Epälineaariset mallit

- **Mallin**

$$g(t,\bar{\beta}) = M + A\cos(2\pi f t) + B\sin(2\pi f t)$$

  vapaat parametri ovat $\bar{\beta}=[M,A,B,f]$

  – Osittaisderivaatat $\partial g/\partial A=\cos(2\pi f t)$, $\partial g/\partial B=\sin(2\pi f t)$ ja $\partial g/\partial f=$... sisältävät vapaita parametreja A,B ja f $\Rightarrow$ Malli on **epälineaarinen** $\Rightarrow$ PNS lopputulos vapaille parametreille **beta1** $=\bar{\beta}_1$ **riippuu vahvasti** alkuarvon oletuksesta **beta0** $=\bar{\beta}_0$

- **Ratkaistaan** paras frekvenssin arvo $f=f_{\mathrm{best}}$ **tehospektrillä** $\Rightarrow 2\pi f = 2\pi f_{\mathrm{best}} =$ vakio $\Rightarrow$ **Mallin**

$$g(t,\bar{\beta}) = M + A\cos(2\pi f_{\mathrm{best}} t) + B\sin(2\pi f_{\mathrm{best}} t),$$

  jäljelle jäävät vapaat parametrit ovat $\bar{\beta}=[M,A,B]$ $\Rightarrow$ Yksikään osittaisderivaatta $\partial g/\partial M=1$, $\partial g/\partial A=\cos(2\pi f_{\mathrm{best}} t)$ tai $\partial g/\partial B=\sin(2\pi f_{\mathrm{best}} t)$ ei sisällä vapaita parametreja $\Rightarrow$ Malli on **Lineaarinen** $\Rightarrow$ PNS lopputulos vapaille parametreille **beta1** $=\bar{\beta}_1$ **ei riipu** alkuarvon oletuksesta **beta0** $=\bar{\beta}_0$

L10: Tehospektri

- **Tehospektri** (engl. Power spectrum: Scargle 1982, *The Astrophysical Journal* **263**, p 853: Eq. 10)
- **Aikasarja**: $n =$ Havaintoa

  $t_{\mathrm{i}} = t_1, t_2, \ldots, t_n =$ **Havaintoajat**

  $y_{\mathrm{i}} = y(t_{\mathrm{i}}) = y_1, y_2, \ldots, y_n =$ **Havainnot**

  $m_y = [\sum y_{\mathrm{i}}]/n =$ **Havaintojen keskiarvo**

  $y'_{\mathrm{i}} = y_{\mathrm{i}} - m_y =$ **Havainnot miinus keskiarvo**
- **Ongelma: Jos sinikäyrä** on sopiva malli tälle aikasarjalle $y_{\mathrm{i}} = y(t_i)$, **niin mikä** on tämän sinikäyrän **frekvenssi** f? **Lasketaan testattavilla frekvenseillä** $\mathbf{f}$ **tehospektri**

$$z(\mathbf{f}) = \frac{\{\sum_{\mathrm{i}=1}^{\mathrm{n}} y'_{\mathrm{i}} \cos\left[2\pi \mathbf{f} (t_{\mathrm{i}} - \tau)\right]\}^2}{2\sum_{\mathrm{i}=1}^{\mathrm{n}} \{\cos\left[2\pi \mathbf{f} (t_{\mathrm{i}} - \tau)\right]\}^2} + \frac{\{\sum_{\mathrm{i}=1}^{\mathrm{n}} y'_{\mathrm{i}} \sin\left[2\pi \mathbf{f} (t_{\mathrm{i}} - \tau)\right]\}^2}{2\sum_{\mathrm{i}=1}^{\mathrm{n}} \{\sin\left[2\pi \mathbf{f} (t_{\mathrm{i}} - \tau)\right]\}^2},$$

  missä τ toteuttaa

$$\tan(4\pi \mathbf{f} \tau) = \left[\sum_{\mathrm{i}=1}^{\mathrm{n}} \sin(4\pi \mathbf{f} t_{\mathrm{i}})\right] \left[\sum_{\mathrm{i}=1}^{\mathrm{n}} \cos(4\pi \mathbf{f} t_{\mathrm{i}})\right]^{-1}$$

- **Ratkaisu**: Se testattu frekvenssi $\mathbf{f} = f_{\mathrm{best}}$, joka antaa suurimman tehospektrin arvon $z_{\mathrm{max}} = z(\mathbf{f} = f_{\mathrm{best}})$ on paras frekvenssi f_{best}. Tämän frekvenssin sinikäyrä on paras malli datalle.
- **Huomaa:** Punaisella merkitty τ muuttuu jokaisella sinisellä merkityllä testatulla frekvessillä $\mathbf{f}$
- Luonnollinen ensimmäinen reaktio: **“Onpas karmea risuaita”**

Testattavat frekvenssit

- **Laskuharjoituksessa** testattava periodiväli on $P_{\min} = 1$ ja $P_{\max} = 10$

  $\Rightarrow$ **Testattava frekvenssiväli** on $f_{\min} = 1/P_{\max} = 0.1$ ja $f_{\max} = 1/P_{\min} = 1$.

- Kahden **riippumattoman testattavan frekvenssin etäisyys** on

  $f_0 = 1/\Delta T,$

  missä $\Delta T = t_n - t_1$ eli havaintovälin koko pituus

  Jokaisella testattavalla $\mathbf{f}$ toteutuu $\Delta T(f \pm f_0) = f\Delta T \pm \Delta T/\Delta T = f\Delta T \pm 1$

  $\Rightarrow$ Kun $\mathbf{f}$ muuttuu f_0 verran, tehdään kierros enemmän tai vähemmän koko ΔT aikana

  $\Rightarrow$ Koko data "sotkettu" $\Rightarrow z(\mathbf{f})$ ja $z(\mathbf{f} \pm f_0)$ ovat toisistaan riippumattomat

- **Testattavien frekvenssien** välisen etäisyyden pitää olla tiheämpi $\Rightarrow$ Saadaan tarkka f_{best}

- Valitaan **testattavien frekvessien "askel"** (engl. step)

  $f_{\mathrm{step}} = f_0/\mathrm{OFAC},$

  missä $\mathrm{OFAC} = 10$ (engl. Overfilling Factor)

- Testattavia frekvenssien määrä testattavalla frekvenssivälillä $M = \mathrm{INT}[(f_{\max} - f_{\min})/f_{\mathrm{step}}]$, missä INT poistaa argumentin desimaaliosan (Esim: $\mathrm{INT}[123.45] = 123$).

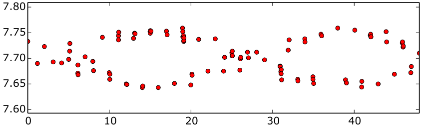
- **Tehospektri** $z(\mathbf{f}_{\mathrm{j}})$ lasketaan kaikille **testattavien frekvenssien** arvoille

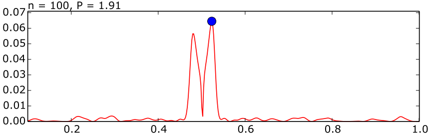
  $\mathbf{f}_{\mathrm{j}} = f_{\min} + j\, f_{\mathrm{step}},$

  missä $j = 0, 1, 2, 3, \ldots, M$

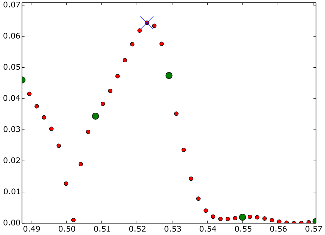
Testattavat frekvenssit

- Alla vasemmalla: Toivottu **laskuharjoituksen** ratkaisu
- Alla oikealla: Suurennos **laskuharjoituksen** tehospektristä korkeimman huipun kohdalla





- $\mathbf{f_j}$ $=$ monikerta f_0 = isommat vihreät pallot
- $\mathbf{f_j}$ $=$ monikerta $f_{\rm step}$ = pienemmät punaiset pallot
- Huippu `(fbest,zbest)` = sininen ruksi
- Riittävän lyhyt testattavien frekvenssien $\mathbf{f_j}$ "askel" $f_{\rm step}$ antaa tarkan parhaan periodin arvon `pbest=1/fbest` (s.o. korkeimman periodogrammin `z` piikin paikan)
- Matka f yksiköissä huipulta perustasoon noin kahden vihreän pallon väli $\approx f_0$



L10: Tehospektri

- **Laskuharjoitus**: **Tehospektrin ohjelmointi**
- **Ennen looppia**: `t`$= t_i$ ja `y`$= y_i$ luettu tiedostosta `Sgargletwocolumn.dat`.
- Luo `ydot`$= y_i' = y_i - m_y$ ja `f`$= \mathbf{f}_j$
- Luo "tyhjä periodiogrammi" `z=0*f`
- **For loopissa**: `f`$= \mathbf{f}_j$ frekvenssi **muuttuu**

  $\mathbf{f}_j$ **muuttuu** $\Rightarrow t_i$ ja y_i' **ei muutu**

  $\mathbf{f}_j$ **muuttuu** $\Rightarrow \tau$ **muuttuu** $\Rightarrow z(\mathbf{f}_j)$ **muuttuu**
- 1. Valitse loopin testattava $\mathbf{f}_j =$ `f(j)`
- 2. Laske `tau` (loopissa `x=4*pi*f*t`)

$$\tau = \frac{1}{4\pi\, \mathbf{f}_j} \mathrm{atan} \left[\frac{\sum_{i=1}^{n} \sin\left(4\pi\, \mathbf{f}_j t_i\right)}{\sum_{i=1}^{n} \cos\left(4\pi\, \mathbf{f}_j t_i\right)} \right]$$

- 3. Laske osoittajat (`x=2*pi*f*(t-tau)`)

$$z_1(\mathbf{f}_j) = \{\sum_{i=1}^{n} y_i' \cos\left[2\pi\, \mathbf{f}_j (t_i - \tau)\right]\}^2$$

$$z_2(\mathbf{f}_j) = \{\sum_{i=1}^{n} y_i' \sin\left[2\pi\, \mathbf{f}_j (t_i - \tau)\right]\}^2$$

- 4. Laske nimittäjät (`x=2*pi*f*(t-tau)`)

$$z_3(\mathbf{f}_j) = 2\sum_{i=1}^{n} \{\cos\left[2\pi\, \mathbf{f}_j (t_i - \tau)\right]\}^2$$

$$z_4(\mathbf{f}_j) = 2\sum_{i=1}^{n} \{\sin\left[2\pi\, \mathbf{f}_j (t_i - \tau)\right]\}^2$$

- 5. Laske `z(j)=`

$$z(\mathbf{f}_j) = \frac{z_1(\mathbf{f}_j)}{z_3(\mathbf{f}_j)} + \frac{z_2(\mathbf{f}_j)}{z_4(\mathbf{f}_j)}$$

- 6. Palaa kohtaan 1. ja valitse loopin seuraava testattava frekvenssi $\mathbf{f}_j$
- **For looppi** loppuu kohtaan 6.
- **Muita tapoja:** koko kaava kerralla, s.o. 3., 4. ja 5. samalla rivillä
- **Muita tapoja:** `for` korvattu `while`

Ohjelmointi

- **7.** Plottaa $z(\mathbf{f_j})$
- **8.** Tunnista korkein piikki $z_{\mathrm{max}} = z(\mathbf{f_j} = f_{\mathrm{best}})$
- **9.** Anna pyydetty informaatio $n = 100$ ja $P = 1.91$
- **Harjoitustyössä** pyydetetään plottaamaan havainnot kuvan yläosaan
- **Kuvassa** “havaittu yöllä” eli $P \approx 1$ “ikkuna” $\Rightarrow$ Ylemmän kuvan “silmälasit”, koska $P \approx 2$ vaihtelu näyttää maksimin ja minimin joka toinen yö
- **Tehospektrin** antama paras periodi $P = 1/f_{\mathrm{best}}$ on oikea **vain, jos sinikäyrä** on oikea malli havainnoille

Vihje: Aiemmassa **laskuharjoituksessa** laskettiin τ, $z_1(\mathbf{f_j})$ ja $z_2(\mathbf{f_j})$ arvot **yhden** testattavan frekvenssin `f` tapaukselle