

Havaitsevan tähtitieteen peruskurssi I, syksy 2024

Mallit 2

1.

- *Seeing ja skintillaatio*

Ilmakehän häiriöt aiheuttavat kuvan epäterävytymistä valon kulkiessa ilmakehän läpi. Häiriöitä kuvataan seeingillä. Huonon seeingin aikaan kohteiden kuvat ovat epäteräviä ja tähdet näkyvät läiskinä tarkkojen pisteiden sijaan. Skintillaatio eli tähtien tuikkiminen johtuu ilmakehän häiriöiden nopeista muutoksista, jolloin silmään tulevan valon määrä vaihtelee.

- *Eläinratavallo*

Eläinratavallo on aurinkokunnan pölyhiukkasista siroavaa auringon säteilyä. Valo näkyy ekliptiikan tasossa illalla auringonlaskun jälkeen ja aamulla ennen auringonnousua.

- *Ilmahehku*

Ilmahehku aiheutuu yläilmakehän atomien ja molekyylien rekombinaatiosäteilystä. Päivällä Auringon UV-säteily hajottaa ja ionisoi atomeja ja hajottaa molekyylejä, jotka yöllä pääsevät taas palaamaan perustilaansa. Ilmahehkun takia yötaivas ei ole koskaan täysin pimeä.

- *Differentiaalirefraktio*

Ilman taitekerroin ei ole vakio vaan riippuu valon aallonpituudesta. Tästä syystä matalalla olevien kohteiden kuvat muuttuvat lyhyiksi pystysuoriksi spektreiksi eri värien taipuessa eri suuruisen määrän.

- *Väriaberraatio*

Väripoikkeama eli kromaattinen aberraatio syntyy yksinkertaisessa linssissä, koska se taittaa eri-aallonpituuden (eriväriset) valonsäteet eri polttopisteisiin. Esineen kuvan reuna ei ole terävä, vaan väreihin hajonnut. Väriaberraatiosta päästään eroon joko käyttämällä linssin sijasta peiliä (koska valon ei tarvitse kulkea erilaisten väliaineiden läpi, se ei taitu, eikä siten myöskään hajoa väreiksi). Väriaberraatiota vähennetään käyttämällä kahden, eri lasilaadusta valmistetun linssin yhdistelmää.

- *Stokesin parametrit*

Stokesin parametrit kuvaavat sähkömagneettisen säteilyn polarisaatiotilaa. Eli esim. valon polarisaatioaste ja -tila voidaan kokonaisuudessaan selittää Stokesin parametreista koostuvalla Stokesin vektorilla $S = (I, Q, U, V)^T$. Parametrejä on 4; I, Q, U ja V, missä I kuvaa säteilyn intensiteettiä, Q ja U lineaaripolarisaatiota eri kulmilla ja V ympyräpolarisaatioastetta.

2.

a) Tyypillisenä ilmamassan ylärajana tähtitieteellisille havainnoille pidetään arvoa $X = 2$. Kuinka korkealla kohde on tällöin horisontista?

b) Merkurius näkyy taivaalla korkeudella $a = 13^\circ$ horisontista. Mikä on tuolloin Merkuriuksen edessä oleva ilmamassa? Miksi Merkuriusta on vaikeaa havaita pienellä ilmamassalla

a) Oletetaan ilmamassa tasaiseksi levyksi, eli unohdetaan sen kaarevuus. Ilmamassalle saadaan lauseke zenitiittäisyyden funktiona,

$$X = \frac{H}{\cos z},$$

missä H on ilmakehän paksuus. Tämä ei kuitenkaan ole ihan oikein, sillä ilmamassan määritelmään kuuluu, että ilmakehän paksuus on normitettu $H = 1$, eli ratkaisun saamme lausekkeesta:

$$X = \frac{1}{\cos z} \rightarrow \cos z = \frac{1}{X} \rightarrow z \approx 60^\circ,$$

kun muistetaan, että zenitiittäisyys on määritelty välillä $[0^\circ, 90^\circ]$.

b) Merkurius näkyy $a = 13^\circ$ horisontista, eli sen zeniittietäisyys on $z = 90^\circ - 13^\circ = 77^\circ$. Koska zeniittietäisyys on yli $X > 2$, joudumme käyttämään oppikirjan tarkempaa kaavaa, missä kaarevuus otetaan huomioon:

$$X \approx \sec z - 0.0018167(\sec z - 1) - 0.002875(\sec z - 1)^2 \approx 4.4.$$

Merkuriusta on taas hankala havaita pienellä ilmamassalla, johtuen siitä, että Merkurius on niin lähellä Aurinkoa (n. 0.39 AU). Merkuriusta voi havaita vasta kun Aurinko on laskenut, joka välttämättä johtaa siihen, että Merkuriuskin on hyvin alhaalla taivaalla. Merkuriuksen kulmaetäisyys Auringosta onkin aina $< 30^\circ$.

3. Kaukoputken objektiivin halkaisija on 90 mm ja polttoväli 1200 mm. Minkälaisia okulaareja siihen kannattaa hankkia?

$$D = 90 \text{ mm}, f = 1200 \text{ mm}.$$

Kysytään minkälaisia okulaareja, eli mikä on pienin ja suurin okulaari mitä kannattaa hankkia.

Kun kaukoputken perään asetetaan okulaari visuaalihavaintoja varten, okulaarin muodostama objektiivin kuvaa kutsutaan lähtöpupilliksi, jonka läpimitta saadaan objektiivin halkaisijan ja suurennuksen suhteesta $L = D/\omega$. Lähtökuvan koon tulisi aina olla suurempi, tai vähintään yhtä iso, kuin silmän pupilli, muuten okulaariin katsominen näyttää siltä kuin katsoisit ovisilmästä läpi. Kaukoputken pienin käyttökelpoinen suurennus määritellään suurennuksena, jolla kaikki kaukoputken keräämä valo mahtuu silmän pupilliin. Käytetään pupillin halkaisijana $d = 6 \text{ mm}$, jolloin saadaan pienimmäksi suurennukseksi

$$\omega_{\min} = \frac{D}{d} = \frac{90}{6} = 15.$$

15-kertainen suurennos taas vastaa okulaaria, jonka polttoväli on

$$f' = f/15 = 80 \text{ mm}.$$

Kaukoputken suurin suurennus, on taas suurennus, jolla kaukoputken teoreettinen erotuskyky vastaa silmän erotuskykyä. Pienemmällä suurennoksella kahta läheistä kohdetta ei välttämättä erota toisistaan, vaikka kaukoputken erotuskyky sen sallisi. Suurennosta on siis hyvä kasvattaa, jotta kohteet erottuvat okulaarista. Kuitenkin, jos silmän erotuskyky on suurempi kuin kaukoputken, ei se tuo lisää informaatiota kuvaan, vaan kuva alkaa näyttää sumealta.

Silmän teoreettinen erotuskyky on $e \approx 2' \approx 5.8 \times 10^{-4} \text{ rad}$. Kaukoputken erotuskyvylle voidaan käyttää yksinkertaistettua muotoa,

$$\Theta \sim \frac{\lambda}{D}.$$

Käytetään keltaista valoa ($\lambda = 580 \text{ nm}$), jolloin suurimmalle suurennukselle saadaan

$$\omega_{\max} = \frac{e}{\Theta} = \frac{eD}{\lambda} \approx \frac{D}{1 \text{ mm}} \approx 90, \quad (1)$$

joka vastaa okulaaria

$$f' = f/90 \approx 13 \text{ mm}. \quad (2)$$

Okulaareja kannattaa siis valita väliltä 13 mm – 80 mm.

4. Valonsäde osuu kohtisuorassa kahden väliaineen rajapinnalle (taitekertoimet n_1 ja n_2). Laske Fresnelin kaavoilla heijastuvan ja läpi pääsevän valon intensiteetit suhteessa alkuperäiseen intensiteettiin. Kuinka suuri prosenttiosuus valosta heijastuu ja pääsee läpi ilman ja kruunulasin rajapinnalla ($n_1 = 1.00$ ja $n_2 = 1.52$)?

HUOM! Kirjassa virhe taittuvan säteen intensiteetille.

$$\text{Pitäisi olla } I'' = \frac{n_2 \cos \theta_2}{n_1 \cos \theta_1} (E_{\parallel}''^2 + E_{\perp}''^2).$$

Valon saapuessa kohtisuorassa väliaineiden rajapinnalle ($\theta_1 = 0^\circ$) se ei Snellin lain mukaan taitu kulkiessaan rajapinnan läpi ($\theta_2 = 0^\circ$). Koska $\cos \theta_1 = \cos \theta_2 = 1$, sievenevät Fresnelin heijastus- ja läpäisykertoimet muotoihin

$$\begin{aligned} R_{\parallel} &= \frac{n_2 - n_1}{n_1 + n_2} \\ R_{\perp} &= \frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2} \\ T_{\parallel} &= \frac{2n_1}{n_1 + n_2} \\ T_{\perp} &= \frac{2n_1}{n_1 + n_2} \end{aligned}$$

Heijastuneen ja taittuneen säteilyn komponentit ovat nyt

$$\begin{aligned} E'_{\parallel} &= E_{\parallel} R_{\parallel} = E_{\parallel} \frac{n_2 - n_1}{n_1 + n_2} \\ E'_{\perp} &= E_{\perp} R_{\perp} = E_{\perp} \frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2} \\ E''_{\parallel} &= E_{\parallel} T_{\parallel} = E_{\parallel} \frac{2n_1}{n_1 + n_2} \\ E''_{\perp} &= E_{\perp} T_{\perp} = E_{\perp} \frac{2n_1}{n_1 + n_2} \end{aligned}$$

Kun alkuperäisen rajapinnalle saapuvan valon intensiteetti on $I = E_{\parallel}^2 + E_{\perp}^2$, saadaan heijastuvan valon intensiteetiksi

$$\begin{aligned} I' &= (E'_{\parallel})^2 + (E'_{\perp})^2 = E_{\parallel}^2 R_{\parallel}^2 + E_{\perp}^2 R_{\perp}^2 = E_{\parallel}^2 \left(\frac{n_2 - n_1}{n_1 + n_2} \right)^2 + E_{\perp}^2 \left(\frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2} \right)^2 \\ &= E_{\parallel}^2 \left(\frac{-(n_1 - n_2)}{n_1 + n_2} \right)^2 + E_{\perp}^2 \left(\frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2} \right)^2 = \left(\frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2} \right)^2 (E_{\parallel}^2 + E_{\perp}^2) = \left(\frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2} \right)^2 I \end{aligned}$$

Läpäisevän valon intensiteettiin on lisättävä tekijä $\frac{n_2 \cos \theta_2}{n_1 \cos \theta_1}$ joka korjaa valon paikallisen nopeuden muutosta väliaineen vaihtuessa, joka puolestaan vaikuttaa intensiteettiin. (HUOM! Tätä ei ole tehty kirjassa, jossa on siis virhe!) Tällöin läpäisevän valon intensiteetiksi saadaan

$$\begin{aligned} I'' &= \frac{n_2 \cos \theta_2}{n_1 \cos \theta_1} \left((E''_{\parallel})^2 + (E''_{\perp})^2 \right) = \frac{n_2}{n_1} \left(E_{\parallel}^2 T_{\parallel}^2 + E_{\perp}^2 T_{\perp}^2 \right) = \frac{n_2}{n_1} \left(E_{\parallel}^2 T_{\parallel}^2 + E_{\perp}^2 T_{\perp}^2 \right) \\ &= \frac{n_2}{n_1} \left(E_{\parallel}^2 \left(\frac{2n_1}{n_1 + n_2} \right)^2 + E_{\perp}^2 \left(\frac{2n_1}{n_1 + n_2} \right)^2 \right) = \frac{n_2}{n_1} \frac{4n_1^2}{(n_1 + n_2)^2} (E_{\parallel}^2 + E_{\perp}^2) = \frac{4n_1 n_2}{(n_1 + n_2)^2} I \end{aligned}$$

Ilman ja kruunulasin rajapinnalla ($n_1 = 1.00$, $n_2 = 1.52$) saadaan $I'/I = 0.043 = 4.3 \%$ ja $I''/I = 0.957 = 95.7 \%$.

Huomaa, että kohtisuoraa valonsädettä tarkasteltaessa valon polarisaatiolla ei ole väliä laskujen kannalta ja heijastuminen ja läpäisy säilyttävät valon alkuperäisen polarisaation.

5. Johda heijastuslaki lähtien Fermat'n periaatteesta. Etsi siis valon nopein reitti (tulo- ja heijastuskulmat θ_1 ja ϕ) kahden kiinteän pisteen välillä, kun reitillä on yksi heijastus.

Tutkitaan valon kulkua pisteestä A pisteeseen B niin, että se matkallaan heijastuu tasosta pisteessä O. Valitaan pisteet niin, että A on etäisyydellä h_A heijastavasta tasosta ja B etäisyydellä h_B . Pisteeseen O heijastavalle tasolle projisoitu etäisyys pisteestä A on d_A ja pisteestä B d_B . Valo kulkee kohtisuorassa

tasossa heijastavaan tasoon nähden. Tämän voi nähdä soveltamalla Fermat'n periaatetta myös heijastavan tason suunnassa eli vaatimalla, että myös valon reitin tason suuntainen komponentti on nopein mahdollinen. Koska A, O ja B ovat kaikki samassa kohtisuorassa tasossa heijastavaan tasoon nähden, ovat janojen AO ja OB heijastavalle tasolle projisoidut komponentit yhdensuuntaisia ja voidaan merkitä $l = d_A + d_B \Rightarrow d_A = d$ ja $d_B = l - d_A = l - d$.

Kun valon nopeus väliaineessa on $v = c/n$ ja janojen AO ja OB pituudet ovat $AO = \sqrt{h_A^2 + d^2}$ ja $OB = \sqrt{h_B^2 + (l - d)^2}$, saadaan valon kulkuun kuluvaksi ajaksi

$$t = \frac{1}{v}(AO + OB) = \frac{n}{c} \left(\sqrt{h_A^2 + d^2} + \sqrt{h_B^2 + (l - d)^2} \right).$$

Valon kulkema aika t on lyhimmillään, kun sen derivaatta muuttujan d suhteen häviää (sen että tämä on ajan minimi eikä maksimi voi tarkistaa vertaamalla ajan arvoja derivaatan nollakohdassa ja tämän ympäristössä),

$$\begin{aligned} \frac{dt}{dd} = \frac{n}{c} \left(\frac{2d}{2\sqrt{h_A^2 + d^2}} - \frac{2(l - d)}{2\sqrt{h_B^2 + (l - d)^2}} \right) &= 0 \\ \frac{d}{AO} - \frac{l - d}{OB} = 0 \Rightarrow \frac{d}{AO} &= \frac{l - d}{OB}. \end{aligned}$$

Valon tulo- ja heijastuskulmien (janojen AO ja OB väliset kulmat heijastavan tason normaalin kanssa) θ_1 ja ϕ avulla lausuttuna $\sin \theta_1 = d/AO$ ja $\sin \phi = (l - d)/OB$, joten $\sin \theta_1 = \sin \phi$. Koska θ_1 ja ϕ ovat välillä $[0, \pi/2]$ saadaan heijastuslaki:

$$\theta_1 = \phi.$$