Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Moderni reaalianalyysi
Harjoitus 6
18.10.2005

Vihjeitä joihinkin tehtäviin löytyy laskuharjoitusten kotisivulta.

1. Onko olemassa sellaista $\mathcal{H}^1$-mitallista joukkoa $A \subset \mathbb{R}$, että
$$\frac{1}{4}\mathcal{H}^1(I) \leq \mathcal{H}^1(A \cap I) \leq \frac{3}{4}\mathcal{H}^1(I)$$
kaikilla väleillä $I \subset \mathbb{R}$.

2. Olkoon $J = C(1/4) \times C(1/4)$ luentomuistiinpanojen Esimerkin 2.37 Cantor-tyyppinen joukko. Osoita, että $\mathcal{H}^1(J \cap L) = 0$ jokaisella suoralla $L \subset \mathbb{R}^2$.

   Olkoon $E \subset \mathbb{R}^2$, $x_0 \in E$ ja $L \subset \mathbb{R}^2$ pisteen x_0 kautta kulkeva suora. Olkoon lisäksi
$$S(x_0, L, \alpha) = \{x \in \mathbb{R}^2 \colon \operatorname{dist}(x, L) \leq \alpha|x - x_0|\},$$
missä $0 < \alpha < 1$. Sanomme, että L on E:n *approksimatiivinen* tangentti pisteessä x_0, jos
$$\lim_{r \to 0+} \frac{1}{r}\mathcal{H}^1\big(E \cap B(x_0, r) \setminus S(x_0, L, \alpha)\big) = 0$$
jokaisella $0 < \alpha < 1$.

3. Olkoon $S = \{x \in \mathbb{R}^2 \colon |x| = 1\}$ yksikköympyrä, $x_0 \in S$ ja $L \subset \mathbb{R}^2$ pisteeseen x_0 piirretty S:n tangentti. Piirrä kuva ja päättele siitä, että L on S:n approksimatiivinen tangentti x_0:ssa. Onko L joukon $S \cup J$ approksimatiivinen tangentti x_0:ssa, kun J on pisteiden $-x_0$ ja x_0 välinen jana?

4. Olkoon $\{q_1, q_2, \ldots\}$ numeroituva ja tiheä suljetun yksikkökiekon $\bar{D} = \{x \in \mathbb{R}^2 \colon |x| \leq 1\}$ osajoukko. Olkoon
$$E = \bigcup_{j=1}^{\infty} S_j,$$
missä $S_j = \{x \in \mathbb{R}^2 \colon |x - q_j| = 2^{-j}\}$. Osoita, että jokaisella $j \in \mathbb{N}$ ja $\mathcal{H}^1$-m.k. $x \in S_j$ pätee: Jos L on pisteeseen x piirretty S_j:n tangentti, niin L on E:n approksimatiivinen tangentti x:ssä. (Toisin sanoen, E:llä on approksimatiivinen tangentti $\mathcal{H}^1$-m.k. pisteissä $x \in E$.)

5. Olkoon $A \subset \mathbb{R}^n$ $\mathcal{H}^1$-mitallinen joukko s.e. $\mathcal{H}^1(A) < \infty$. Osoita, että $A = E \cup F$, missä E on 1-suoristuva ja F täysin 1-epäsuoristuva. Lisäksi E ja F ovat $\mathcal{H}^1$-nollamittaisia joukkoja vaille yksikäsitteiset.