Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Moderni reaalianalyysi
Harjoitus 1
13.9.2005

1. Olkoon $\mathcal{F} \subset \mathcal{P}(X)$ ja

$$\sigma(\mathcal{F}) = \bigcap \{\mathcal{M} \colon \mathcal{M} \text{ on } \sigma\text{-algebra } X\text{:ssä}, \ \mathcal{F} \subset \mathcal{M}\}.$$

   Osoita, että $\sigma(\mathcal{F})$ on σ-algebra.

2. Näytä, että metrisessä avaruudessa jokainen suljettu joukko on $\mathcal{G}_\delta$-joukko ja jokainen avoin joukko on $\mathcal{F}_\sigma$-joukko.

3. Kutsumme perhettä $\mathcal{F} \subset \mathcal{P}(X)$ *algebraksi*, jos
   (i) $\emptyset \in \mathcal{F}$,
   (ii) $A, B \in \mathcal{F} \ \Rightarrow \ A \cap B \in \mathcal{F}$, ja
   (iii) $A \in \mathcal{F} \ \Rightarrow \ X \setminus A \in \mathcal{F}$.

   Olkoot $\mathcal{F}_1 \subset \mathcal{F}_2 \subset \cdots$ σ-algebroja. Osoita, että $\bigcup_i \mathcal{F}_i$ on algebra. Anna esimerkki, joka näyttää, ettei perheen $\bigcup_i \mathcal{F}_i$ tarvitse olla σ-algebra.

4. Olkoon $\tilde{\mu}$ sellainen metrisen avaruuden X ulkomitta, että jokainen X:n Borel-joukko on $\tilde{\mu}$-mitallinen (ts. $\tilde{\mu}$ on Borel-ulkomitta). Osoita, että $\tilde{\mu}$ on metrinen ulkomitta.

5. Olkoon $\tilde{\mu}$ Borel-säännöllinen ulkomitta X:ssä ja $A \subset X$ $\tilde{\mu}$-mitallinen s.e. $\mu(A) < \infty$. Osoita, että $\tilde{\mu} \llcorner A$ on Borel-säännöllinen.