Rayleigh testi

Data: Tämän Rayleigh testi tehtävän data on $n = 528$ aikapistettä t_i, jotka ovat järjestyksessä $t_1 < t_2 < ... < t_n$. Nämä aikapisteet annettiin **aiemman laskuharjoituksen** tiedostossa `Rayleighdata.dat` seuraavassa muodossa

```
1.080  1.
1.240  1.
...
```

Ensimmäinen sarake sisälsi t_i arvot. Toisella sarakkeella ei ollut merkitystä. Ei ole järkevää esittää dataa muodossa 528 riviä & 1 sarake tässä LaTeX dokumentissa `Rayleighteoriavalmis.tex`. **Aiemmassa laskuharjoituksessa** tehtiin **python** ohjelma, joka kirjoitti tämän tiedoston `Rayleighdata.dat` toivottuun muotoon `RayleighLatexData.dat`. Tässä uudessa `RayleighLatexData.dat` tiedostossa 528 aikapisteiden arvoa jaettiin 11 sarakkeeseen. Sarakkeiden väliin on lisätty `&` merkit ja rivien loppuun `\\` merkit. Jos tiedoston `RayleighLatexData.dat` siirtää sopivaan LaTeX ympäristöön `tabular`, näyttää tulos samalta kuin alla

1.08	31.26	65.09	97.47	128.28	156.09	190.26	239.08	274.36	314.07	346.38
1.24	31.43	65.27	98.09	128.47	156.27	190.43	239.23	277.07	314.22	347.38
1.40	32.09	65.46	98.28	132.09	156.46	191.09	239.38	277.22	314.36	348.08
2.08	32.26	66.09	98.47	132.28	157.09	191.26	242.08	277.36	320.07	348.23
2.24	32.43	66.27	99.09	132.47	157.27	191.43	242.23	278.07	320.22	348.38
3.08	33.26	66.46	99.28	134.09	157.46	192.09	242.38	278.22	320.37	350.08
3.24	35.09	69.09	99.47	134.28	158.09	192.26	245.08	278.36	323.07	350.23
4.08	35.26	69.28	100.09	134.47	158.27	192.43	245.23	279.07	323.22	350.39
4.24	35.43	69.46	100.28	135.09	158.46	197.08	245.38	279.22	323.37	351.08
4.40	37.09	70.09	100.47	135.28	160.09	197.25	246.08	279.36	324.07	351.23
5.40	37.26	70.28	102.09	135.47	160.27	197.42	246.23	281.07	324.37	351.39
6.08	37.43	70.46	102.28	137.09	160.45	202.08	246.38	281.22	325.07	353.08
6.24	38.09	75.09	102.47	137.28	161.09	202.25	248.07	281.36	325.22	353.23
6.40	38.26	75.28	103.09	137.47	161.27	202.42	248.23	282.07	325.37	353.39
7.08	38.43	75.46	103.28	140.09	161.45	207.08	248.38	282.22	328.07	354.08
7.24	39.09	80.09	103.47	140.28	163.27	207.25	255.07	282.36	328.22	354.23
8.08	39.26	80.28	105.09	140.47	163.45	207.41	255.22	283.07	328.37	354.39
8.24	39.44	80.47	105.28	141.09	166.09	208.08	255.37	283.22	329.07	355.08
8.41	40.09	83.09	105.47	141.28	166.27	208.25	256.07	283.36	329.22	355.39
9.08	40.26	83.28	110.47	141.47	166.45	208.41	256.22	285.07	329.37	357.08
9.24	40.44	83.47	111.09	142.09	168.09	209.08	256.37	285.21	331.07	357.24
9.41	42.09	84.09	111.28	142.28	171.09	209.25	257.07	285.36	331.22	357.39
12.08	42.26	84.28	111.47	142.47	171.27	209.41	257.22	290.36	331.37	358.08
14.08	42.44	84.47	112.09	143.09	171.44	211.08	257.37	292.07	333.37	358.24
17.08	43.09	85.09	112.28	143.28	172.09	211.25	258.07	292.21	334.07	358.39
17.25	43.26	85.28	115.09	143.47	172.27	211.41	258.22	292.36	334.22	359.08
17.41	43.44	85.47	115.28	144.09	172.44	213.08	258.37	293.07	334.37	359.24
18.08	44.09	86.09	115.47	144.28	174.09	213.24	261.07	293.21	337.07	359.39
18.25	45.09	86.28	116.09	144.47	174.26	213.41	261.22	293.36	337.23	
18.41	45.26	86.47	116.28	146.09	174.44	216.08	261.37	294.07	337.38	
20.08	45.44	87.09	119.09	146.28	177.09	216.24	262.07	294.21	338.07	
20.25	46.09	87.28	119.28	146.46	177.26	216.40	262.22	294.36	338.23	
20.42	46.27	87.47	119.47	147.09	177.44	217.08	262.37	297.07	338.38	
23.08	46.44	88.09	121.09	147.28	181.09	217.24	264.07	297.21	339.07	
23.25	48.09	88.28	121.28	147.46	181.26	217.40	264.22	297.36	339.23	
23.42	48.27	88.47	121.47	148.09	181.44	224.08	264.37	298.07	339.38	
24.08	48.44	89.09	122.09	148.28	183.09	224.24	265.07	298.21	341.08	
24.25	50.45	89.28	122.28	148.46	184.09	224.40	265.22	298.36	341.23	
26.09	57.09	89.47	122.47	149.09	184.26	225.08	265.37	299.07	341.38	
26.25	57.27	91.09	123.09	149.28	184.43	225.24	268.07	299.21	342.08	
26.42	57.45	91.28	123.28	149.46	185.09	225.40	268.22	299.36	342.23	
27.09	58.09	91.47	123.47	151.09	185.26	228.08	268.36	301.07	342.38	
27.25	58.27	93.09	124.09	151.28	185.43	228.24	269.07	301.21	343.08	
27.42	58.45	93.28	125.09	151.46	187.09	228.39	269.22	301.36	343.23	
28.25	59.09	93.47	125.28	153.09	187.26	237.08	269.36	303.07	343.38	
28.43	59.27	94.09	125.47	153.28	187.43	237.23	272.07	303.22	345.08	
29.09	59.45	94.28	127.09	153.46	188.09	237.38	272.22	303.36	345.23	
29.25	62.09	94.47	127.28	154.09	188.26	238.08	272.36	308.07	345.38	
29.43	62.27	97.09	127.47	154.28	188.43	238.23	274.07	308.22	346.08	
31.09	62.45	97.28	128.09	154.46	190.09	238.38	274.22	308.36	346.23	

Jos tiedosto `RayleighLatexData.dat` on samassa hakemistossa kuin tämä LaTeX tiedosto `Rayleighteoriavalmis.tex`, niin yläpuolella näkyvä taulukko voidaan tuoda LaTeX dokumentin `Rayleighteoriavalmis.tex` sisään riveillä

```
\begin{center}
\begin{scriptsize}
\begin{tabular}{rrrrrrrrrrr}
\input{RayleighLatexData.dat}
\end{tabular}
\end{scriptsize}
\end{center}
```

Teoria: Oletetaan, että aika on pitkä suora viiva. Tapahtumia edustavat pisteet, jotka ovat viivalla tasavälisillä etäisyyksillä 2π. Kelaataan aika pyörälle, jonka läpimitta on $d = 1$. Tapahtumia edustavat pisteet päätyvät samaan paikkaan pyörän päälle. Kelataan aika takaisin suoraksi viivaksi ja poistetaan osa näistä tapahtumia edustavista pisteistä, jolloin tapahtumien väliin syntyy aukkoja. Jos aika kelataan taas takaisin pyörälle, pisteet päätyvät edelleen samaan paikkaan pyörän päälle. Mutta jos pyörän läpimitta on $d \neq 1$, pisteet eivät päädy samaan paikkaan, vaan ne leviävät satunnaisesti ympäri pyörän pintaa. Tämä on analogia Rayleigh:n testistä. Testissä projisoidaan aikapisteet yksikköympyrälle käyttäen testattavan periodin arvoa P. Aikapisteet päätyvät samaan suuntaan yksikköympyrälle, jos niiden jakauma on säännöllinen testattavalla periodilla P.
Rayleigh testissä testattavaa periodia P vastaa frekvenssi $f = 1/P$. Testattavalla frekvensillä f lasketaan vaiheet

$$\phi_{\rm i} = {\rm FRAC}[(t_{\rm i} - t_0)f],$$

missä t_0 on nolla epookki ja FRAC$[x]$ poistaa argumentin x kokonaislukuosan (Esim: FRAC$[1.23] = 0.23$). Aikapisteet t_i projisoidaan yksikkövektoreille

$$\mathbf{r}_{\rm i} = [\cos\Theta_{\rm i}, \sin\Theta_{\rm i}],$$

missä $\Theta_{\rm i} = 2\pi\phi_{\rm i}$ ovat vaihekulmat. **Rayleigh:n testiparametri** on

$$z(f) = |\mathbf{R}|^2/n,$$

missä vektori $\mathbf{R} = \sum_{\rm i=1}^{\rm n} \mathbf{r}_{\rm i}$. Jos kaikki yksikkövektorit $\mathbf{r}_{\rm i}$ ovat samansuuntaiset, toteutuu $|\mathbf{R}| = n$ eli $z = n$. Jos niiden suunnat ovat satunnaiset, toteutuu $|\mathbf{R}| \approx 0$ eli $z \approx 0$. Toinen käytetty muoto on

$$z(f) = (R_{\rm x}^2 + R_{\rm y}^2)/n,$$

missä $R_{\rm x} = \sum_{\rm i=1}^{\rm n} \cos\Theta_{\rm i}$ and $R_{\rm y} = \sum_{\rm i=1}^{\rm n} \sin\Theta_{\rm i}$. Tästä saadaan muoto

$$z(f) = [(\sum_{\rm i=1}^{\rm n} \cos\Theta_{\rm i})^2 + (\sum_{\rm i=1}^{\rm n} \sin\Theta_{\rm i})^2]/n \qquad (1)$$

Tässä työssä etsitään tiedoston `Rayleighdata.dat` datalle $t_{\rm i}$ parasta periodia väliltä $P_{\rm min} = 1.5$ ja $P_{\rm max} = 90$. Testattava frekvenssiväli on $f_{\rm min} = 1/P_{\rm max} = 1/90 \approx 0.011$ ja $f_{\rm max} = 1/P_{\rm min} = 1/1.5 \approx 0.667$. Riippumattomien frekvenssien etäisyys on $f_0 = 1/\Delta T$, missä $\Delta T = t_n - t_1$ eli koko datan ajallinen pituus. Testattavien frekvenssien välinen etäisyys on $f_{\rm step} = f_0/{\rm OFAC}$, missä sopiva arvo on OFAC $= 10$ (engl. Overfilling Factor). Testattavia frekvenssejä on

$$M = {\rm INT}[(f_{\rm max} - f_{\rm min})/f_{\rm step}]$$

kappaletta, missä INT poistaa argumentin desimaaliosan (Esim: INT$[1.23] = 1$). Testattavat frekvenssit ovat siis

$$f_{\rm j} = f_{\rm min} + j f_{\rm step},$$

missä $j = 0, 1, 2, 3, ..., M$. Periodogrammi on

$$z(f_{\rm j}) = [(\sum_{\rm i=1}^{\rm n} \cos\Theta_{\rm i})^2 + (\sum_{\rm i=1}^{\rm n} \sin\Theta_{\rm i})^2]/n,$$

missä $\Theta_{\rm i} = 2\pi\phi_i$ ja $\phi_i = {\rm FRAC}[(t_{\rm i} - t_0)f_{\rm j}]$. Periodogrammi lasketaan muodossa

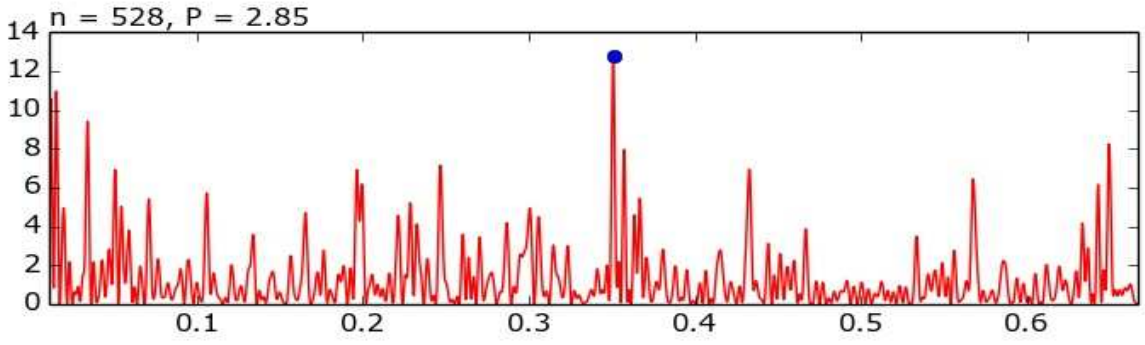
$$z(f_{\rm j}) = \{[\sum_{\rm i=1}^{\rm n} \cos 2\pi f_{\rm j}(t_i - t_0)]^2 + [\sum_{\rm i=1}^{\rm n} \sin 2\pi f_{\rm j}(t_i - t_0)]^2\}/n,$$

missä $t_0 = 0$. Rayleigh testin tulos ei riipu valitusta t_0 arvosta, koska t_0 arvon muuttuminen kiertää jokaista $\mathbf{r}_{\rm i}$ yksikkövektoria saman verran, joten niiden summavektorin pituus $|\mathbf{R}|$ ei muutu.

Seuraavan sivun kuvassa on parhaimman periodin, s.o. korkeimman $z(f_{\rm i} = f_{\rm best})$ piikin, sijainti arvon $f_{\rm best} =$ `fbest` yläpuolella on merkitty sinisellä ympyrällä. Kuvassa on myös annettu aikapisteiden määrä $n = 528$ ja parhaan periodin arvo $P = 2.85 =$ `1/fbest`. Kuvan tiedosto `RayleighKuva.jpg` on "tuotu sisään" tähän LaTeX dokumenttiin komennoilla

```
\clearpage
\begin{figure}[!t]
\includegraphics[width=18.0cm,height=12.0cm]{RayleighKuva.jpg}
\end{figure}
```

Tulevassa laskuharjoituksessa tehtävänä on laatia **python** ohjelma, joka tekee tälläisen kuvan.


n = 528, P = 2.85
14
12
10
8
6
4
2
0
0.1
0.2
0.3
0.4
0.5
0.6