Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Moderni reaalianalyysi
Harjoitus 5
11.10.2005

1. Olkoot X ja Y topologisia avaruuksia. Osoita, että
$$\sigma\big(\mathrm{Bor}(X) \times \mathrm{Bor}(Y)\big) \subset \mathrm{Bor}(X \times Y).$$
[*Huom.* Käänteinen inkluusio pätee, jos X ja Y ovat topologisia avaruuksia, joilla on numeroituva kanta.]

2. (a) Osoita suoraan määritelmästä lähtien, että $\mathcal{H}^1([0,1]) = 1$.
(b) Osoita, että $\mathbb{R}^n$:ssä pätee $\mathcal{H}^n = c_n m_n^*$.

3. Osoita, ettei $\mathbb{R}^2$ ole σ-äärellinen $\mathcal{H}^1$:n suhteen.

4. Olkoon $0 \leq s \leq 1$. Osoita, että tason avoimen kiekon $B(0,1)$ sekä sen reunan $S(0,1)$ ja sulkeuman $\bar{B}(0,1)$ $\mathcal{H}_2^s$-ulkomitat ovat kaikki 2^s. Päättele tästä, ettei $\mathcal{H}_2^s$ ole metrinen ulkomitta. [*Vihje*: Käytä apuna kohtisuoraa projektiota $\mathbb{R}$:ään.]

5. Olkoon $\Gamma = \psi[a,b] \subset \mathbb{R}^n$ suoristuva kaari, missä $\psi\colon [a,b] \to \mathbb{R}^n$ on jatkuva injektio. Osoita, että Γ voidaan parametrisoida kaarenpituuden suhteen, eli on olemassa homeomorfismi $\psi_0\colon [0,\mathcal{L}(\Gamma)] \to \Gamma$, jolle pätee $\mathcal{L}(\psi_0[s,t]) = t - s$ kun $0 \leq s \leq t \leq \mathcal{L}(\Gamma)$.