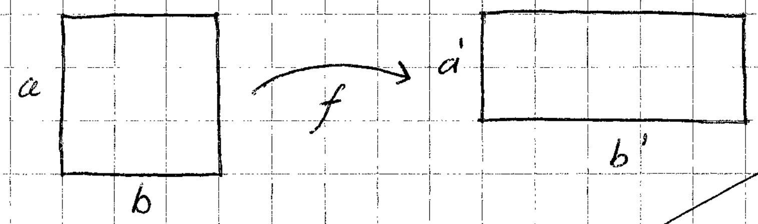
Grötzsch 1928



peilaamalla koko tasoon $\Rightarrow f = \alpha z + \beta$

Ei ole konformista kuvausta f (reunat reunoille)

Mikä on ~~lähimm~~ lähimmäksi ("paras" melkein) konforminen kuvaus?

f homeomorfismi, säilyttää suunnan

$w = f(z)$, $z = x + iy$

(*) $dw = \partial_z f\, dz + \partial_{\bar z} f\, d\bar z$,

$$\partial_z f = \frac{1}{2}(\partial_x f - i\partial_y f) \qquad \partial_{\bar z} f = \frac{1}{2}(\partial_x f + i\partial_y f)$$

$$|\partial_z f|^2 - |\partial_{\bar z} f|^2 = \det Df = J$$

(*) $\Rightarrow \quad (|f_z| - |f_{\bar z}|)|dz| \leq |dw| \leq (|f_z| + |f_{\bar z}|)|dz|$

$$K(z) := \frac{|\partial_z f| + |\partial_{\bar z} f|}{|\partial_z f| - |\partial_{\bar z} f|} \geq 1 \qquad \text{dilataatio}$$

nimi Ahlfors 1935

__Määr__ $f : \Omega \to \Omega'$ on K-kvasikonforminen, jos

$|K(z)| \leq K$ ja f on homeomorfismi diffeomorfismi, $f \in W^{1,2}_{loc}(\Omega)$

Yhtäpitävästi: – $|Df(z)|^2 \leq K\, J(f, z)$

– $\partial_{\bar z} f = \mu(z)\, \partial_z f$, $\quad |\mu(z)| \leq k < 1$

Beltramin yhtälö $\quad \mu = \dfrac{\partial_{\bar z} f}{\partial_z f}$ kompleksi-dilataatio, $k = \dfrac{K-1}{K+1}$, $K = \dfrac{1+k}{1-k}$

(analyyttiset määritelmät)

(*) kuvaa infinitesimaalisesti ympyrät ellipseiksi, $K(z) = \dfrac{\text{major}}{\text{minor}}$

Grötzsch-ratkaisu:

$$a' \le \int_0^a \left(|f_z| + |f_{\bar z}|\right) dx$$

$$a'b \le \int_0^a \int_0^b \left(|f_z| + |f_{\bar z}|\right) dx\,dy$$

$$= \int_0^a \int_0^b \left(\frac{\sqrt{|f_z| + |f_{\bar z}|}}{\sqrt{|f_z| - |f_{\bar z}|}} \sqrt{|f_z| + |f_{\bar z}|}\,\sqrt{|f_z| - |f_{\bar z}|} \right)$$

Hölder

$$\Rightarrow \quad a'^2 b^2 \le \int_0^a \int_0^b K(z)\, dx\,dy \; \underbrace{\int_0^a \int_0^b J \, dx\,dy}_{a'b'}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{a'}{b'} : \frac{a}{b} \le \frac{1}{ab} \int_0^a \int_0^b K(z) \le \sup K(z)$$

$$\boxed{f(z) = \frac{1}{2}\left(\frac{a'}{a} + \frac{b'}{b}\right) z + \frac{1}{2}\left(\frac{a'}{a} - \frac{b'}{b}\right) \bar z}$$

Esimerkkejä: 1-qc $\Leftrightarrow$ konforminen

Koch-lumihiutale

säteensuuntainen venytys (radial stretching):

$z \mapsto z|z|^{K-1}$, $\quad z \mapsto z|z|^{1/K - 1}$,

$z \mapsto \frac{z}{|z|}\rho(|z|)$

ρ, aidosti kasvava

Lemma $\quad f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, K-qc, $|z_0 - z_1| = |z_0 - z_2|$

$$|f(z_0) - f(z_1)| \le \lambda(K) |f(z_0) - f(z_2)|$$

$\lambda(K) = \sup\{ |f(e^{i\theta})| : f \in \mathcal{F},\ 0 \le \theta \le 2\pi \}$,

$\mathcal{F} = \{ f : \mathbb{C} \to \mathbb{C},\ K\text{-qc},\ f(0) = 0,\ f(1) = 1 \}$; $\quad 1 < \lambda(K) \le \frac{1}{16} e^{\pi K}$, $1 < K < \infty$

$\lambda(K) \to 1$, $K \to 1$

"Isoperimetrinen epäyhtälö":

Ω rajoitettu, yhtenäinen, avoin Jordan alue, jonka reuna $\partial\Omega$ on suoristuva

$$|\Omega| \leq \frac{1}{4\pi}\left[\mathcal{H}^1(\partial\Omega)\right]^2 .$$

reuna on injektiivinen ~~suljettu~~ jatkuva ympyrän kuva

"äärellinen pituus"

"Pallolla on suurin pinta-ala"
(n-ulotteisuuteen Steinerin symmetrisoinnilla)

Todistus: Skaalaamalla voimme olettaa $\mathcal{H}^1(\partial\Omega) = 2\pi$.
$(x,y) \to \delta(x,y)$ muuttaa pituutta δ ja pinta-alaa δ^2

Parametrisoidaan kaaren pituuden suhteen

$$\gamma : [0, 2\pi] \longrightarrow \partial\Omega,$$

γ 2π-jaksollinen, absoluuttisesti jatkuva, $|\gamma'(t)| = 1$ m.k. $t \in [0, 2\pi]$;

$$\gamma(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{int} .$$

Fourier sarjat & Parseval

Nyt
$$2\pi = \int_0^{2\pi} |\gamma'(t)|^2 \, dt = 2\pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} n^2 |c_n|^2 .$$

Greenin kaava: $\displaystyle\int_\Omega \left(\frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y}\right) dx\,dy = \int_{\partial\Omega} (f\,dx + g\,dy)$

Kompleksimerkinnöillä $\displaystyle\int_\Omega (\partial_z f + \partial_{\bar z} g)\, dx\,dy = \frac{i}{2}\left(\int_{\partial\Omega} f\, d\bar z - \int_{\partial\Omega} g\, dz\right)$

Valitaan $f(z) \equiv z$, $g(z) \equiv \bar z$, jolloin

$$2|\Omega| = \frac{i}{2}\int_{\partial\Omega} z\, d\bar z - \bar z\, dz = \int_0^{2\pi} \operatorname{Im}\left(\overline{\gamma(t)}\,\gamma'(t)\right) dt$$

$$\leq 2\pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} n |c_n|^2 \leq 2\pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} n^2 |c_n|^2 = 2\pi \qquad \square$$

$$\int_0^{2\pi} e^{int} e^{imt} \neq 0 \iff m = -n$$

Lause Oletetaan, että $f:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ on K-qc ja $f(0)=0$, $f(1)=1$.

(1) $$|f(z)| \le \lambda(K)^2 |z|^{1/K}, \quad 0\le |z|\le 1.$$

(2) $\frac{1}{K}$ on paras mahdollinen.

(Morreyn idea)

Todistus: $f(z) = z|z|^{1/K-1} \Rightarrow (2)$

Olkoon $t>0$, $B := \mathbb{D}(0,t)$, $J := J(z,f) := \det(Df)$.
Melkein kaikille $t>0$ pätee

$$\int_B J = |f(B)| \le \frac{1}{4\pi}\left[\mathcal{H}^1(\partial f(B))\right]^2 = \frac{1}{4\pi}\left(\int_{\partial B} |Df|\right)^2$$

$$= \frac{1}{4\pi}\left(\int |Df|\,\chi_{\partial B}\chi_{\partial B}\right)^2 \le \frac{1}{4\pi}\left[\left(\int |Df|^2\chi_{\partial B}^2\right)^{1/2}\left(\int \chi_{\partial B}^2\right)^{1/2}\right]^2$$

$$= \frac{1}{4\pi}\int_{\partial B} |Df|^2 \;\mathcal{H}^1(\partial B) = \frac{K\,\mathcal{H}^1(\partial B)}{4\pi}\int_{\partial B}\frac{|Df|^2}{K}$$

$$\le \frac{K\,2\pi t}{4\pi}\int_{\partial B} J = \frac{Kt}{2}\int_{\partial B} J.$$

$\phi(t) := \int_{\mathbb{D}(0,t)} J(z,f)$, tällöin yllä olevan laskun ~~antaa~~ perusteella

$$\phi(t) \le \frac{Kt}{2}\phi'(t) \quad \text{tai}$$

$$\frac{d}{dt}\left(t^{-2/K}\phi(t)\right) \ge 0 \quad \text{m.k. } t>0.$$

Integroidaan yli $[t,1]$:

$$\phi(t) \le \phi(1)\, t^{2/K}, \quad 0<t\le 1.$$

Ol. $|z| = r < 1$

$$|f(z)| \le \lambda(K) \inf_{|w|=r} |f(w)| \le \lambda(K)\left(\frac{|f(\mathbb{D}(0,r))|}{\pi^2}\right)^{1/2} \le \lambda(K)\left(\frac{|f(\mathbb{D}(0,1))|}{\pi^2}\right)^{1/2} r^{1/K}$$

$$\le \lambda(K)^2 r^{1/K}$$

□

Hölder-jatkuvuus: $|f(x)-f(y)| \leq C\,|x-y|^{\gamma}$, $\gamma \in [0,1)$.

Seuraus $f: \Omega \to \Omega'$ K-qc on lokaalisti $\frac{1}{K}$-Hölder-jva

$\left(B \subset 2B \subset \Omega, \quad |f(z)-f(w)| \leq C(K)\, \operatorname{diam} f(B) \frac{|z-w|^{1/K}}{(\operatorname{diam} B)^{1/K}}, \; z,w \in B \right)$