Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Moderni reaalianalyysi
Harjoitus 2
20.9.2005

1. Olkoon $X = \{1, 2, 3, 4\}$. Anna esimerkki perheestä $\mathcal{F} \subset \mathcal{P}(X)$ sekä kahdesta todennäköisyysmitasta ν ja μ σ-algebrassa $\sigma(\mathcal{F}) = \mathcal{P}(X)$ siten, että $\nu \neq \mu$, vaikka $\nu(A) = \mu(A)$ kaikilla $A \in \mathcal{F}$.

2. Konstruoi $\mathbb{R}$:ssä määritelty σ-äärellinen Borel-mitta, joka ei ole Radon-mitta.

3. Olkoon $(X, \mathcal{M})$ mitallinen avaruus, ts. $\mathcal{M} \subset \mathcal{P}(X)$ on σ-algebra. Tarkastellaan "mitallisten suorakaiteiden" perhettä
$$\mathcal{F} = \{A \times B \colon A, B \in \mathcal{M}\} \subset \mathcal{P}(X \times X).$$
Näytä, että perhe
$$\mathcal{F}_0 = \{\emptyset\} \cup \{C = \bigcup_{i=1}^{n} C_i \colon n \in \mathbb{N},\ C_i \in \mathcal{F} \text{ ja } C_i \cap C_j = \emptyset,\ \text{kun } i \neq j\}$$
on algebra. Onko $\mathcal{F}_0$ pienin algebra, joka sisältää $\mathcal{F}$:n?

4. Olkoon X joukko, $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$ algebra, $\mu \colon \mathcal{A} \to [0, +\infty]$ σ-additiivinen $\mathcal{A}$:ssa ja $\mu(\emptyset) = 0$. Määritellään $\tilde{\nu} \colon \mathcal{P}(X) \to [0, +\infty]$ asettamalla
$$\tilde{\nu}(E) = \inf\{\sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i) \colon E \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i,\ A_i \in \mathcal{A}\ \forall i\}.$$
Todista, että $\tilde{\nu}$ on ulkomitta ja $\tilde{\nu}(A) = \mu(A)$ jokaisella $A \in \mathcal{A}$.

5. Olkoot $\mathcal{A}$, μ ja $\tilde{\nu}$ kuten edellisessä tehtävässä. Osoita, että jokainen $A \in \mathcal{A}$ on $\tilde{\nu}$-mitallinen.