Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Moderni reaalianalyysi
Harjoitus 8
8.11.2005

1. Osoita, että $\mathbb{R}$:n Radon-mittojen jono $\mu_k = \delta_{1+1/k}$, $k \in \mathbb{N}$, suppenee heikosti ja määritä rajamitta μ. Anna esimerkki Borel-joukosta $A \subset \mathbb{R}$, jolle $\lim_{k\to\infty} \mu_k(A) \neq \mu(A)$.

2. Tutki Radon-mittojen jonon (μ_k) heikkoa suppenemista, kun:
   (a) $\mu_k = \delta_k$ reaaliakselilla $\mathbb{R}$,
   (b) $\mu_k = k\,\mathcal{H}^2 \llcorner \big(B(0, 1 + 1/k) \setminus B(0, 1)\big)$ tasossa $\mathbb{R}^2$,
   (c) $\mu_k(A) = \int_A \cos^2(kx)\, dm_1(x)$ reaaliakselilla $\mathbb{R}$.

3. Olkoon (μ_k) jono $\mathbb{R}^n$:n Radon-mittoja, joka suppenee heikosti kohti Radon-mittaa μ. Osoita, että
$$\lim_{k\to\infty} \mu_k(A) = \mu(A)$$
pätee rajoitetulle Borel-joukolle $A \subset \mathbb{R}^n$, jos $\mu(\partial A) = 0$.

4. (a) Hahmottele todistus "Weierstrassin approksimaatiolauseelle":
   Olkoon $Q = [0, 1]^n$. Jos $f \in C(Q)$ ja $\varepsilon > 0$, niin on olemassa muuttujien $x_1, x_2, \ldots, x_n$ polynomi $p(x) = p(x_1, \ldots, x_n)$ siten, että $\|f - p\| = \sup_Q |f - p| < \varepsilon$.
   [Ehdotus: Jatka ensin f funktioksi $\tilde{f} \in C_0(\mathbb{R}^n)$ siten, että $\tilde{f}|Q = f$ ja $\operatorname{supp}(\tilde{f}) \subset [-1, 2]^n$. Haluttu approksimaatio saadaan konvoluutiosta $\tilde{f} * g_\varepsilon$, missä $g_\varepsilon(x) = b_\varepsilon(1 - a_n|x|^2)^{m_\varepsilon}$ sopivilla vakioilla b_ε, a_n ja m_ε.]
   (b) Hahmottele (a)-kohdan avulla todistus luentojen Lemmalle 3.19: $C_0(\mathbb{R}^n)$ sisältää numeroituvan, tiheän osajoukon sup-normin $\|\cdot\|$ suhteen.

5. Olkoot $A \subset \mathbb{R}^n$ ja $B \subset \mathbb{R}^k$ kompakteja joukkoja siten, että $\mathcal{H}^s(A) > 0$ ja $\mathcal{H}^t(B) > 0$. Osoita, että tällöin $\mathcal{H}^{s+t}(A \times B) > 0$.
   Näytä edellisen avulla, että
$$\dim_{\mathcal{H}}(A \times B) \geq \dim_{\mathcal{H}}(A) + \dim_{\mathcal{H}}(B).$$
   [Vihje: Frostmanin lemma.]