

L9: Rayleigh testi

Laskuharjoitus

- ▶ **Data** on tiedoston `H7binput.dat` 1. sarake: $t = t_i$
Ajan hetket ovat $t = t_1, t_2, \dots, t_n$, missä $n = 528$
- ▶ **Laske ja plottaa** välillä $f_{\min} = 1/P_{\max}$ ja $f_{\max} = 1/P_{\min}$

$$z(f_j) = \left\{ \left[\sum_{i=1}^n \cos 2\pi f_j (t_i - t_0) \right]^2 + \left[\sum_{i=1}^n \sin 2\pi f_j (t_i - t_0) \right]^2 \right\} / n,$$

missä f_j testattu frekvenssi, $P_{\min} = 1.5$, $P_{\max} = 90.0$ ja $t_0 = 0$

- ▶ Testattavien frekvenssien f_j välinen etäisyys on $f_{\text{step}} = f_0 / \text{OFAC}$, missä $f_0 = 1 / \Delta T$, $\Delta T = t_n - t_1$ ja $\text{OFAC} = 10$
- ▶ Välille $f_{\min}$ ja $f_{\max}$ sopii testattavia f_j frekvenssejä $M = \text{INT}[(f_{\max} - f_{\min}) / f_{\text{step}}]$ kappaletta, missä INT poistaa argumentin desimaaliosan (Esim: $\text{INT}[12.34] = 12$).
- ▶ Testattavat frekvenssit ovat $f_j = f_{\min} + j f_{\text{step}}$, missä $j = 0, 1, 2, 3, \dots, M$
- ▶ **Vihje:** Luennon 6. ohjelmissa `Psub2.py` ja `Osub2.m` on laskettu $z(f_j)$ yhdelle frekvenssin arvolle

Ohjelman rakenne

1. Lue t
2. Kiinnitä $p_{\min} = 1.5$,
 $p_{\max} = 90$, $ofac = 10$
3. Laske $f_{\min}$, $f_{\max}$, f_{step}
ja M
4. Luo M testattavaa
frekvenssiä vektoriin $f = f_j$
5. Luo "tyhjä periodogrammi"
 $z = 0.0 * f = z(f_j)$
6. Tee f looppi, joka laskee
arvot $z(f_j)$ arvoille f_j ja
tallentaa tuloksen vektoriin z
7. Plottaa z versus f
8. Tunnista ja merkitse korkein
piikki $z_{\text{best}} = z(f_{\text{best}})$
kohdassa $f_{\text{best}} = f_{\text{best}}$
9. Kirjoita kuvaan $n = 528$ ja
 $P_{\text{best}} = 1/f_{\text{best}} = 2.85$ tiedot

L9: Etsintä vektorista

- ▶ **python** valinta indeksien avulla
- ▶ `import numpy ; a=numpy.arange(3)`
eli `a` on `[0 1 2]`
- ▶ `i=(a==max(a)) ; print(i)`
tulostaa `[False False True]`
ja `print(a[i])` tulostaa `[2]`
- ▶ `j=(a==max(a)).nonzero() ; print(j)`
tulostaa indeksin arvon `(array([2]),)`
ja `print(a[j])` tulostaa myös `[2]`
- ▶ `k=((a>0) & (a<2)) ; print(k)`
tulostaa `[False True False]`

- ▶ **Harjoituksen** korkein piikki esim:

```
j=(z==max(z)).nonzero()  
fbest=f[j] ; zbest=z[j]
```

- ▶ **octave** valinta indeksin avulla

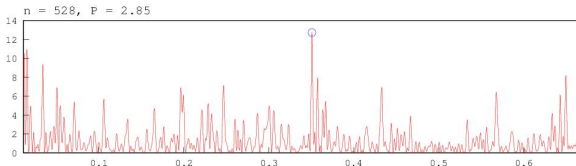
```
a=[0,1,2];
```

- ▶ `j=((a>0) & (a<2)); disp(j)`
tulostaa `0 1 0` ja `disp(a(j))` antaa `1`

- ▶ `j=find((a>0) & (a<2)); disp(j)`
tulostaa `2` ja `disp(a(j))` antaa myös `1`

- ▶ **Harjoituksen** korkein piikki esimerkiksi

```
j=find(z==max(z))  
fbest=f(j) ; zbest=z(j)
```



L9: Tehospektri

Tehospektri

- ▶ Tehospektri (engl. Power spectrum: Scargle 1982, ApJ 263, 853: Eq. 10)

- ▶ Aikasarja: $n =$ Havaintoa

$$t_i = t_1, t_2, \dots, t_n = \text{Havaintoajat}$$

$$y_i = y(t_i) = y_1, y_2, \dots, y_n = \text{Havainnot}$$

$$m_y = [\sum y_i]/n = \text{Havaintojen keskiarvo}$$

$$y'_i = y_i - m_y$$

- ▶ **Ongelma:** Onko aikasarjassa y_i periodisuutta?
- ▶ Tehospektrin arvo testattavalla frekvensillä f on

$$z(f) = \frac{\{\sum_{i=1}^n y'_i \cos [2\pi f(t_i - \tau)]\}^2}{2 \sum_{i=1}^n \{\cos [2\pi f(t_i - \tau)]\}^2} + \frac{\{\sum_{i=1}^n y'_i \sin [2\pi f(t_i - \tau)]\}^2}{2 \sum_{i=1}^n \{\sin [2\pi f(t_i - \tau)]\}^2},$$

missä τ toteuttaa

$$\tan(4\pi f\tau) = \left[\sum_{i=1}^n \sin(4\pi f t_i) \right] \left[\sum_{i=1}^n \cos(4\pi f t_i) \right]^{-1}$$

- ▶ Paras periodi $P_{\text{best}} = 1/f_{\text{best}}$, missä $z_{\text{max}} = z(f_{\text{best}}) =$ periodogrammin korkein piikki
- ▶ Luonnollinen ensimmäinen reaktio: **“Onpas karmea risuaita”**

L9: Tehospektri

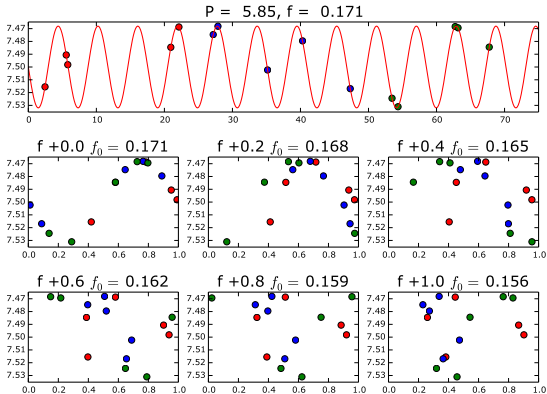
Testattavat frekvenssit

- ▶ **Laskuharjoituksessa** testattava periodiväli on $P_{\min} = 1$ ja $P_{\max} = 10$
 $\Rightarrow$ Testattava frekvenssiväli on $f_{\min} = 1/P_{\max} = 0.1$ ja $f_{\max} = 1/P_{\min} = 1$.
- ▶ Kahden **riippumattoman testattavan frekvenssin etäisyys** on $f_0 = 1/\Delta T$, missä $\Delta T = t_n - t_1$ eli havaintovälin koko pituus
Jokaisella testattavalla f toteutuu $\Delta T(f \pm f_0) = f\Delta T \pm \Delta T/\Delta T = f\Delta T \pm 1$
 $\Rightarrow$ Kun f muuttuu f_0 verran, tehdään kierros enemmän tai vähemmän koko ΔT aikana
 $\Rightarrow$ Koko data “sotkettu” $\Rightarrow z(f)$ ja $z(f \pm f_0)$ ovat toisistaan riippumattomat
- ▶ **Testattavien frekvenssien** välisen etäisyyden pitää olla tiheämpi $\Rightarrow$ Saadaan tarkka f_{best}
- ▶ Valitaan “askel” (engl. step) $f_{\text{step}} = f_0/\text{OFAC}$, missä $\text{OFAC} = 10$ (engl. Overfilling Factor)
- ▶ Testattavia frekvenssien **määrä** testattavalla frekvenssivälillä $M = \text{INT}[(f_{\max} - f_{\min})/f_{\text{step}}]$, missä INT poistaa argumentin desimaaliosan (Esim: $\text{INT}[123.45] = 123$).
- ▶ Tehospektri $z(f_j)$ lasketaan kaikille testattavien frekvenssien arvoille $f_j = f_{\min} + j f_{\text{step}}$, missä $j = 0, 1, 2, 3, \dots, M$

L9: Tehospektri

Testattavat frekvenssit

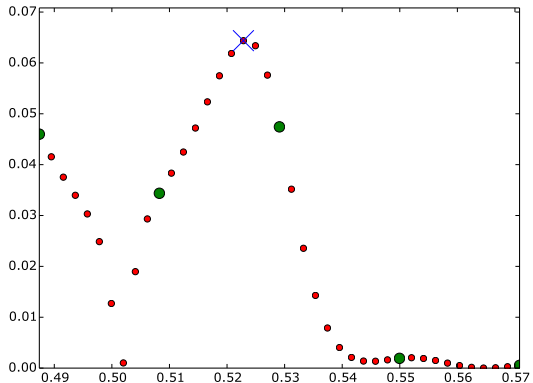
- ▶ Tunnista yksittäisten pallojen liikkeit
- ▶ **Punaiset** datan alussa $\Rightarrow$ Siirtyvät hitaimmin, kun f muuttuu
- ▶ **Siniset** datan keskellä $\Rightarrow$ Siirtyvät nopeammin, kun f muuttuu
- ▶ **Vihreät** datan lopussa $\Rightarrow$ Siirtyvät nopeimmin, kun f muuttuu
- ▶ **KAIKKI** sotkettu, kun f muuttunut arvoon $f + f_0$
- ▶ **Alun ja lopun** pallot takaisin lähes omille paikoilleen arvolla $f + f_0 \Rightarrow$ Usein $z(f)$ piikkejä arvoilla $f' = f \pm f_0$



L9: Tehospektri

Testattavat frekvenssit

- ▶ Suurennos
laskuharjoituksen
tehospektristä
- ▶ f_j = monikerta f_0
= vihreät pallot
- ▶ f_j = monikerta f_{step}
= punaiset pallot
- ▶ Huippu kohdassa f_{best}
= sininen ruksi
- ▶ Riittävän lyhyt
testattavien
frekvenssien f_j "askel"
 f_{step} antaa tarkan arvon
 $p_{\text{best}} = 1 / f_{\text{best}}$
- ▶ Matka f yksiköissä
huipulta perustasoon
noin kahden vihreän
pallon väli $\approx f_0$



L9: Tehospektri

► Laskuharjoitus: Tehospektrin ohjelmointi

► **Ennen looppia:** $t = t_i$ ja $y = y_i$ luettu,

$y_{\text{dot}} = y'_i = y_i - m_y$ ja $f = f_j$ luotu

► Luo "tyhjä periodiogrammi" $z = 0 * f$

► **For loopissa:** $f = f_j$ frekvenssi **muuttuu**

f_j **muuttuu** $\Rightarrow t_i$ ja y'_i **ei muutu**

f_j **muuttuu** $\Rightarrow \tau$ **muuttuu** $\Rightarrow z(f_j)$ **muuttuu**

► **1.** Valitse testattava $f_j = f(j)$

► **2.** Laske τ (loopissa $x = 4 * \pi * f * t$)

$$\tau = \frac{1}{4\pi f_j} \operatorname{atan} \left[\frac{\sum_{i=1}^n \sin(4\pi f_j t_i)}{\sum_{i=1}^n \cos(4\pi f_j t_i)} \right]$$

► **3.** Laske osoittajat ($x = 2 * \pi * f * (t - \tau)$)

$$z_1(f_j) = \left\{ \sum_{i=1}^n y'_i \cos[2\pi f_j(t_i - \tau)] \right\}^2$$

$$z_2(f_j) = \left\{ \sum_{i=1}^n y'_i \sin[2\pi f_j(t_i - \tau)] \right\}^2$$

► **4.** Laske nimittäjät ($x = 2 * \pi * f * (t - \tau)$)

$$z_3(f_j) = 2 \sum_{i=1}^n \{ \cos[2\pi f_j(t_i - \tau)] \}^2$$

$$z_4(f_j) = 2 \sum_{i=1}^n \{ \sin[2\pi f_j(t_i - \tau)] \}^2$$

► **5.** Laske $z(j) =$

$$z(f_j) = \frac{z_1(f_j)}{z_3(f_j)} + \frac{z_2(f_j)}{z_4(f_j)}$$

► **6.** Palaa kohtaan **1.** ja valitse seuraava testattava frekvenssi f_j

► **For looppi** loppuu kohtaan

► Muita tapoja: koko kaava kerralla, s.o. **3.**, **4.** ja **5.** samalla rivillä

► Muita tapoja: **for** korvattu **while**

L9: Tehospektri

Ohjelmointi

- ▶ **7.** Plottaa $z(f_j)$
- ▶ **8.** Tunnista korkein piikki
 $z_{\max} = z(f_j = f_{\text{best}})$
- ▶ **9.** Anna pyydetty informaatio $n = 100$ ja $P = 1.91$
- ▶ Harjoitustyön kuvassa on pyydetty plottaamaan myös havainnot kuvan yläosaan
- ▶ **python** ja **octave** voivat antaa eri tuloksen, esim. $P = 1.91$ ja $P = 1.92$
- ▶ Kuvassa “havaittu yöllä” eli $P \approx 1$ “ikkuna”
- ▶ Tehospektrin P varmasti oikea, jos sinikäyrä on oikea malli havainnoille

Vihje: Laskuharjoituksessa **H6b** laskettiin aiemmin τ , $z_1(f_j)$ ja $z_2(f_j)$ arvot yhden testattavan frekvenssin f tapaukselle

