Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Moderni reaalianalyysi
Harjoitus 7
1.11.2005

Huom. Viikolla 43 ei ole luentoja eikä laskuharjoituksia.
Vihjeitä joihinkin tehtäviin löytyy laskuharjoitusten kotisivulta.

1. Olkoon μ Radon-mitta $\mathbb{R}^n$:ssä. Osoita, että
$$x \mapsto \mu\big(\bar{B}(x,r)\big)$$
on Borel-funktio jokaisella $r > 0$.

2. Todista Steinhausin lause: Jos $A \subset \mathbb{R}$ on Lebesgue-mitallinen ja $m_1(A) > 0$, niin erotusjoukko
$$A - A = \{x - y \colon x, y \in A\}$$
sisältää jonkin avoimen välin $(-a, a)$, $a > 0$.

3. Olkoon $G \subset \mathbb{R}$ Lebesgue-mitallinen joukko, joka on samalla myös ryhmän $(\mathbb{R}, +)$ aliryhmä. Osoita, että joko $G = \mathbb{R}$ tai $m_1(G) = 0$.

4. Osoita, että luentomuistiinpanojen Esimerkin 2.37 joukko
$$J = C(1/4) \times C(1/4)$$
on täysin 1-epäsuoristuva.

5. Olkoon $K \subset \mathbb{R}^n$ kompakti ja $\Lambda\colon C(K) \to \mathbb{R}$ positiivinen ja lineaarinen funktionaali. Osoita, että on olemassa äärellinen Borel-mitta μ joukossa K siten, että
$$\Lambda(f) = \int_K f \, d\mu$$
kaikilla $f \in C(K)$.