

Matematiikan ja tilastotieteen laitos
 Moderni reaalianalyysi
 Harjoitus 9
 15.11.2005

1. Olkoon $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow [0, \infty[$ sellainen C^∞ -funktio, että $\text{supp}(\varphi) \subset [0, 1]$ ja $\int_{\mathbb{R}} \varphi(x) dx = 1$. Merkitään $\varphi_\varepsilon(x) = \varepsilon^{-1}\varphi(x/\varepsilon)$, kun $\varepsilon > 0$. Olkoon μ äärellinen Radon-mitta \mathbb{R} :ssä. Määritellään *konvoluutiot* $\varphi_\varepsilon * \mu$,

$$(\varphi_\varepsilon * \mu)(y) = \int_{\mathbb{R}} \varphi_\varepsilon(x - y) d\mu(x), \quad y \in \mathbb{R},$$

ja Radon-mitat μ_ε ,

$$\mu_\varepsilon(A) = \int_A (\varphi_\varepsilon * \mu)(y) dy, \quad A \in \text{Leb}(\mathbb{R}).$$

Osoita, että mitat μ_ε suppenevat heikosti kohti mitta μ , kun $\varepsilon \rightarrow 0$.
 [Vihje: Fubini.]

2. Olkoon X metrinen avaruus. Osoita, että

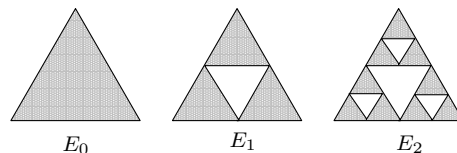
$$d_H(A, B) \leq d_H(A, C) + d_H(C, B)$$

kaikilla $A, B, C \subset X$.

3. Olkoon X metrinen avaruus. Osoita, että $d_H(A, B) > 0$, jos $A, B \subset X$ ovat suljettuja ja $A \neq B$.

4. Alla olevassa kuvassa on ensimmäiset vaiheet ns. Sierpinskiin kolmion muodostamisesta: Tasasivuisesta kolmiosta poistetaan keskineljännes ja tätä samaa operaatiota toistetaan kaikkiin uusiin muodostuviin tasasivuisiin kolmioihin.

Etsi Sierpinskiin kolmio itsesimilaarina fraktaalina, ts. etsi sopivat eksplisiittiset kontraktiot, jotka määräävät Sierpinskiin kolmion.



5. Jos $\psi_1(x) = \frac{1}{2}x$ ja $\psi_2(x) = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$, $x \in \mathbb{R}$, niin $F = [0, 1]$ on perhettä $\{\psi_1, \psi_2\}$ vastaava invariantti joukko (miksi?). Näytä, että jokaisella $q \in (0, 1)$ on olemassa sellainen todennäköisyysmitta $\mu = \mu_q$, että $\text{supp}(\mu) = [0, 1]$ ja

$$\mu(A) = q\mu(\psi_1^{-1}(A)) + (1 - q)\mu(\psi_2^{-1}(A))$$

kaikilla Borel-joukoilla $A \subset [0, 1]$.

[Vihje: Lauseen 4.27 todistus.]