Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Moderni reaalianalyysi
Harjoitus 4
4.10.2005

1. Olkoon $f\colon (0,1)\times(1,\infty)\to\mathbb{R}$,
$$f(x,y)=e^{-xy}-2e^{-2xy}.$$
Näytä, että
$$\int_0^1\Big(\int_1^\infty f(x,y)\,dy\Big)\,dx\neq\int_1^\infty\Big(\int_0^1 f(x,y)\,dx\Big)\,dy$$
ja kommentoi Fubinia.

2. Olkoon $f\colon (0,1)\times(0,1)\to\mathbb{R}$,
$$f(x,y)=\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}.$$
Näytä, että
$$\int_0^1\Big(\int_0^1 f(x,y)\,dy\Big)\,dx\neq\int_0^1\Big(\int_0^1 f(x,y)\,dx\Big)\,dy$$
ja kommentoi taas Fubinia.

3. Olkoot $(X,\mathcal{M},\mu)$, $(Y,\mathcal{N},\nu)$ mitta-avaruuksia, missä $X=Y=(0,1)$, $\mathcal{M}=\mathrm{Bor}(X)$, $\mu=$ Lebesguen mitta, $\mathcal{N}=\mathcal{P}(Y)$ ja $\nu=$ lukumäärämitta. Olkoon $f\colon X\times Y\to\mathbb{R}$,
$$f(x,y)=\begin{cases}1, & \text{jos } x=y;\\ 0, & \text{muuten.}\end{cases}$$
Laske $\int_X\big(\int_Y f(x,y)\,d\nu(y)\big)\,d\mu(x)$ ja $\int_Y\big(\int_X f(x,y)\,d\mu(x)\big)\,d\nu(y)$ sekä kommentoi vielä kerran Fubinia.

4. Olkoon μ äärellinen Borel-mitta $\mathbb{R}$:llä ja $f(x)=\mu\big((-\infty,x]\big)$. Osoita Fubinia käyttäen, että
$$\int_{-\infty}^{\infty}\big(f(x+C)-f(x)\big)\,dx=C\mu(\mathbb{R})$$
kaikilla $C\in\mathbb{R}$.

5. Olkoon X separoituva metrinen avaruus ja $A_k\subset X,\ k\in\mathbb{N}$. Osoita, että
$$\dim_{\mathcal{H}}\Big(\bigcup_{k=1}^{\infty}A_k\Big)=\sup_k\dim_{\mathcal{H}}(A_k).$$