Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Moderni reaalianalyysi
Harjoitus 3
27.9.2005

1. Olkoon m^* Lebesguen ulkomitta $\mathbb{R}$:ssä, $A \subset \mathbb{R}$ ei-Lebesgue-mitallinen, $\tilde{\mu} = m^* \llcorner A$ ja
$$\mu = \tilde{\mu} | \{E \subset \mathbb{R} \colon E \ \tilde{\mu}\text{-mitallinen}\}.$$
Osoita, että μ on Radon-mitta, mutta ei Borel-säännöllinen.

2. Olkoon X lokaalisti kompakti Hausdorff-avaruus, jossa jokainen X:n avoin joukko on σ-kompakti (ts. numeroituva yhdiste kompakteista joukoista). Olkoon $\mu\colon \operatorname{Bor}(X) \to [0, +\infty]$ sellainen mitta, että $\mu(F) < \infty$ jokaisella kompaktilla joukolla $F \subset X$. Osoita, että μ on Radon-mitta.
   Ohje: Oleta ensin, että X on kompakti ja tutki perhettä
$$\begin{aligned}\mathcal{D} = \big\{A \in \operatorname{Bor}(X) \colon \mu(A) &= \inf\{\mu(U) \colon A \subset U,\ U \subset X \text{ avoin}\} \\ &= \sup\{\mu(F) \colon F \subset A,\ F \subset X \text{ kompakti}\}\big\}.\end{aligned}$$

3. Olkoon $(X, \mathcal{M}, \mu)$ σ-äärellinen mitta-avaruus. Osoita, että ei-negatiivisen μ-mitallisen funktion $f\colon X \to [0, +\infty)$ integraali mitan μ suhteen saadaan ottamalla tulomitta $\mu \times m$ joukosta
$$E = \{(x, t) \in X \times \mathbb{R} \colon 0 \le t \le f(x)\}.$$
Tässä m on Lebesguen mitta $\mathbb{R}$:ssä.
   Ohje: Todista tämä ensin yksinkertaisille funktioille ja sovella sitten tulomitan ja integraalin määritelmiä sekä sopivaa konvergenssilausetta. Huomaa, että tulet samalla todistaneeksi joukon E mitallisuuden, mikä on esimerkiksi Fubinin lausetta käytettäessä olennaista. Valitsemalla $X \subset \mathbb{R}$ väliksi ja $\mu = m$ päädytään Lebesguen integraalin tulkintaan pinta-alana.

4. Olkoon $\mathcal{M} = \operatorname{Bor}(\mathbb{R})$. Määritä mitta-avaruuksien $(\mathbb{R}, \mathcal{M}, \mu)$ täydentymät $(\mathbb{R}, \bar{\mathcal{M}}, \bar{\mu})$, kun μ on
   (a) δ_0 = delta-mitta origossa,
   (b) lukumäärämitta $\lambda(A) =$ A:n alkioiden lukumäärä,
   (c) $m | \operatorname{Bor}(\mathbb{R})$.
   Huomaat, että $\bar{\mathcal{M}}$ riippuu olennaisella tavalla mitasta μ.

5. Osoita, että ($(n+k)$-ulotteinen) Lebesguen mitta m_{n+k} on $m_n \times m_k$:n täydentymä.