Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Moderni reaalianalyysi
Harjoitus 11
29.11.2005

1. Olkoon $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ kuten Lemmassa 4.57 ja $J \subset \mathbb{N}$ äärellinen. Osoita, että
$$\mathbb{P}\big(\{\omega \in \Omega\colon X_\ell(\omega) = j_\ell \ \forall \ell \in J\} = \prod_{\ell \in J} p_{j_\ell}.$$

2. Olkoon $G_f = \{(x, f(x)) \in \mathbb{R}^2 \colon x \in [0,1]\}$ funktion $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ kuvaaja. Oletetaan, että f on Hölder-jatkuva eksponentilla $\alpha \in (0,1]$, ts.
$$|f(x) - f(y)| \leq C|x-y|^\alpha$$
kaikilla $x, y \in [0,1]$. Osoita, että $\dim_{\mathcal{H}} G_f \leq 2 - \alpha$.
[Vihje: Jos $I \subset [0,1]$ on väli, jonka pituus on $1/n$, $n \in \mathbb{N}$, niin arvioi kuinka montaa neliötä $I \times [\frac{s}{n}, \frac{s+1}{n}]$, $s \in \mathbb{N}$, voi f:n kuvaaja korkeintaan leikata.]

3. Olkoot $\mathbb{R}^n$:n similariteetit $\psi_j, j = 1, \ldots, k$, aitoja kontraktioita ja olkoon F vastaava invariantti joukko.
   (a) Jos $x_0 \in F$ ja $x \in F$, niin osoita, että
   $$x = \lim_{i \to \infty} \psi_{j_1} \circ \psi_{j_2} \circ \cdots \circ \psi_{j_i}(x_0),$$
   sopivalla (x:stä riippuvalla) jonolla similariteettien ψ_j iteraatioita.
   (b) Osoita, että iteraatioiden $\psi_{j_1} \circ \psi_{j_2} \circ \cdots \circ \psi_{j_i}$, $i \in \mathbb{N}$, kiintopisteiden joukko on tiheä F:ssä. [Käytä (a)-kohtaa.]

4. Osoita, että Rieszin s-kapasiteetille C_s, $s > 0$, pätee:
   (a)
   $$C_s(\{x_0\}) = 0$$
   jokaisella $s > 0$ ja $x_0 \in \mathbb{R}^n$.
   (b)
   $$C_s(A) < \infty,$$
   jos $s > 0$ ja $A \subset \mathbb{R}^n$ on rajoitettu.
   (c) Jos $\mathcal{H}^s(A) < \infty$, niin $C_s(A) = 0$.
   (d) Jos $C_s(A) = 0$ ja A on kompakti, niin $\mathcal{H}^t(A) = 0$ kaikilla $t > s$.

5. Olkoon $s > 0$ ja olkoot $A_i \subset \mathbb{R}^n$ Borel-joukkoja siten, että $C_s(A_i) = 0$ kaikilla $i \in \mathbb{N}$. Osoita, että
$$C_s\big(\bigcup_{i=1}^\infty A_i\big) = 0.$$
[Vihje: Huomaa, että jokaisella $\mu \in \mathcal{M}(\cup_i A_i)$ on oltava $\mu(A_i) > 0$ jollakin i.]