla \times \mathbf{r} = 0. \quad (0.20)$$

★ ★ ★

Låt oss testa några motsvarande uttryck:

$$\nabla r = \nabla \left(x^2 + y^2 + z^2 \right)^{1/2} \quad (0.21)$$

$$= (\hat{\mathbf{x}}\partial x + \hat{\mathbf{y}}\partial y + \hat{\mathbf{z}}\partial z) \left(x^2 + y^2 + z^2 \right)^{1/2} \quad (0.22)$$

$$= \hat{\mathbf{x}} \frac{\frac{1}{2}2x}{(x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}} + \hat{\mathbf{y}} \frac{\frac{1}{2}2y}{(x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}} + \hat{\mathbf{z}} \frac{\frac{1}{2}2z}{(x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}} \quad (0.23)$$

$$= \frac{\hat{\mathbf{x}}x}{r} + \frac{\hat{\mathbf{y}}y}{r} + \frac{\hat{\mathbf{z}}z}{r} = \frac{\mathbf{r}}{r} \equiv \hat{\mathbf{r}} \quad (0.24)$$

så alltså

$$\nabla r = \frac{\mathbf{r}}{r} \equiv \hat{\mathbf{r}} \quad (0.25)$$

★ ★ ★

$$\nabla \cdot \mathbf{r} = \partial_x x + \partial_y y + \partial_z z = 3. \quad (0.26)$$

★ ★ ★

$$\nabla^2 \mathbf{r} = \nabla \cdot (\nabla \cdot \mathbf{r}) = 0. \quad (0.27)$$

★ ★ ★

$$\begin{aligned}
\nabla^2 r &= \left(\partial_x^2 + \partial_y^2 + \partial_z^2 \right) \left(x^2 + y^2 + z^2 \right)^{1/2} \\
&= \partial_x \frac{x}{r} + \partial_y \frac{y}{r} + \partial_z \frac{z}{r} \\
&= \frac{1}{r} - \frac{x}{r^2} \frac{\partial r}{\partial x} + \frac{1}{r} - \frac{y}{r^2} \frac{\partial r}{\partial y} + \frac{1}{r} - \frac{z}{r^2} \frac{\partial r}{\partial z} \\
&= \frac{1}{r} - \frac{x^2}{r^3} + \frac{1}{r} - \frac{y^2}{r^3} + \frac{1}{r} - \frac{z^2}{r^3} \\
&= \frac{3}{r} - \frac{1}{r} = \frac{2}{r}
\end{aligned} \tag{0.28}$$

så att

$$\nabla^2 r = \frac{2}{r} \tag{0.29}$$

★ ★ ★

$$\begin{aligned}
(\mathbf{A} \cdot \nabla) \mathbf{r} &= (A_x \partial_x + A_y \partial_y + A_z \partial_z) (x \hat{\mathbf{x}} + y \hat{\mathbf{y}} + z \hat{\mathbf{z}}) \\
&= A_x \hat{\mathbf{x}} + A_y \hat{\mathbf{y}} + A_z \hat{\mathbf{z}} \\
&= \mathbf{A}.
\end{aligned} \tag{0.30}$$

Detta ger

$$(\mathbf{A} \cdot \nabla) \mathbf{r} = \mathbf{A}. \tag{0.31}$$

★ ★ ★

Låt skalärfältet f bero endast på avståndet r :

$$\nabla f(r) = \hat{\mathbf{r}} \frac{df(r)}{dr}. \tag{0.32}$$

Följer direkt från uttrycket för ∇ i sfäriska koordinater.

★ ★ ★

Om vi i stället har ett vektorfält $\mathbf{A} = \mathbf{A}(r)$:

$$\begin{aligned}
 \nabla \cdot \mathbf{A}(r) &= \partial_x A_x(r) + \partial_y A_y(r) + \partial_z A_z(r) \\
 &= \partial_x r \frac{dA_x}{dr} + \partial_y r \frac{dA_y}{dr} + \partial_z r \frac{dA_z}{dr} \\
 &= \hat{\mathbf{x}} \partial_x r \cdot \frac{d\mathbf{A}}{dr} + \hat{\mathbf{y}} \partial_y r \cdot \frac{d\mathbf{A}}{dr} + \hat{\mathbf{z}} \partial_z r \cdot \frac{d\mathbf{A}}{dr} \\
 &= (\hat{\mathbf{x}} \partial_x r + \hat{\mathbf{y}} \partial_y r + \hat{\mathbf{z}} \partial_z r) \cdot \frac{d\mathbf{A}(r)}{dr} \\
 &= \frac{1}{r} (\hat{\mathbf{x}}^2 x + \hat{\mathbf{y}}^2 y + \hat{\mathbf{z}}^2 z) \cdot \frac{d\mathbf{A}(r)}{dr} \\
 &= \hat{\mathbf{r}} \cdot \frac{d\mathbf{A}(r)}{dr}.
 \end{aligned} \tag{0.33}$$

Detta ger

$$\nabla \cdot \mathbf{A}(r) = \hat{\mathbf{r}} \cdot \frac{d\mathbf{A}(r)}{dr}. \tag{0.34}$$

★ ★ ★

Låt skalärfältet f bero endast på $\mathbf{c} \cdot \mathbf{r}$, där $\mathbf{c}$ är en konstant vektor:

$$\begin{aligned}\nabla f(\mathbf{c} \cdot \mathbf{r}) &= \sum_i \hat{\mathbf{e}}_i \frac{\partial f}{\partial x_i} \\&= \sum_i \hat{\mathbf{e}}_i \frac{\partial(\mathbf{c} \cdot \mathbf{r})}{\partial x_i} \frac{df}{d(\mathbf{c} \cdot \mathbf{r})} \\&= \sum_i \hat{\mathbf{e}}_i c_i \frac{df}{d(\mathbf{c} \cdot \mathbf{r})} \\&= \mathbf{c} \frac{df}{d(\mathbf{c} \cdot \mathbf{r})},\end{aligned}\tag{0.35}$$

som ger

$$\nabla f(\mathbf{c} \cdot \mathbf{r}) = \mathbf{c} \frac{df}{d(\mathbf{c} \cdot \mathbf{r})}.\tag{0.36}$$

Motsvarande för ett vektorfält $\mathbf{A}$ som beror endast på $\mathbf{c} \cdot \mathbf{r}$:

$$\nabla \cdot \mathbf{A}(\mathbf{c} \cdot \mathbf{r}) = \mathbf{c} \cdot \frac{d\mathbf{A}}{d(\mathbf{c} \cdot \mathbf{r})}.\tag{0.37}$$

Beteckna

$$\nabla_{\mathbf{R}+\mathbf{r}} \equiv \hat{\mathbf{x}} \frac{\partial}{\partial(X+x)} + \hat{\mathbf{y}} \frac{\partial}{\partial(Y+y)} + \hat{\mathbf{z}} \frac{\partial}{\partial(Z+z)}. \quad (0.38)$$

Om nu $\mathbf{R}$ är en konstant vektor:

$$\begin{aligned} \nabla_{\mathbf{R}+\mathbf{r}} &= \hat{\mathbf{x}} \frac{\partial x}{\partial(X+x)} \frac{\partial}{\partial x} + \hat{\mathbf{y}} \frac{\partial y}{\partial(Y+y)} \frac{\partial}{\partial y} + \hat{\mathbf{z}} \frac{\partial z}{\partial(Z+z)} \frac{\partial}{\partial z} \\ &= \hat{\mathbf{x}} \frac{\partial}{\partial x} + \hat{\mathbf{y}} \frac{\partial}{\partial y} + \hat{\mathbf{z}} \frac{\partial}{\partial z} \\ &= \nabla_{\mathbf{r}}. \end{aligned} \quad (0.39)$$

Kan utnyttjas t.ex. vid byte av koordinatsystem, om $\mathbf{R}$ är en konstant translation.

Mer identiter om användningen av ∇ finns på kursens webbsidor under rubriken "Stödmaterial". Speciellt nyttigt i beräkningar är alla 4 nablaoperationer uttryckt i cylindriska och sfäriska koordinater..

Exempel på användningen av ∇ i sfäriska koordinater. Enligt en av ekvationerna är i sfäriska

koordinater:

$$\nabla \times \mathbf{F} = \frac{1}{r^2 \sin \theta} \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{r}} & r\hat{\theta} & r \sin \theta \hat{\varphi} \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial \theta} & \frac{\partial}{\partial \phi} \\ F_r & r F_\theta & r \sin \theta F_\phi \end{vmatrix} \quad (0.40)$$

Med hjälp av detta får man t.ex. för gravitationspotentialen som beräknades ovan omedelbart

$$\nabla \times \frac{\hat{\mathbf{r}}}{r^2} = 0 \quad (0.41)$$

ty nu är $F_\theta = F_\phi = 0$ och då $F_r = 1/r^2$ utan något vinkelberende är också $\partial_\theta F_r = \partial_\phi F_r = 0$.

0.8. Vektoroperator-identiteter

$$\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{F}) = 0 \quad (0.42)$$

$$\nabla \times (\nabla f) = 0 \quad (0.43)$$

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{F}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{F}) - \nabla^2 \mathbf{F} \quad (0.44)$$

$$\nabla(fg) = g\nabla f + f\nabla g \quad (0.45)$$

$$\nabla(\mathbf{F} \cdot \mathbf{G}) = (\mathbf{F} \cdot \nabla)\mathbf{G} + \mathbf{F} \times (\nabla \times \mathbf{G}) + (\mathbf{G} \cdot \nabla)\mathbf{F} + \mathbf{G} \times (\nabla \times \mathbf{F}) \quad (0.46)$$

$$\nabla \cdot (f\mathbf{F}) = (\nabla f) \cdot \mathbf{F} + f\nabla \cdot \mathbf{F} \quad (0.47)$$

$$\nabla \times (f\mathbf{F}) = (\nabla f) \times \mathbf{F} + f\nabla \times \mathbf{F} \quad (0.48)$$

$$\nabla \cdot (\mathbf{F} \times \mathbf{G}) = (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot \mathbf{G} - (\nabla \times \mathbf{G}) \cdot \mathbf{F} \quad (0.49)$$

$$\nabla \times (\mathbf{F} \times \mathbf{G}) = (\nabla \cdot \mathbf{G})\mathbf{F} - (\nabla \cdot \mathbf{F})\mathbf{G} + (\mathbf{G} \cdot \nabla)\mathbf{F} - (\mathbf{F} \cdot \nabla)\mathbf{G} \quad (0.50)$$

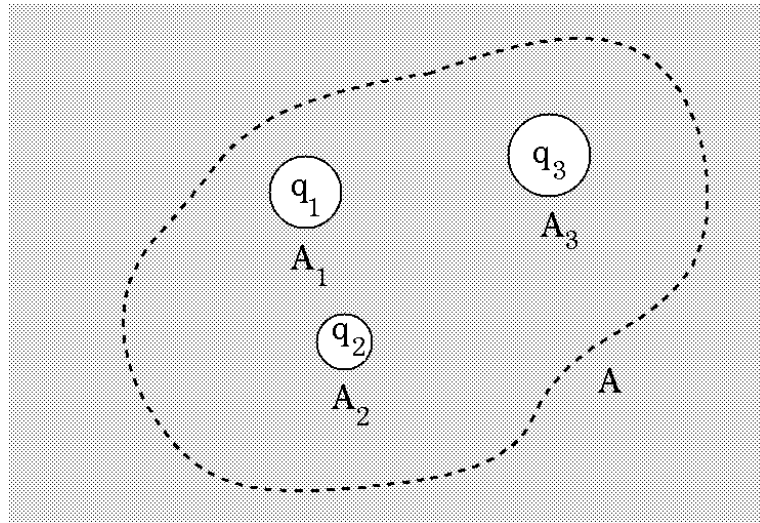
Bevis av dessa: Expandera vänstra och högre leden i komponentform.

0.9. Integralteorem

0.9.1. Gauss' teorem

$$\oint_S \mathbf{dA} \cdot \mathbf{F} = \oint_V dV \nabla \cdot \mathbf{F}. \quad (0.51)$$

Bevis:



Vi delar upp F 's komponenter i 2 halvor:

$$\begin{aligned} \mathbf{dA} \cdot \mathbf{F} &= dydz \left(F_x\left(\frac{dx}{2}, 0, 0\right) - F_x\left(-\frac{dx}{2}, 0, 0\right) \right) \\ &+ dx dz \left(F_y\left(0, \frac{dy}{2}, 0\right) - F_y\left(0, -\frac{dy}{2}, 0\right) \right) \\ &+ dx dy \left(F_z\left(0, 0, \frac{dz}{2}\right) - F_z\left(0, 0, -\frac{dz}{2}\right) \right) \end{aligned}$$

Expandera F kring centret av det infinitesimala rätblocket:

$$\begin{aligned}
\mathbf{dA} \cdot \mathbf{F} &\approx dydz \left(F_x(0, 0, 0) + \partial_x F_x \frac{dx}{2} - \left(F_x(0, 0, 0) - \partial_x F_x \frac{dx}{2} \right) \right) \\
&\quad + dxdz \left(F_y(0, 0, 0) + \partial_y F_y \frac{dy}{2} - \left(F_y(0, 0, 0) - \partial_y F_y \frac{dy}{2} \right) \right) \\
&\quad + dxdy \left(F_z(0, 0, 0) + \partial_z F_z \frac{dz}{2} - \left(F_z(0, 0, 0) - \partial_z F_z \frac{dz}{2} \right) \right) \\
&= dxdydz (\partial_x F_x + \partial_y F_y + \partial_z F_z) \\
&= dV \nabla \cdot \mathbf{F}. \quad \square
\end{aligned} \tag{0.52}$$

Obs: Ytans normalvektor pekar ut ur volymen !

Korollarium:

Låt nu $\mathbf{F} = \mathbf{a}F$, där $\mathbf{a}$ är en konstant vektor i någon riktning.

$$\oint \mathbf{dA} \cdot \mathbf{F} = \mathbf{a} \cdot \oint \mathbf{dA} F \tag{0.53}$$

$$\begin{aligned}
\oint dV \nabla \cdot \mathbf{F} &= \oint dV \nabla \cdot (\mathbf{a}F) \\
&= \oint dV (F \nabla \cdot \mathbf{a} + \mathbf{a} \cdot \nabla F) \\
&= \mathbf{a} \cdot \oint dV \nabla F
\end{aligned} \tag{0.54}$$

eller alltså

$$\oint dV \nabla \cdot \mathbf{F} - \mathbf{a} \cdot \oint dV \nabla F = 0 \tag{0.55}$$

Detta ger då man beaktar Gauss teorem $\oint dV \nabla \cdot \mathbf{F} = \oint d\mathbf{A} \cdot \mathbf{F}$:

$$\mathbf{a} \cdot \left[\oint d\mathbf{A} F - \oint dV \nabla F \right] = 0 \tag{0.56}$$

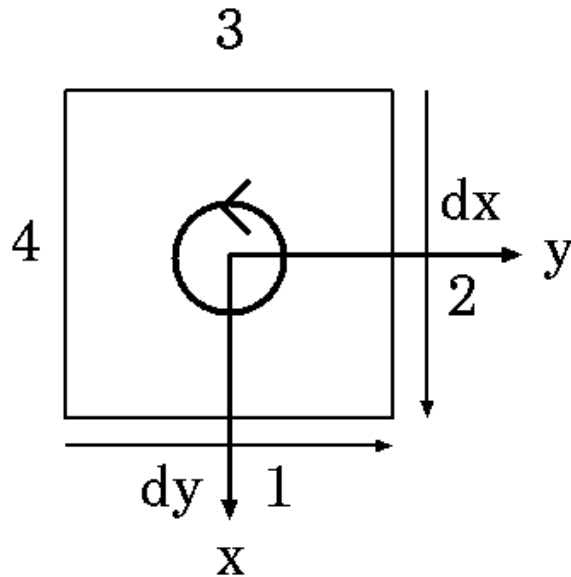
så att

$$\oint d\mathbf{A} F = \oint dV \nabla F$$
(0.57)

0.9.2. Stokes' teorem

$$\oint_S \mathbf{dA} \cdot (\nabla \times \mathbf{F}) = \oint_C \mathbf{dr} \cdot \mathbf{F}. \quad (0.58)$$

Bevis:



Låt den infinitesimala ytans normal vara i z -riktningen:

$$\mathbf{dA} \cdot (\nabla \times \mathbf{F}) = dx dy (\partial_x F_y - \partial_y F_x) \quad (0.59)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{dr} \cdot \mathbf{F} &= dy \left(F_y\left(\frac{dx}{2}, 0, 0\right) - F_y\left(-\frac{dx}{2}, 0, 0\right) \right) \\ &\quad + dx \left(-F_x\left(0, \frac{dy}{2}, 0\right) + F_x\left(0, -\frac{dy}{2}, 0\right) \right) \end{aligned} \quad (0.60)$$

Expandera $\mathbf{F}$ i centret av den infinitesimala rektangeln:

$$\begin{aligned}
\mathbf{dr} \cdot \mathbf{F} &\approx dy \left(F_y(0, 0, 0) + \partial_x F_y \frac{dx}{2} - \left(F_y(0, 0, 0) - \partial_x F_y \frac{dx}{2} \right) \right) \\
&\quad + dy \left(-F_x(0, 0, 0) - \partial_y F_x \frac{dy}{2} + F_x(0, 0, 0) - \partial_y F_x \frac{dy}{2} \right) \\
&= dxdy(\partial_x F_y - \partial_y F_x). \quad \square
\end{aligned} \tag{0.61}$$

Obs: Ytans normalvektor och kurvans riktning bildar ett högerhandssystem !

Korollarium:

Låt nu $\mathbf{F} = \mathbf{a}F$.

$$\oint \mathbf{dr} \cdot \mathbf{F} = \oint \mathbf{dr} \cdot (\mathbf{a}F) = \mathbf{a} \cdot \oint \mathbf{dr} F \tag{0.62}$$

$$\begin{aligned}
\oint \mathbf{dA} \cdot (\nabla \times \mathbf{F}) &= \oint \mathbf{dA} \cdot (\nabla \times [\mathbf{a}F]) \\
&= \oint \mathbf{dA} \cdot (F \nabla \times \mathbf{a} + (\nabla F) \times \mathbf{a})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \oint \mathbf{dA} \cdot (\nabla F) \times \mathbf{a} \\
&= \oint \mathbf{dA} \times (\nabla F) \cdot \mathbf{a} \\
&= \mathbf{a} \cdot \oint \mathbf{dA} \times (\nabla F)
\end{aligned} \tag{0.63}$$

Från detta och Stokes teorem följer

$$\oint \mathbf{dr} F = \oint \mathbf{dA} \times (\nabla F) \tag{0.64}$$

0.10. Diracs delta-funktion

Diracs delta-funktion är en speciell funktion som introducerades av fysikern Dirac. Den är ofta nyttig i elektrodynamiken för att beskriva punktladdningar, varför vi introducerar dess matematiska egenskaper här.

En intressant fotnot är att i den enklaste matematiska teorin för integralkalkyl kan inte Diracs deltafunktion existera! För att använda den matematiskt rigoröst krävs mer avancerad Lebesgue-integreringsteori där deltafunktionen kan anses vara en distribution. Men som fysiker behöver man i praktiken inte bry sig om denna skillnad.

Följande grundläggande egenskaper gäller för Diracs delta-funktion $\delta(\mathbf{r})$:

$$\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) = 0, \quad \mathbf{r} \neq \mathbf{r}_0 \quad (0.65)$$

$$\int_V dV \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) = 1, \quad \mathbf{r}_0 \in V \quad (0.66)$$

Om integrationsvolymen V' inte innehåller $\mathbf{r}_0$:

$$\int_{V'} dV \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) = 0. \quad (0.67)$$

Övriga egenskaper:

$$\int dV F(\mathbf{r}) \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) = F(\mathbf{r}_0) \quad (0.68)$$

$$\int dV F(\mathbf{r}) \delta(\mathbf{r}) = F(0) \quad (0.69)$$