Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Moderni reaalianalyysi
Harjoitus 12
13.12.2005

Nämä ovat viimeiset laskuharjoitukset. Kurssin voi suorittaa loppukokeella yleistenttien yhteydessä (esim. 20.12).

Tehtävissä 1, 2, 3 ja 5 $(X, \mathcal{M})$ on mitallinen avaruus ja $\mu\colon \mathcal{M} \to \dot{\mathbb{R}}$ on merkkimitta.

1. Todista: Jos $A, B \in \mathcal{M},\ A \subset B$ ja $|\mu(B)| < \infty$, niin $|\mu(A)| < \infty$.

2. Oletetaan, että (P, P^c) ja (D, D^c) ovat μ:n Hahnin hajotelmia.
   (a) Osoita: Jos $A \in \mathcal{M}$ ja $A \subset (D \setminus P) \cup (P \setminus D)$, niin $\mu(A) = 0$.
   (b) Osoita: Jos $A \in \mathcal{M}$ ja $A \subset (D^c \setminus P^c) \cup (P^c \setminus D^c)$, niin $\mu(A) = 0$.
   (c) Osoita, että $\mu(A \cap D) = \mu(A \cap P)$ ja $\mu(A \cap D^c) = \mu(A \cap P^c)$ kaikilla $A \in \mathcal{M}$.

3. Todista (keskenään singulaaristen) mittojen μ^+ ja μ^- yksikäsitteisyys Jordanin hajotelmassa (Lause 5.39).

4. Olkoon $(X, \mathcal{M}, \nu)$ mitta-avaruus ja $f\colon X \to \dot{\mathbb{R}}$ $\mathcal{M}$-mitallinen s.e. integraali
$$\int_X f\, d\nu = \int_X f^+\, d\nu - \int_X f^-\, d\nu$$
on määritelty (ks. Esimerkki 5.45). Silloin
$$\mu(E) = \int_E f\, d\nu, \quad E \in \mathcal{M},$$
on merkkimitta. Olkoon $P = \{x \in X : f(x) \geq 0\}$.
   (a) Osoita, että (P, P^c) on μ:n Hahnin hajotelma.
   (b) Osoita, että
$$\mu^+(E) = \int_E f^+\, d\nu \quad \text{ja} \quad \mu^-(E) = \int_E f^-\, d\nu$$
   jokaisella $E \in \mathcal{M}$.

5. Olkoon $\nu\colon \mathcal{M} \to [0, +\infty]$ mitta. Osoita, että $\mu \ll \nu$, jos ja vain jos $V(\mu, \cdot)|\mathcal{M} \ll \nu$.