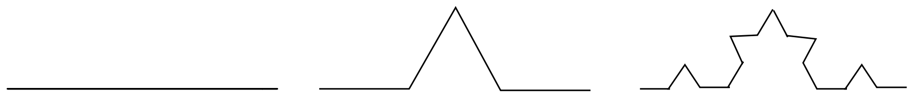
Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Moderni reaalianalyysi
Harjoitus 10
22.11.2005

1. Osoita, että Sierpinskin kolmion määräävien similariteettien perhe $\{\psi_1, \psi_2, \psi_3\}$ toteuttaa avoimen joukon ehdon ja laske Sierpinskin kolmion Hausdorff-dimensio.

2. Osoita, että luentojen Lauseen 4.40 itsesimilaari fraktaali F toteuttaa ehdon:
$F = F_1 \cup F_2 \cup \cdots \cup F_k$, missä kukin F_j on similaarinen F:n kanssa, $\mathcal{H}^s(F) > 0$ jollakin $s > 0$ ja $\mathcal{H}^s(F_i \cap F_j) = 0$, kun $i \neq j$. [Tämä asetetaan usein itsesimilaarin joukon määritelmäksi.]

3. Alla olevassa kuvassa on ensimmäiset vaiheet ns. von Kochin lumihiutaleen muodostamisesta. Esitä se itsesimilaarina fraktaalina etsimällä sopivat kontraktoivat similariteetit (kuvallinen selitys ja skaalaustekijät riittävät). Osoita, että avoimen joukon ehto pätee ja määrää Kochin käyrän Hausdorff-dimensio.



4. Olkoot $b_1 = (\frac{3}{4}, \frac{3}{4})$, $b_2 = (-\frac{3}{4}, \frac{3}{4})$, $b_3 = (\frac{3}{4}, -\frac{3}{4})$ ja $b_4 = (-\frac{3}{4}, -\frac{3}{4})$ sekä $\psi_j \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $j = 1, \ldots, 5$, similariteetteja s.e. $\psi_5(x) = \frac{1}{2}x$ ja $\psi_j(x) = \frac{1}{4}x + b_j$, $j = 1, \ldots, 4$. Hahmottele (=piirrä) approksimaatio näiden viiden similariteetin määrälle itsesimilaarille fraktaalille F ja määrää $\dim_{\mathcal{H}} F$.
[Ohje: Määrää joukot $\psi_j\big([-1,1]^2\big)$.]

5. Olkoot $\mathbb{R}^n$:n similariteetit ψ_j, $j = 1, \ldots, k$, aitoja kontraktioita ja $F = \cup_{j=1}^k \psi_j F$ vastaava kompakti invariantti joukko. Osoita, että avoimen joukon ehto toteutuu, jos joukot $\psi_j(F)$ ovat erillisiä.