Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Moderni reaalianalyysi
Vihjeitä 7
18.10.2005

2. Vihje: Lebesguen tiheyspistelause.

3. Vihje: Steinhausin lause.

4. Tässä eräs ehdotus: Tee vastaoletus, että $\Gamma \subset \mathbb{R}^2$ on suoristuva kaari s.e.

$$\mathcal{H}^1(\Gamma \cap J) > 0.$$

   (i) Kun $n \in \mathbb{N}$, niin merkitse

   $$k_n = \#\{j \colon Q_j^n \cap \Gamma \neq \emptyset\}$$

   ja arvioi k_n:ää alhaalta. ($\#A = A$:n alkioiden lukumäärä.)

   (ii) Kun $n \in \mathbb{N}$ ja $j = 1, \ldots, n$, niin olkoon $\Gamma_{n,j}$ kaari, joka leikkaa vähintään 4^j:n neliön $Q_k^n \subset J_n$ kanssa. Arvioi $\Gamma_{n,j}$:n pituutta alhaalta.

   (iii) Johda (i):stä ja (ii):sta ristiriita Γ:n suoristuvuuden kanssa.

5. Vihje: Jokainen $f \in C(K)$ voidaan jatkaa $\mathbb{R}^n$:n jatkuvaksi kompaktikantajaiseksi funktioiksi $g \in C_0(\mathbb{R}^n)$. Tätä voi pitää tunnettuna tai laajennuksen voi tehdä suoraan kaavalla $g = g_0\varphi$, missä $\varphi \in C_0(\mathbb{R}^n)$, $\varphi|K = 1$ ja

$$g_0(x) = \begin{cases} \frac{1}{\operatorname{dist}(x,K)} \inf_{y\in K}\Big((f(y) + 2M)|y - x|\Big) - 2M, & x \notin K; \\ \\ f(x), & x \in K, \end{cases}$$

missä $M = \max\{|f(x)| \colon x \in K\}$.