Moderni reaalianalyysi, Syksy 2005 [1]

Ilkka Holopainen[2]

14. syyskuuta 2011

[1]Perustuvat pääosin luentomonisteisiin Saksman: Moderni reaalianalyysi (1998) ja Astala: Moderni reaalianalyysi (2002)

[2]Ilmoita painovirheistä esim. sähköpostitse osoitteeseen `ilkka.holopainen@helsinki.fi`

Sisältö

1 Mitta- ja integrointiteorian kertausta ja täydennystä

1.1 Mitat

Olkoon X joukko ja

$$\mathcal{P}(X) = \{A \colon A \subset X\}$$

X:n potenssijoukko.

Määritelmä 1.2. Kokoelma $\mathcal{M} \subset \mathcal{P}(X)$ on *σ-algebra* “sigma-algebra”) X:ssä, jos

(1) $\emptyset \in \mathcal{M}$;

(2) $A \in \mathcal{M} \;\Rightarrow\; A^c = X \setminus A \in \mathcal{M}$;

(3) $A_i \in \mathcal{M},\ i \in \mathbb{N} \;\Rightarrow\; \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{M}$.

Esimerkki 1.3. 1. $\mathcal{P}(X)$ on laajin σ-algebra X:ssä;

2. $\{\emptyset, X\}$ on pienin σ-algebra X:ssä;

3. $\mathrm{Leb}(\mathbb{R}^n) = \mathbb{R}^n$:n Lebesgue-mitalliset joukot.

4. Jos $\mathcal{M}$ on σ-algebra X:ssä ja $A \subset X$, niin

$$\mathcal{M}|A = \{B \cap A \colon B \in \mathcal{M}\}$$

on σ-algebra A:ssa.

5. Jos $\mathcal{M}$ on σ-algebra X:ssä ja $A \in \mathcal{M}$, niin

$$\mathcal{M}_A = \{B \subset X \colon B \cap A \in \mathcal{M}\}$$

on σ-algebra X:ssä.

Määritelmä 1.4. Jos $\mathcal{F} \subset \mathcal{P}(X)$ on jokin perhe X:n osajoukkoja, niin

$$\sigma(\mathcal{F}) = \bigcap\{\mathcal{M} \colon \mathcal{M} \text{ on } \sigma\text{-algebra } X\text{:ssä}, \mathcal{F} \subset \mathcal{M}\}$$

on $\mathcal{F}$:n *virittämä* σ-algebra. Se on pienin σ-algebra, joka sisältää $\mathcal{F}$:n.

Esimerkki 1.5. Palautetaan mieliin, että joukko $I \subset \mathbb{R}^n$ on avoin n-väli, jos se on muotoa

$$I = \{(x_1, \ldots, x_n) \colon a_j < x_j < b_j\},$$

missä $-\infty \le a_j < b_j \le +\infty$. Silloin

$$\sigma(\{I \colon I\ n\text{-väli}\}) = \sigma(\{A \colon A \subset \mathbb{R}^n \text{ avoin}\}) \overset{\text{merk.}}{=} \mathrm{Bor}(\mathbb{R}^n)$$

on $\mathbb{R}^n$ *Borel-joukkojen* σ-algebra. (Mieti, miksi vasemmalla puolella on yhtäsuuruus.)

Havaitaan, että $\mathbb{R}^n$:n kaikki avoimet joukot, suljetut joukot, $\mathcal{G}_\delta$-joukot (avointen joukkojen numeroituvat leikkaukset), $\mathcal{F}_\sigma$-joukot (suljettujen joukkojen numeroituvat yhdisteet), $\mathcal{F}_{\sigma\delta}$-joukot, $\mathcal{G}_{\delta\sigma}$-joukot (jne.) ovat Borel-joukkoja. Siten esimerkiksi rationaalilukujen joukko $\mathbb{Q}$ on Borel.

Huomautus 1.6. Jokaisessa topologisessa avaruudessa X voidaan määritellä Borel-joukot

$$\mathrm{Bor}(X) = \sigma(\{A \colon A \subset X \text{ avoin}\}).$$

Määritelmä 1.7. Olkoon $\mathcal{M}$ σ-algebra X:ssä. Kuvaus $\mu\colon \mathcal{M} \to [0, +\infty]$ on *mitta*, jos pätee:

(i) $\mu(\emptyset) = 0$,

(ii) $\mu\big(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\big) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i)$, jos joukot $A_i \in \mathcal{M}$ ovat *erillisiä*.

Kolmikkoa $(X, \mathcal{M}, \mu)$ kutsutaan *mitta-avaruudeksi* ja $\mathcal{M}$:n alkioita *mitallisiksi joukoiksi*.

Ehtoa (ii) kutsutaan *täysadditiivisuudeksi*. Määritelmästä seuraa, että mitta on *monotoninen*: Jos $A, B \in \mathcal{M}$ ja $A \subset B$, niin $\mu(A) \le \mu(B)$.

Huomautus 1.8. 1. Jos $\mu(X) < \infty$, mitta μ on *äärellinen*.

2. Jos $\mu(X) = 1$, niin μ on *todennäköisyysmitta*.

3. Jos $X = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$, missä $\mu(A_i) < \infty$ $\forall i$, mitta μ on *σ-äärellinen*. Tällöin sanotaan myös, että X on σ-äärellinen μ:n suhteen.

4. Jos $A \in \mathcal{M}$ ja $\mu(A) = 0$, niin A on *nollamittainen*.

5. Jos X on topologinen avaruus ja $\mathrm{Bor}(X) \subset \mathcal{M}$ (ts. jokainen Borel-joukko on mitallinen), niin μ on *Borel-mitta*.

Esimerkki 1.9. 1. $X = \mathbb{R}^n$, $\mathcal{M} = \mathrm{Leb}\,\mathbb{R}^n =$ Lebesgue-mitallisten joukkojen perhe ja $\mu = m_n =$ Lebesguen mitta.

2. $X = \mathbb{R}^n$, $\mathcal{M} = \mathrm{Bor}\,\mathbb{R}^n =$ Borel-joukkojen perhe ja $\mu = m_n|\,\mathrm{Bor}\,\mathbb{R}^n =$ Lebesguen mitan rajoittuma Borel-joukkojen perheeseen.

3. Olkoon $X \ne \emptyset$ mikä tahansa joukko. Kiinnitetään $x \in X$ ja asetetaan kaikilla $A \subset X$

$$\mu(A) = \begin{cases} 1, & \text{jos } x \in A; \\ 0, & \text{jos } x \notin A. \end{cases}$$

Silloin $\mu\colon \mathcal{P}(X) \to [0, +\infty]$ on mitta (ns. *Dirac mitta* alkiossa $x \in X$). Usein merkitään $\mu = \delta_x$.

4. Jos $f\colon \mathbb{R}^n \to [0, +\infty]$ on Lebesgue-mitallinen, niin $\mu\colon\ \mathrm{Leb}(\mathbb{R}^n) \to [0, +\infty]$,

$$\mu(E) = \int_E f(x)\,dm_n(x),$$

on mitta. (Ks. Mitta ja integraali, Lause 3.22)

5. Jos $(X, \mathcal{M}, \mu)$ on mitta-avaruus ja $A \in \mathcal{M}$, niin kuvaus $\mu \llcorner A\colon \mathcal{M}_A \to [0, +\infty]$,

$$(\mu \llcorner A)(B) = \mu(B \cap A),$$

on mitta. Sitä kutsutaan *μ:n rajoittumaksi A:han*.

Lause 1.10. *Olkoon $(X, \mathcal{M}, \mu)$ mitta-avaruus ja $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{M}$.*

(a) Jos $A_1 \subset A_2 \subset A_3 \cdots$*, niin*

$$\mu(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) = \lim_{i\to\infty} \mu(A_i).$$

(b) Jos $A_1 \supset A_2 \supset A_3 \supset \cdots$ *ja* $\mu(A_k) < \infty$ *jollakin* k*, niin*

$$\mu(\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i) = \lim_{i\to\infty} \mu(A_i).$$

Todistus. Mitta ja integraali. □

1.11 Metriset ulkomitat

Määritelmä 1.12. Kuvaus $\tilde{\mu}\colon \mathcal{P}(X) \to [0, +\infty]$ on *ulkomitta* X:ssä, jos pätee:

(i) $\tilde{\mu}(\emptyset) = 0$;

(ii) $\tilde{\mu}(A) \le \sum_{i=1}^{\infty} \tilde{\mu}(A_i)$, jos $A \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \subset X$.

Huomautus 1.13.

1. Ulkomitta on siis määritelty kaikilla X:n osajoukoilla.
2. Ehdosta (ii) seuraa, että ulkomitta on monotoninen, ts. $\tilde{\mu}(A) \le \tilde{\mu}(B)$, jos $A \subset B \subset X$.
3. Useissa kirjoissa (esim. Evans-Gariepy, Mattila, ...) ulkomittaa kutsutaan mitaksi.
4. Olkoon $\tilde{\mu}$ ulkomitta X:ssä ja $A \subset X$. Silloin $\tilde{\mu}$:n *rajoittuma A:han*,

$$(\tilde{\mu}\llcorner A)(B) = \tilde{\mu}(B \cap A)$$

on ulkomitta X:ssä.

Jokainen ulkomitta määrittelee "mitallisten" joukkojen σ- algebran ns. Carathéodoryn ehdon avulla.

Määritelmä 1.14. Olkoon $\tilde{\mu}$ ulkomitta X:ssä. Joukko $E \subset X$ on *$\tilde{\mu}$-mitallinen*, tai lyhyemmin *mitallinen*, jos

$$\tilde{\mu}(A) = \tilde{\mu}(A \cap E) + \tilde{\mu}(A \setminus E)$$

kaikilla $A \subset X$.

Lause 1.15. *Olkoon* $\tilde{\mu}$ *ulkomitta* X*:ssä ja*

$$\mathcal{M} = \mathcal{M}_{\tilde{\mu}} = \{E \subset X \colon E \text{ on } \tilde{\mu}\text{-mitallinen}\}$$

Silloin

(a) $\mathcal{M}$ *on* σ*-algebra ja*

(b) $\mu = \tilde{\mu}|\mathcal{M}$ *on mitta (so.* μ *on täysadditiivinen).*

Todistus. Mitta ja integraali. □

Määritelmä 1.16. Sanomme, että topologisen avaruuden X ulkomitta $\tilde{\mu}$ on *Borel-ulkomitta*, jos jokainen X:n Borel-joukko on $\tilde{\mu}$-mitallinen (toisin sanoen, jos $\tilde{\mu}$:n määräämä mitta on Borel-mitta).

Ryhdymme seuraavaksi etsimään vastausta kysymykseen milloin topologisen avaruuden X ulkomitta $\tilde{\mu}$ on Borel.

Määritelmä 1.17 (Carathéodory)**.** Metrisen avaruuden (X,d) ulkomitta $\tilde{\mu}$ on *metrinen ulkomitta*, jos

$$\tilde{\mu}(A \cup B) = \tilde{\mu}(A) + \tilde{\mu}(B)$$

kaikilla $A, B \subset X$, joilla $\operatorname{dist}(A,B) = \inf\{d(a,b) \colon a \in A, b \in B\} > 0$.

Lause 1.18. *Metrisen avaruuden (X,d) ulkomitta $\tilde{\mu}$ on Borel-ulkomitta, jos ja vain jos $\tilde{\mu}$ on metrinen ulkomitta.*

Muotoillaan ja todistetaan ensin aputulos.

Lemma 1.19. *Olkoon $\tilde{\mu}$ metrinen ulkomitta, $A \subset X$ ja G avoin joukko s.e. $A \subset G$. Jos*

$$A_k = \{x \in A \colon \operatorname{dist}(x, G^c) \geq 1/k\}, \ k \in \mathbb{N},$$

niin $\tilde{\mu}(A) = \lim_{k\to\infty} \tilde{\mu}(A_k)$.

Todistus. Koska G on avoin, $A \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$. Siten $A = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$. Olkoon

$$B_k = A_{k+1} \setminus A_k.$$

Silloin

$$A = A_{2n} \cup \left(\bigcup_{k=n}^{\infty} B_{2k} \right) \cup \left(\bigcup_{k=n}^{\infty} B_{2k+1} \right),$$

joten

$$\tilde{\mu}(A) \leq \tilde{\mu}(A_{2n}) + \underbrace{\sum_{k=n}^{\infty} \tilde{\mu}(B_{2k})}_{=(I)} + \underbrace{\sum_{k=n}^{\infty} \tilde{\mu}(B_{2k+1})}_{=(II)}.$$

Annetaan sitten $n \to \infty$.

(1) Jos summat $(I), (II) \to 0$, kun $n \to \infty$, niin

$$\tilde{\mu}(A) \leq \lim_{n\to\infty} \tilde{\mu}(A_{2n}) \leq \tilde{\mu}(A)$$

ja väite on tosi.

(2) Jos $(I) \not\to 0$, kun $n \to \infty$, niin

$$\sum_n \tilde{\mu}(B_{2n}) = \infty.$$

Toisaalta

$$A \supset A_{2n} \supset \bigcup_{k=1}^{n-1} B_{2k},$$

missä

$$\operatorname{dist}(B_{2k}, B_{2k+2}) \geq \frac{1}{2k+1} - \frac{1}{2k+2} > 0.$$

Koska $\tilde{\mu}$ on metrinen ulkomitta, niin

$$\sum_{k=1}^{n-1} \tilde{\mu}(B_{2k}) = \tilde{\mu}\big(\bigcup_{k=1}^{n-1} B_{2k}\big) \le \tilde{\mu}(A_{2n}) \le \tilde{\mu}(A).$$

Kun $n \to \infty$, saadaan

$$\tilde{\mu}(A) = \lim_{k\to\infty} \tilde{\mu}(A_k) = \infty.$$

Samoin päätellään, jos summa $(II) \not\to 0$, kun $n \to \infty$. □

Lauseen 1.18 todistus. Oletetaan ensin, että $\tilde{\mu}$ on metrinen ulkomitta ja osoitetaan, että $\tilde{\mu}$ on Borel-ulkomitta. Koska $\mathrm{Bor}(X) = \sigma(\{F\colon F \subset X \text{ suljettu}\})$ ja $\mathcal{M}_{\tilde{\mu}}$ on σ-algebra, niin riittää osoittaa, että jokainen suljettu joukko $F \subset X$ on $\tilde{\mu}$-mitallinen.

Olkoon $E \subset X$ mikä tahansa testijoukko Carathéodoryn ehdossa. Sovelletaan Lemmaa 1.19 joukoilla $A = E \setminus F$ ja $G = X \setminus F$. Olkoon $A_k = \{x \in E \setminus F\colon \mathrm{dist}(x, G^c) \ge 1/k\},\ k \in \mathbb{N}$, jolloin

$$\mathrm{dist}(A_k, F) \ge 1/k$$

ja

$$\lim_{k\to\infty} \tilde{\mu}(A_k) = \tilde{\mu}(E \setminus F).$$

Koska $\tilde{\mu}$ on metrinen,

$$\tilde{\mu}(E) \ge \tilde{\mu}\big((E \cap F) \cup A_k\big) = \tilde{\mu}(E \cap F) + \tilde{\mu}(A_k).$$

Antamalla $k \to \infty$ saadaan

$$\tilde{\mu}(E) \ge \tilde{\mu}(E \cap F) + \tilde{\mu}(E \setminus F).$$

Toisaalta ulkomitan monotonisuudesta seuraa, että

$$\tilde{\mu}(E) \le \tilde{\mu}(E \cap F) + \tilde{\mu}(E \setminus F).$$

Siten F on $\tilde{\mu}$-mitallinen ja $\tilde{\mu}$ on Borel-ulkomitta.

Käänteisen suunnan todistus jää harjoitustehtäväksi. □

1.20 Mittojen säännöllisyys, Radon-mitat

Erityisen hyödyllisiä ulkomittoja ovat ne, joiden määrittelemissä mitallisten joukkojen perheissä on paljon joukkoja. Tällaisilla ulkomitoilla on oma nimi:

Määritelmä 1.21. Sanomme, että X:n ulkomitta $\tilde{\mu}$ on *säännöllinen*, jos jokaista $A \subset X$ kohti on olemassa $\tilde{\mu}$-mitallinen joukko E siten, että $A \subset E$ ja $\mu(E) = \tilde{\mu}(A)$. (E on A:n *mitallinen peite.*)

Määritelmä 1.22. Olkoon X topologinen avaruus.

(a) Sanomme, että X:n ulkomitta $\tilde{\mu}$ on *Borel-säännöllinen*, jos μ on Borel-mitta ja jokaista $A \subset X$ kohti on olemassa Borel-joukko $B \in \mathrm{Bor}(X)$ siten, että $A \subset B$ ja $\mu(B) = \tilde{\mu}(A)$.

(b) Jos $(X, \mathcal{M}, \mu)$ on mitta-avaruus s.e. $\mathrm{Bor}(X) \subset \mathcal{M}$, niin mittaa μ sanotaan *Borel-säännölliseksi*, jos jokaista $A \in \mathcal{M}$ kohti on olemassa $B \in \mathrm{Bor}(X)$ s.e. $A \subset B$ ja $\mu(A) = \mu(B)$.

Lemma 1.23. *Jos $\tilde{\mu}$ on Borel-säännöllinen ulkomitta X:ssä ja $A \subset X$ on $\tilde{\mu}$-mitallinen s.e. $\mu(A) < \infty$, niin $\tilde{\mu}\llcorner A$ on Borel-säännöllinen. Jos $A \in \mathrm{Bor}(X)$, niin oletusta $\mu(A) < \infty$ ei tarvita.*

Todistus. (HT 1/5)

Lause 1.24. *Olkoon $\tilde{\mu}$ Borel-säännöllinen ulkomitta metrisessä avaruudessa X, $A \subset X$ $\tilde{\mu}$-mitallinen ja $\varepsilon > 0$.*

(a) Jos $\mu(A) < \infty$, niin on olemassa suljettu joukko $C \subset A$ s.e. $\mu(A \setminus C) < \varepsilon$.

(b) Jos on olemassa avoimet joukot $V_1, V_2, \ldots \subset X$ s.e. $A \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} V_i$ ja $\mu(V_i) < \infty$ $\forall i$, niin on olemassa avoin joukko $V \subset X$ s.e. $A \subset V$ ja $\mu(V \setminus A) < \varepsilon$.

Todistus. (a): Korvaamalla $\tilde{\mu}$ Borel-säännöllisellä ulkomitalla $\tilde{\mu} \llcorner A$ (ks. Lemma 1.23) voidaan olettaa, että $\tilde{\mu}(X) < \infty$. Osoitetaan väite ensin jokaiselle Borel-joukolle A. Olkoon

$$\mathcal{D} = \{A \subset X \colon \forall \varepsilon > 0\ \exists \text{ suljettu } C \subset A \text{ ja avoin } V \supset A \text{ s.e. } \mu(V \setminus C) < \varepsilon\}.$$

Helposti nähdään, että $\mathcal{D}$ toteuttaa ehdot (1) ja (2) σ-algebran määritelmässä. Oletetaan, että $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{D}$ ja olkoon $\varepsilon > 0$. Tällöin on olemassa suljetut joukot C_i ja avoimet joukot V_i s.e. $C_i \subset A_i \subset V_i$ ja $\mu(V_i \setminus C_i) < \varepsilon/2^i$. Nyt $V = \bigcup_i V_i$ on avoin ja

$$\mu\big(\underbrace{V \setminus \bigcup_i C_i}_{\subset \bigcup_i (V_i \setminus C_i)}\big) \leq \sum_i \mu(V_i \setminus C_i) < \varepsilon.$$

Toisaalta Lauseen 1.10 (b) nojalla

$$\lim_{n \to \infty} \mu\big(V \setminus \bigcup_{i=1}^{n} C_i\big) = \mu\big(V \setminus \bigcup_{i=1}^{\infty} C_i\big),$$

joten on olemassa n s.e.

$$\mu\big(V \setminus \bigcup_{i=1}^{n} C_i\big) < \varepsilon.$$

Koska $\bigcup_{i=1}^{n} C_i$ on suljettu, $\mathcal{D}$ toteuttaa myös σ-algebran (3):n ehdon. Osoitetaan sitten, että $\mathcal{D}$ sisältää suljetut joukot. Olkoon C suljettu ja

$$V_i = \{x \in X \colon \operatorname{dist}(x, C) < 1/i\}.$$

Tällöin V_i on avoin $V_1 \supset V_2 \supset \cdots$ ja $C = \bigcap_i V_i$. Siten $\lim_{i \to \infty} \mu(V_i) = \mu(C)$ ja $\lim_{i \to \infty} \mu(V_i \setminus C) = 0$. Tästä seuraa, että $C \in \mathcal{D}$. Siten $\mathcal{D}$ on σ-algebra, joka sisältää kaikki suljetut joukot. Erityisesti $\operatorname{Bor}(X) \subset \mathcal{D}$. Siten (a)-kohta pätee kaikille Borel-joukoille.

Oletetaan sitten, että A on $\tilde{\mu}$-mitallinen ja $\mu(A) < \infty$. Koska $\tilde{\mu}$ on Borel-säännöllinen, on olemassa Borel-joukko $B \supset A$ s.e. $\mu(A) = \mu(B)$. Silloin $\mu(B \setminus A) = 0$. Edelleen on olemassa Borel-joukko $D \supset B \setminus A$ s.e. $\mu(D) = 0$. Nyt $E = B \setminus D$ on Borel, $E \subset A$ ja

$$\mu(\underbrace{A \setminus E}_{\subset D}) = 0.$$

Aiemmin todistetun nojalla jokaista $\varepsilon > 0$ kohti on olemassa suljettu $C \subset E = B \setminus D$ ($\subset A$) s.e. $\mu(E \setminus C) < \varepsilon$. Mutta silloin

$$\mu(A \setminus C) \leq \mu(A \setminus E) + \mu(E \setminus C) < \varepsilon,$$

joten (a) pätee A:lle.

(b) Soveltamalla (a)-kohtaa joukkoihin $V_i \setminus A$ saadaan suljetut joukot $C_i \subset V_i \setminus A$ s.e.

$$\mu(V_i \setminus A \setminus C_i) < \varepsilon 2^{-i}.$$

Silloin $V = \bigcup_i (V_i \setminus C_i)$ on avoin, $A \subset V$ ja $\mu(V \setminus A) < \varepsilon$. □

Huomautus 1.25. Ulkomitan Borel-säännöllisyyttä *ei* tarvittu väitteiden (a) ja (b) todistamiseen Borel-joukoille A. Siten Lause 1.24 pätee kaikille Borel-ulkomitoille, jos lisäksi oletetaan, että A on Borel.

Jatkossa keskeisiä ovat *Radon-mitat*, jotka määritellään seuraavaksi. Muistutetaan, että topologinen avaruus X on *lokaalisti kompakti*, jos jokaisella pisteellä $x \in X$ on ympäristö, jonka sulkeuma on kompakti. Topologinen avaruus on *Hausdorff*, jos sen eri pisteillä on erilliset ympäristöt.

Määritelmä 1.26. Olkoon X lokaalisti kompakti Hausdorff-avaruus. Sanomme, että mitta μ on *Radon-mitta*, jos μ on Borel-mitta ja

(a) $\mu(K) < \infty$ kaikilla kompakteilla $K \subset X$;

(b) $\mu(V) = \sup\{\mu(K) \colon K \subset V \text{ kompakti}\}$ kaikilla avoimilla $V \subset X$;

(c) $\mu(B) = \inf\{\mu(V) \colon B \subset V \text{ ja } V \subset X \text{ avoin}\}$ kaikilla Borel-joukoilla $B \in \mathrm{Bor}(X)$.

Huomautus 1.27.
1. Yleisesti Borel-säännöllisen mitan (lokaalisti kompaktissa Hausdorff-avaruudessa) ei tarvitse olla Radon-mitta (ks. HT 2/2).
2. Toisaalta Radon-mitankaan ei tarvitse olla Borel-säännöllinen: Olkoon $A \subset \mathbb{R}$ ei-Lebesgue-mitallinen, $\tilde{\mu} = m^* \llcorner A$ ja
$$\mu = \tilde{\mu} | \{E \subset \mathbb{R} \colon E \ \tilde{\mu}\text{-mitallinen}\}.$$
Tällöin μ on Radon-mitta, mutta ei Borel-säännöllinen. (HT)

Joissakin tapauksissa Radon-mitat voidaan helposti karakterisoida.

Lause 1.28. *Olkoon μ Borel-mitta $\mathbb{R}^n$:ssä. Silloin μ on Radon-mitta, jos ja vain jos μ on* lokaalisti äärellinen*, ts.*

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, \ \mu\big(B(x,r)\big) < \infty, \ \textit{kun } 0 < r < r_x.$$

Todistus. Määritelmän 1.26 (a)-kohdan nojalla Radon-mitat ovat lokaalisti äärellisiä.

Oletetaan sitten, että μ on lokaalisti äärellinen Borel-mitta $\mathbb{R}^n$:ssä. Jos $K \subset \mathbb{R}^n$ on kompakti, niin valitaan jokaisella $x \in K$ avoin x-keskinen kuula, jonka mitta on äärellinen. Koska K on kompakti, se voidaan peittää äärellisen monella tällaisella kuulalla. Siten K:n mitta on äärellinen ja (a) pätee.

Todistetaan ehdot (b) ja (c) jokaiselle Borel-joukolle $A \subset \mathbb{R}^n$. Soveltamalla Lauseen 1.24 (a)-kohtaa (ks. myös Huom. 1.25) äärellismittaisiin Borel-joukkoihin

$$A_i = A \cap B(0,i), \quad B(0,i) = \{x \in \mathbb{R}^n \colon |x| \le i\},$$

löydetään suljetut joukot $C_i \subset A_i$ s.e.

$$\mu(A_i \setminus C_i) < 1/i.$$

Tällöin C_i on suljettuna ja rajoitettuna joukkona kompakti (olemme $\mathbb{R}^n$:ssä). Nyt

$$\mu(A) \geq \mu(A_i) \geq \mu(C_i) > \mu(A_i) - 1/i \xrightarrow{1.10(a)} \mu(A),$$

josta seuraa (b). Koska $A \subset \bigcup_i B(0,i)$ ja $\mu(B(0,i)) < \infty$, on Lauseen 1.24 (b)-kohdan nojalla olemassa avoimet joukot $V_j \subset \mathbb{R}^n$ s.e. $A \subset V_j$ ja $\mu(V_j \setminus A) < 1/j$. Tällöin

$$\mu(A) \leq \mu(V_j) = \mu(A) + \mu(V_j \setminus A) < \mu(A) + 1/j,$$

josta seuraa (c). □

Korollari 1.29. *Olkoon $\tilde{\mu}$ lokaalisti äärellinen metrinen ulkomitta $\mathbb{R}^n$:ssä. Silloin $\tilde{\mu}$:n määräämä mitta $\mu = \tilde{\mu}|\mathcal{M}$, $\mathcal{M} = \{A \subset \mathbb{R}^n \colon A$ $\tilde{\mu}$-mitallinen$\}$, on Radon-mitta.*

Huomautus 1.30. Lause 1.28 pätee yleisemminkin. Esimerkiksi, jos X on lokaalisti kompakti metrinen avaruus, jonka topologialla on numeroituva kanta.

1.31 Mittojen yksikäsitteisyys

Seuraavaksi tutkimme, milloin kaksi mittaa $\nu, \mu \colon \sigma(\mathcal{F}) \to [0, +\infty]$ yhtyvät, jos $\nu(A) = \mu(A)\ \forall A \in \mathcal{F}$ (vrt. HT 2/1).

Määritelmä 1.32.

1. Kokoelma $\mathcal{F} \subset \mathcal{P}(X)$, $\mathcal{F} \neq \emptyset$, on *$\pi$-systeemi*, jos $A \cap B \in \mathcal{F}$ kaikilla $A, B \in \mathcal{F}$.
2. Kokoelma $\mathcal{D} \subset \mathcal{P}(X)$ on *d-systeemi* (eli *Dynkinin luokka*), jos pätee:
   - (i) $X \in \mathcal{D}$;
   - (ii) $A, B \in \mathcal{D}$ ja $A \subset B \;\Rightarrow\; B \setminus A \in \mathcal{D}$;
   - (iii) $A_1 \subset A_2 \subset \cdots$ ja $A_k \in \mathcal{D}\ \forall k \;\Rightarrow\; \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \in \mathcal{D}$.
3. Kokoelman $\mathcal{A}$ *virittämä d-systeemi* on pienin d-systeemi, joka sisältää $\mathcal{A}$:n, ts.

$$\bigcap\{\mathcal{D} \colon \mathcal{D}\ d\text{-systeemi},\ \mathcal{A} \subset \mathcal{D}\}.$$

Lause 1.33 (Dynkinin lemma)**.** *Olkoon $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$ π-systeemi. Jos $\mathcal{D}$ on d-systeemi ja $\mathcal{A} \subset \mathcal{D}$, niin $\sigma(\mathcal{A}) \subset \mathcal{D}$.*

Todistus. Riittää osoittaa väite tapauksessa, jossa $\mathcal{D}$ on $\mathcal{A}$:n virittämä d-systeemi. Tällöin riittää osoittaa, että $\mathcal{D}$ on σ-algebra.

1. $A \in \mathcal{D} \;\Rightarrow\; A^c \in \mathcal{D}$: Tämä seuraa suoraan d-systeemin ehdoista (i) ja (ii).
2. $X \in \mathcal{D}$ (ehto (i)).
3. $A \in \mathcal{D}, B \in \mathcal{A} \;\Rightarrow\; A \cap B \in \mathcal{D}$: Tämä seuraa, jos osoitetaan, että

$$\mathcal{D}_1 = \{A \in \mathcal{D} \colon A \cap B \in \mathcal{D} \quad \forall B \in \mathcal{A}\}$$

on d-systeemi, joka sisältää $\mathcal{A}$:n. Silloinhan on oltava $\mathcal{D}_1 = \mathcal{D}$. Inkluusio $\mathcal{A} \subset \mathcal{D}_1$ pätee, koska $\mathcal{A}$ on π-systeemi ja $\mathcal{A} \subset \mathcal{D}$. Ehto (i) on myös selvä. Jos $A_1, A_2 \in \mathcal{D}_1, A_1 \subset A_2$, niin kaikilla $B \in \mathcal{A}$

$$(A_2 \setminus A_1) \cap B = (\underbrace{A_2 \cap B}_{\in \mathcal{D}}) \setminus (\underbrace{A_1 \cap B}_{\in \mathcal{D}}) \in \mathcal{D},$$

joten $A_2 \setminus A_1 \in \mathcal{D}$ ja ehto (ii) pätee. Samoin ehto (iii) on voimassa, sillä jos $A_1 \subset A_2 \subset \cdots$ ja $A_k \in \mathcal{D}_1$ $\forall k$, niin

$$(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k) \cap B = \bigcup_{k=1}^{\infty} (\underbrace{A_k \cap B}_{\in \mathcal{D}}) \in \mathcal{D}$$

kaikilla $B \in \mathcal{A}$ ja siten $\cup_k A_k \in \mathcal{D}_1$.

4. $A, B \in \mathcal{D} \;\Rightarrow\; A \cap B \in \mathcal{D}$: Samoin kuin edellä nähdään, että

$$\mathcal{D}_2 = \{A \in \mathcal{D} \colon A \cap B \in \mathcal{D} \quad \forall B \in \mathcal{D}\}$$

on d-systeemi. Lisäksi $\mathcal{A} \subset \mathcal{D}_2$ 3-kohdan mukaan, joten $\mathcal{D}_2 = \mathcal{D}$.

Edellä olleen nojalla $\mathcal{D}$ on suljettu leikkauksen suhteen. Koska lisäksi $\mathcal{D}$ on suljettu komplementoinnin suhteen, on $\mathcal{D}$ suljettu yhdisteen suhteen (ts. $\mathcal{D}$ on algebra). Lopuksi havaitaan, että $\mathcal{D}$ toteuttaa σ-algebran (iii)-ehdon, sillä jos $A_1, A_2, \ldots, \subset \mathcal{D}$, niin

$$\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k = \bigcup_{k=1}^{\infty} A'_k \in \mathcal{D},$$

missä $A'_k = A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_k \in \mathcal{D}$ ja $A'_k \subset A'_{k+1}$. Siten $\mathcal{D}$ on σ-algebra. □

Lause 1.34. *Olkoon $\mathcal{F}$ π-systeemi, $\mathcal{M} = \sigma(\mathcal{F})$ ja $\nu, \mu \colon \mathcal{M} \to [0, +\infty]$ todennäköisyysmittoja s.e. $\nu(A) = \mu(A)$ kaikilla $A \in \mathcal{F}$. Silloin $\nu \equiv \mu$.*

Todistus. Merkitään $\mathcal{D} = \{A \in \mathcal{M} \colon \nu(A) = \mu(A)\}$ ja osoitetaan, että $\mathcal{D} = \mathcal{M}$. Lauseen 1.33 nojalla riittää osoittaa, että $\mathcal{D}$ on d-systeemi, sillä silloin $\mathcal{M} = \sigma(\mathcal{F}) \subset \mathcal{D} \subset \mathcal{M}$.

(i) Koska $\nu(X) = 1 = \mu(X)$, niin $X \in \mathcal{D}$.

(ii) Jos $A, B \in \mathcal{D}$ ja $A \subset B$, niin

$$\nu(B \setminus A) = \nu(B) - \nu(A) = \mu(B) - \mu(A) = \mu(B \setminus A),$$

joten $B \setminus A \in \mathcal{D}$.

(iii) Olkoot $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{D}$ ja $A_1 \subset A_2 \subset \cdots$. Silloin Lauseen 1.10 (a) nojalla

$$\nu(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) = \lim_{i \to \infty} \nu(A_i) = \lim_{i \to \infty} \mu(A_i) = \mu(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i),$$

joten $\cup_i A_i \in \mathcal{D}$.

Siis $\mathcal{D}$ on d-systeemi ja lause on siten todistettu. □

Korollari 1.35. *Olkoot ν ja μ äärellisiä Borel-mittoja $\mathbb{R}^n$:ssä. Jos $\nu(I) = \mu(I)$ jokaisella äärellisellä n-välillä I, niin $\nu \equiv \mu$.*

Todistus. Koska

$$\mathbb{R}^n = \bigcup_{j=1}^{\infty}]-j, j[^n,$$

niin oletuksesta ($\nu(I) = \mu(I)$) ja Lauseesta 1.10 (a) seuraa, että $\nu(\mathbb{R}^n) = \mu(\mathbb{R}^n) = c_0 < \infty$. Jos $c_0 = 0$, niin $\nu \equiv 0 \equiv \mu$ ja asia on selvä. Muussa tapauksessa jakamalla c_0:lla, voidaan olettaa, että ν ja μ ovat todennäköisyysmittoja. Koska $\mathcal{F} = \{I \colon I \text{ äärellinen } n\text{-väli}\}$ on π-systeemi ja $\sigma(\mathcal{F}) = \mathrm{Bor}(\mathbb{R}^n)$, seuraa väite Lauseesta 1.34. □

1.36 Mittojen laajentaminen

Oletetaan, että on annettu kokoelma $\mathcal{F} \subset \mathcal{P}(X)$ ja kuvaus $\mu\colon \mathcal{F} \to [0, +\infty]$, joka on *$\sigma$-additiivinen $\mathcal{F}$:ssä*, toisin sanoen,

$$\left.\begin{array}{c} A_k \in \mathcal{F} \text{ erillisiä} \\ \\ \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \in \mathcal{F} \end{array}\right\} \Rightarrow \mu\Big(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\Big) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k). \tag{1.37}$$

Tutkimme seuraavaksi, milloin μ voidaan jatkaa mitaksi $\sigma(\mathcal{F})$:ään. Edellisen kappaleen valossa oletamme, että $\mathcal{F}$ on π-systeemi. Yleisesssä tapauksessa tämä ei riitä laajentamiseen, mutta jos oletamme hieman enemmän, laajentaminen onnistuu.

Määritelmä 1.38. 1. Perhe $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$ on *algebra*, jos

(i) $\emptyset \in \mathcal{A}$;

(ii) $A, B \in \mathcal{A} \;\Rightarrow\; A \cap B \in \mathcal{A}$;

(iii) $A \in \mathcal{A} \;\Rightarrow\; X \setminus A \in \mathcal{A}$.

2. Perhe $\mathcal{P} \subset \mathcal{P}(X)$ on *puolialgebra*, jos

(a) $\emptyset \in \mathcal{P}$;

(b) $A, B \in \mathcal{P} \;\Rightarrow\; A \cap B \in \mathcal{P}$;

(c) $A \in \mathcal{P} \;\Rightarrow\; X \setminus A = \bigcup_{k=1}^{n} A_k$, missä joukot $A_k \in \mathcal{P}$ ovat erillisiä.

Otetaan käyttöön merkintä

$$\bigsqcup_{i=1} A_i$$

tarkoittamaan pistevieraiden joukkojen A_i yhdistettä.

Lemma 1.39. *Olkoon $\mathcal{P}$ puolialgebra. Tällöin*

$$\bar{\mathcal{P}} = \{\bigsqcup_{i=1}^{n} A_i \colon A_i \in \mathcal{P}, i \in \mathbb{N}\}$$

on algebra (ns. $\mathcal{P}$:n virittämä algebra*).*

Todistus.

(i) $\emptyset \in \bar{\mathcal{P}}$.

(ii) Olkoot $A, B \in \bar{\mathcal{P}}$, jolloin

$$A = \bigsqcup_{i=1}^{n} A_i, \quad B = \bigsqcup_{j=1}^{m} B_j, \quad A_i, B_j \in \mathcal{P}.$$

Silloin

$$A \cap B = \bigsqcup_{i,j} A_i \cap B_j$$

ja $A_i \cap B_j \in \mathcal{P}$, joten $A \cap B \in \bar{\mathcal{P}}$.

(iii) Olkoon $A = \bigsqcup_{i=1}^n A_i \in \bar{\mathcal{P}},\ A_i \in \mathcal{P}$. Koska $\mathcal{P}$ on puolialgebra, niin $X \setminus A_i = \bigsqcup_{j=1}^m B_j,\ B_j \in \mathcal{P}$, ja siksi $X \setminus A_i \in \bar{\mathcal{P}}$. Näin ollen (ii)-kohdan nojalla

$$X \setminus \bigsqcup_{i=1}^n A_i = \bigcap_{i=1}^n \underbrace{(X \setminus A_i)}_{\in \bar{\mathcal{P}}} \in \bar{\mathcal{P}}.$$

□

Määritelmä 1.40. Jos $\mathcal{A}$ on algebra ja $\mu\colon \mathcal{A} \to [0, +\infty]$ on σ-additiivinen s.e. $\mu(\emptyset) = 0$, niin μ on *mitta algebralla* $\mathcal{A}$.

Lemma 1.41. *Olkoon $\mathcal{P}$ puolialgebra ja $\mu\colon \mathcal{P} \to [0, +\infty]$ σ-additiivinen s.e. $\mu(\emptyset) = 0$. Silloin on olemassa yksikäsitteinen mitta $\bar{\mu}$ algebralla $\bar{\mathcal{P}}$,*

$$\bar{\mu}\colon \bar{\mathcal{P}} \to [0, +\infty],$$

jolle pätee

$$\bar{\mu}(A) = \mu(A) \quad \forall A \in \mathcal{P}.$$

Todistus. Olkoon $A \in \bar{\mathcal{P}}$, jolloin

$$A = \bigsqcup_{i=1}^n A_i, \quad A_i \in \mathcal{P}.$$

Asetetaan

$$\bar{\mu}(A) = \sum_{i=1}^n \mu(A_i). \tag{1.42}$$

1. $\bar{\mu}$ on hyvin määritelty: Olkoon $A = \bigsqcup_{i=1}^n A_i = \bigsqcup_{j=1}^m B_j$. Silloin

$$\begin{aligned} B_j &= B_j \cap A = \bigsqcup_{i=1}^n (B_j \cap A_i) \ \text{ ja} \\ A_i &= A_i \cap A = \bigsqcup_{j=1}^m (A_i \cap B_j), \end{aligned}$$

joten

$$\sum_j \mu(B_j) \overset{\sigma\text{-add.}}{=} \sum_{j,i} \mu(B_j \cap A_i) \overset{\sigma\text{-add.}}{=} \sum_i \mu(A_i).$$

2. $\bar{\mu}$ on mitta algebralla $\bar{\mathcal{P}}$: Selvästi $\bar{\mu}(\emptyset) = 0$. Olkoot $A_i \in \bar{\mathcal{P}},\ i \in \mathbb{N}$, s.e. $A = \bigsqcup_{i=1}^\infty A_i \in \bar{\mathcal{P}}$. On osoitettava, että

$$\bar{\mu}(A) = \sum_{i=1}^\infty \bar{\mu}(A_i).$$

Kirjoitetaan $A_i = \bigsqcup_{j=1}^{n_i} A_{ij}$, missä $A_{ij} \in \mathcal{P}$. Siten

$$A = \bigsqcup_{i,j} A_{ij}, \quad A_{ij} \in \mathcal{P}.$$

Toisaalta $A \in \bar{\mathcal{P}}$, joten

$$A = \bigsqcup_{k=1}^{n} B_k, \quad B_k \in \mathcal{P},$$

jolloin

$$B_k = A \cap B_k = \bigsqcup_{i,j} A_{ij} \cap B_k.$$

Tässä $A_{ij} \cap B_k \in \mathcal{P}$, koska $\mathcal{P}$ on puolialgebra. Nyt μ:n σ-additiivisuudesta seuraa, että

$$\mu(B_k) = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{n_i} \mu(A_{ij} \cap B_k) \quad \text{ja} \quad \mu(A_{ij}) = \sum_{k=1}^{n} \mu(A_{ij} \cap B_k).$$

Niinpä

$$\begin{aligned}
\bar{\mu}(A) &\overset{(1.42)}{=} \sum_{k=1} \mu(B_k) \\
&= \sum_{k=1}^{n} \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{n_i} \mu(A_{ij} \cap B_k) \\
&\overset{(*)}{=} \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{n_i} \underbrace{\sum_{k=1}^{n} \mu(A_{ij} \cap B_k)}_{=\mu(A_{ij})} \\
&= \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{n_i} \mu(A_{ij}) \\
&\overset{(1.42)}{=} \sum_{i=1}^{\infty} \bar{\mu}(A_i), \quad \text{sillä } A_i = \bigsqcup_{j=1}^{n_i} A_{ij}, \ A_{ij} \in \mathcal{P}.
\end{aligned}$$

(Yhtälö $(*)$ pätee, koska kyseessä on positiivitermiset sarjat.)

3. Yksikäsitteisyys: Olkoot $\bar{\nu}$ ja $\bar{\mu}$ mittoja algebralla $\bar{\mathcal{P}}$ s.e.

$$\bar{\nu}(A) = \bar{\mu}(A) = \mu(A) \quad \forall A \in \mathcal{P}. \tag{1.43}$$

Väitämme, että $\bar{\nu}(A) = \bar{\mu}(A)$ kaikilla $A \in \bar{\mathcal{P}}$. Olkoon $A \in \bar{\mathcal{P}}$ ja kirjoitetaan

$$A = \bigsqcup_{i=1}^{n} A_i, \quad A_i \in \mathcal{P}.$$

Silloin $\bar{\nu}$:n ja $\bar{\mu}$:n σ-additiivisuudesta sekä (1.43):sta seuraa, että

$$\bar{\nu}(A) = \sum_{i=1}^{n} \bar{\nu}(A_i) = \sum_{i=1}^{n} \mu(A_i) = \sum_{i=1}^{n} \bar{\mu}(A_i) = \bar{\mu}(A).$$

□

Lause 1.44 (Carathéodory-Hahn laajennuslause)**.** *Olkoon $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$ algebra ja $\mu \colon \mathcal{A} \to [0, +\infty]$ mitta algebralla $\mathcal{A}$.*

(a) *Silloin on olemassa mitta* $\nu\colon \sigma(\mathcal{A}) \to [0,+\infty]$ *s.e.* $\nu|\mathcal{A} = \mu$.

(b) *Jos* μ *on* σ*-äärellinen* $\mathcal{A}$*:n suhteen (so.* $X = \bigcup_{i=1}^\infty A_i$, $A_i \in \mathcal{A}$, $\mu(A_i) < \infty$*), niin* ν *on yksikäsitteinen.*

Todistus. Määritellään $\tilde{\nu}\colon \mathcal{P}(X) \to [0,+\infty]$ asettamalla

$$\tilde{\nu}(E) = \inf\{\sum_{i=1}^\infty \mu(A_i)\colon E \subset \bigcup_{i=1}^\infty A_i,\ A_i \in \mathcal{A}\ \forall i\}.$$

1. Tällöin $\tilde{\nu}$ on ulkomitta ja $\tilde{\nu}(A) = \mu(A)$ jokaisella $A \in \mathcal{A}$. (HT 2/4)
2. Jokainen $A \in \mathcal{A}$ on $\tilde{\nu}$-mitallinen. (HT 2/5)
3. Jos $\mathcal{M}$ on $\tilde{\nu}$-mitallisten joukkojen perhe, niin $\tilde{\nu}|\mathcal{M}$ on mitta (Lause 1.15). Kohdan 2. nojalla $\sigma(\mathcal{A}) \subset \mathcal{M}$ ja siten $\nu = \tilde{\nu}|\sigma(\mathcal{A})$ on etsitty mitta.
4. Yksikäsitteisyyttä varten oletetaan, että $\nu_1, \nu_2\colon \sigma(\mathcal{A}) \to [0,+\infty]$ ovat mittoja s.e.

$$\nu_1(A) = \nu_2(A) = \mu(A)$$

kaikilla $A \in \mathcal{A}$. Jos $A \in \mathcal{A}$ ja $\mu(A) < \infty$, niin Lauseen 1.34 mukaan

$$\nu_1(A \cap B) = \nu_2(A \cap B)$$

kaikilla $B \in \sigma(\mathcal{A})$. Valitaan joukot $A_i \in \mathcal{A}$ s.e. $A_1 \subset A_2 \subset \cdots, \mu(A_i) < \infty$ ja $X = \bigcup_{i=1}^\infty A_i$. Koska ν_1 ja ν_2 ovat mittoja $\sigma(\mathcal{A})$:ssa, niin kaikilla $B \in \sigma(\mathcal{A})$ pätee

$$\nu_1(B) = \lim_{i\to\infty} \nu_1(B \cap A_i) = \lim_{i\to\infty} \nu_2(B \cap A_i) = \nu_2(B)$$

eli $\nu_1 = \nu_2$. □

1.45 Tulomitta

Sovelletaan Carathéodory-Hahn laajennuslausetta tulomitan konstruoimiseen. Olkoot $(X, \mathcal{M}, \mu)$ ja $(Y, \mathcal{N}, \nu)$ mitta-avaruuksia ja

$$\mathcal{S} = \{A \times B\colon A \in \mathcal{M},\ B \in \mathcal{N}\} \subset \mathcal{P}(X \times Y)$$

ns. *mitallisten suorakaiteiden* perhe.

Lemma 1.46. $\mathcal{S}$ *on puolialgebra.*

Todistus.

(a) Selvästi $\emptyset \in \mathcal{S}$.

(b) Jos $A \times B \in \mathcal{S}$ ja $A' \times B' \in \mathcal{S}$, niin $(A \times B) \cap (A' \times B') = (A \cap A') \times (B \cap B') \in \mathcal{S}$.

(c) Jos $A \times B \in \mathcal{S}$, niin sen komplementti

$$(A \times B)^c = (\underbrace{A^c \times B}_{\in\mathcal{S}}) \sqcup (\underbrace{A \times B^c}_{\in\mathcal{S}}) \sqcup (\underbrace{A^c \times B^c}_{\in\mathcal{S}})$$

on vaadittua tyyppiä. □

Määritellään $\lambda\colon \mathcal{S} \to [0,+\infty]$ asettamalla

$$\lambda(A \times B) = \mu(A)\nu(B). \tag{1.47}$$

Selvästi $\lambda(\emptyset) = 0$. Osoitetaan seuraavaksi, että λ on σ-additiivinen $\mathcal{S}$:ssä.

Lemma 1.48. *Jos $A_i \times B_i \in \mathcal{S}$, $i \in \mathbb{N}$, ovat erillisiä s.e.*

$$\bigsqcup_{i=1}^{\infty}(A_i \times B_i) = A \times B \in \mathcal{S},$$

niin

$$\sum_{i=1}^{\infty} \lambda(A_i \times B_i) = \lambda(A \times B).$$

Todistus. On siis osoitettava, että

$$\mu(A)\nu(B) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i)\nu(B_i).$$

Kiinnitetään $x \in A$ ja merkitään $I(x) = \{i \in \mathbb{N}\colon x \in A_i\}$. Silloin

$$B = \bigsqcup_{i \in I(x)} B_i$$

ja siten

$$\nu(B) = \sum_{i \in I(x)} \nu(B_i).$$

Näin ollen kaikilla $x \in X$ pätee

$$\begin{aligned}
\chi_A(x)\nu(B) &= \chi_A(x) \sum_{i \in I(x)} \nu(B_i) \\
&= \chi_A(x) \sum_{i \in I(x)} \chi_{A_i}(x)\nu(B_i) \\
&= \chi_A(x) \sum_{i=1}^{\infty} \chi_{A_i}(x)\nu(B_i) \\
&= \sum_{i=1}^{\infty} \chi_{A_i}(x)\nu(B_i).
\end{aligned}$$

Koska positiivitermisen sarjan voi integroida termeittäin (Mitta ja integraali, Lause 3.20), niin

$$\begin{aligned}
\mu(A)\nu(B) &= \int_X \chi_A(x)\nu(B)\, d\mu(x) \\
&= \int_X \sum_{i=1}^{\infty} \chi_{A_i}(x)\nu(B_i)\, d\mu(x) \\
&= \sum_{i=1}^{\infty} \int_X \chi_{A_i}(x)\nu(B_i)\, d\mu(x) \\
&= \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i)\nu(B_i).
\end{aligned}$$

□

Lause 1.49. *Olkoot $(X,\mathcal{M},\mu)$ ja $(Y,\mathcal{N},\nu)$ σ-äärellisiä mitta-avaruuksia ja $\mathcal{S}\subset\mathcal{P}(X\times Y)$ mitallisten suorakaiteiden perhe. Silloin mitallisella avaruudella $\big(X\times Y,\sigma(\mathcal{S})\big)$ on olemassa 1-käsitteinen mitta $\mu\times\nu$, ns. μ:n ja ν:n* tulomitta*, siten, että*

$$(\mu\times\nu)(A\times B)=\lambda(A\times B)=\mu(A)\nu(B)$$

kaikilla $A\in\mathcal{M}$ ja $B\in\mathcal{N}$.

Todistus. Koska λ on σ-additiivinen puolialgebralla $\mathcal{S}$ ja $\lambda(\emptyset)=0$, niin Lemman 1.41 nojalla on olemassa yksikäsitteinen mitta $\bar\lambda$ algebralla $\bar{\mathcal{S}}$ s.e. $\bar\lambda(A\times B)=\lambda(A\times B)$ kaikilla $A\times B\in\mathcal{S}$. Lisäksi μ:n ja ν:n σ-äärellisyydestä seuraa, että $\bar\lambda$ on σ-äärellinen $\bar{\mathcal{S}}$:n suhteen. Väite seuraa nyt Carathéodory-Hahnin laajennuslauseesta. □

Palautetaan mieliin Reaalianalyysi I:stä, että mitta mitta-avaruus $(X,\mathcal{M},\mu)$ on *täydellinen*, jos nollamittaisten joukkojen osajoukot ovat mitallisia. Toisin sanoen, jos $A\subset B\in\mathcal{M}$ ja $\mu(B)=0$, niin $A\in\mathcal{M}$. Mitta voidaan aina täydentää (ks. Reaalianalyysi I, Lause 1.12):

Lause 1.50. *Olkoon $(X,\mathcal{M},\mu)$ mitta-avaruus. Määritellään $\bar{\mathcal{M}}\subset\mathcal{P}(X)$ asettamalla*

$$\bar{\mathcal{M}}=\{A\cup F\colon A\in\mathcal{M} \text{ ja } F\subset E \text{ jollakin } E\in\mathcal{M},\ \mu(E)=0\}\,.$$

ja määritellään $\bar\mu\colon\bar{\mathcal{M}}\to[0,+\infty]$,

$$\bar\mu(A\cup F)=\mu(A)\,,$$

missä A ja F kuten yllä. Tällöin

(1) $\bar{\mathcal{M}}$ on σ-algebra X:ssä;

(2) $\bar\mu$ on täydellinen mitta;

(3) $\mu=\bar\mu|\mathcal{M}$.

Mitta $\bar\mu$ on nimeltään μ:n täydentymä*. Vastaavasti $(X,\bar{\mathcal{M}},\bar\mu)$ on mitta-avaruuden $(X,\mathcal{M},\mu)$ täydentymä.*

Huomautus 1.51.

1. Jos $\tilde\mu$ on ulkomitta X:ssä, niin sen määrämä mitta-avaruus $(X,\mathcal{M}_{\tilde\mu},\mu)$ on täydellinen.
2. Jos $\tilde\mu$ on Borel-säännöllinen metrinen ulkomitta, niin sen määrämä mitta-avaruus $(X,\mathcal{M}_{\tilde\mu},\mu)$ on $(X,\mathrm{Bor}(X),\mu)$:n täydellistymä.
3. Jos $(X,\mathcal{M},\mu)$ ja $(Y,\mathcal{N},\nu)$ ovat täydellisiä σ-äärellisiä mitta-avaruuksia, niin tulomitta-avaruus $(X\times Y,\sigma(\mathcal{S}),\mu\times\nu)$ ei välttämättä ole täydellinen. Esimerkiksi, jos $A\in\mathcal{M},\ A\neq\emptyset,\ \mu(A)=0$ ja $B\subset Y,\ B\notin\mathcal{N}$, niin $A\times B\subset A\times Y$, $\mu(A\times Y)=0$, mutta $A\times B\notin\sigma(\mathcal{S})$ (ks. Lemma 1.53). Erityisesti, Lebesguen mittojen m_n ja m_k tulomitta $(\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^k,\sigma(\mathcal{S}),m_n\times m_k)$ ei ole täydellinen, joten $m_n\times m_k\neq m_{n+k}$. Sen sijaan m_{n+k} on $m_n\times m_k$:n täydentymä.

1.52 Fubinin lause

Olkoot $(X,\mathcal{M},\mu)$ ja $(Y,\mathcal{N},\nu)$ σ-äärellisiä mitta-avaruuksia ja $\mu\times\nu$ Lauseen 1.49 antama tulomitta. Tutkimme kysymystä, millaisille funktioille $f\colon X\times Y\to\dot{\mathbb{R}}$ pätee:

$$\int_{X\times Y}f(x,y)\,d(\mu\times\nu)(x,y)=\int_X\left(\int_Y f(x,y)\,d\nu(y)\right)\,d\mu(x)=\int_Y\left(\int_X f(x,y)\,d\mu(x)\right)\,d\nu(y)?$$

Olkoon $E \subset X \times Y$. Merkitään

$$\begin{aligned} E_x &= \{y \in Y : (x,y) \in E\}, \quad x \in X, \\ E^y &= \{x \in X : (x,y) \in E\}, \quad x \in Y. \end{aligned}$$

Lemma 1.53. *Jos $E \in \sigma(\mathcal{S})$, niin $E_x \in \mathcal{N}$ ja $E^y \in \mathcal{M}$ kaikilla $x \in X$ ja $y \in Y$.*

Todistus. Olkoon $\mathcal{C} = \{E \in \sigma(\mathcal{S}) : E_x \in \mathcal{N} \quad \forall x \in X\}$. Riittää osoittaa, että $\mathcal{C}$ on σ-algebra s.e. $\mathcal{S} \subset \mathcal{C}$. Tällöin nimittäin on oltava $\mathcal{C} = \sigma(\mathcal{S})$ (ja E_x:iä koskeva väite pätee), koska $\sigma(\mathcal{S})$ on pienin $\mathcal{S}$:n sisältämä σ-algebra. Joukkoja E^y koskeva väite todistetaan samoin.

Olkoon $A \times B \in \mathcal{S}$. Koska $(A \times B)_x = B \in \mathcal{N}$, jos $x \in A$, ja $(A \times B)_x = \emptyset \in \mathcal{N}$, jos $x \notin A$, niin $A \times B \in \mathcal{C}$. Siis $\mathcal{S} \subset \mathcal{C}$. Osoitetaan sitten, että $\mathcal{C}$ on σ-algebra.

(i) Selvästi $\emptyset \in \mathcal{C}$.

(ii) Havaitaan, että $(E^c)_x = (E_x)^c$. Siten

$$\begin{aligned} E \in \mathcal{C} &\Rightarrow E_x \in \mathcal{N} \quad \forall x \in X \\ &\Rightarrow (E_x)^c \in \mathcal{N} \quad \forall x \in X \\ &\Rightarrow (E^c)_x \in \mathcal{N} \quad \forall x \in X \\ &\Rightarrow E^c \in \mathcal{C}. \end{aligned}$$

(iii) Nyt havaitaan, että $(\cup_i E_i)_x = \cup_i (E_i)_x$. Siten

$$E_i \in \mathcal{C},\ i \in \mathbb{N} \ \Rightarrow \ \bigcup_i E_i \in \mathcal{C}.$$

□

Olkoon $f : X \times Y \to \dot{\mathbb{R}}$. Määritellään jokaisella $x \in X$ ja jokaisella $y \in Y$ funktiot $f_x : Y \to \dot{\mathbb{R}}$ ja $f^y : X \to \dot{\mathbb{R}}$ asettamalla

$$\begin{aligned} f_x(y) &= f(x,y), \\ f^y(x) &= f(x,y). \end{aligned}$$

Lemma 1.54. *Jos $f : X \times Y \to \dot{\mathbb{R}}$ on $\mu \times \nu$-mitallinen, niin silloin*

(a) f_x on ν-mitallinen jokaisella $x \in X$,

(b) f^y on μ-mitallinen jokaisella $y \in Y$.

Todistus. Jos $U \subset \mathbb{R}$ on avoin, niin $f^{-1}U \in \sigma(\mathcal{S})$, koska f on $\mu \times \nu$-mitallinen. Samoin joukot $f^{-1}(+\infty) \in \sigma(\mathcal{S})$ ja $f^{-1}(-\infty) \in \mathcal{S}$. Jos E on mikä tahansa yo. joukoista $f^{-1}U$, $f^{-1}(+\infty)$, tai $f^{-1}(-\infty)$, niin Lemman 1.53 mukaan $f_x^{-1}U$, $\big(f_x^{-1}(+\infty)$, tai $f_x^{-1}(-\infty)\big) = E_x$ on ν-mitallinen. Samoin $(f^y)^{-1}U$, $\big((f^y)^{-1}(+\infty)$, tai $(f^y)^{-1}(-\infty)\big) = E^y$ on μ-mitallinen. □

Lemma 1.55. *Jos $E \in \sigma(\mathcal{S})$, niin*

$$g : X \to [0, +\infty], \quad g(x) = \nu(E_x),$$

on μ-mitallinen ja

$$f : Y \to [0, +\infty], \quad f(y) = \mu(E^y),$$

on ν-mitallinen. Lisäksi

$$\int_X g(x)\, d\mu(x) = \int_Y f(y)\, d\nu(y) = (\mu \times \nu)(E).$$

Todistus. Osoitetaan, että perhe

$$\mathcal{F} = \left\{ E \in \sigma(\mathcal{S}) \colon x \mapsto \nu(E_x) \ \mu\text{-mitallinen ja } \int \nu(E_x)\, d\mu(x) = (\mu \times \nu)(E) \right\}$$

on σ-algebra, joka sisältää $\mathcal{S}$:n. Tällöin $\mathcal{F} = \sigma(\mathcal{S})$ ja funktiota g, $g(x) = \nu(E_x)$, koskevat väitteet pätee. Samoin todistetaan f:ää koskevat väitteet.

Jos $E = A \times B \in \mathcal{S}$, niin

$$E_x = \begin{cases} B, & \text{jos } x \in A; \\ \emptyset, & \text{jos } x \notin A, \end{cases}$$

jolloin

$$\nu(E_x) = \nu(B)\chi_A(x)$$

ja siten $x \mapsto \nu(E_x)$ on μ-mitallinen ja

$$\int_X \nu(E_x)\, d\mu(x) = \nu(B) \int_X \chi_A\, d\mu = (\mu \times \nu)(A \times B).$$

(Huom. $x \mapsto \chi_A(x)$ on μ-mitallinen, sillä $A \in \mathcal{M}$.) Näin ollen $\mathcal{S} \subset \mathcal{F}$. Dynkinin lemman (Lause 1.33) nojalla riittää osoittaa, että $\mathcal{F}$ on d-systeemi, sillä silloin $\sigma(\mathcal{S}) = \mathcal{F}$. On siis näytettävä, että

(i) $X \times Y \in \mathcal{F}$,

(ii) $E, F \in \mathcal{F},\ E \subset F \ \Rightarrow \ F \setminus E \in \mathcal{F}$,

(iii) $E_i \subset E_2 \subset \cdots,\ E_i \in \mathcal{F} \ \Rightarrow \ \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i \in \mathcal{F}$.

Todistetaan nämä järjestyksessä (i), (iii), (ii).

(i) Edellä näimme, että $\mathcal{S} \subset \mathcal{F}$, joten $X \times Y \in \mathcal{F}$.

(iii) Olkoon $E_i \subset E_2 \subset \cdots$, $E_i \in \mathcal{F}$, ja $E = \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i$. Funktiot $x \mapsto \nu(E_{ix})$ ovat mitallisia. Lisäksi $E_{1x} \subset E_{2x} \subset \cdots$ ja $E_x = \bigcup_{i=1}^{\infty} E_{ix}$, joten $\nu(E_x) = \lim_{i\to\infty} \nu(E_{ix})$ ja $x \mapsto \nu(E_x)$ on mitallisten funktioiden rajafunktiona mitallinen. Edelleen $\nu(E_{1x}) \le \nu(E_{2x}) \le \cdots$, joten monotonisen konvergenssin lauseen nojalla

$$\begin{aligned}(\mu \times \nu)(E) &\overset{1.10}{=} \lim_{i\to\infty} (\mu \times \nu)(E_i) \\ &\overset{E_i \in \mathcal{F}}{=} \lim_{i\to\infty} \int_X \nu(E_{ix})\, d\mu(x) \\ &\overset{\text{MKL}}{=} \int_X \lim_{i\to\infty} \nu(E_{ix})\, d\mu(x) \\ &= \int_X \nu(E_x)\, d\mu(x).\end{aligned}$$

Näin ollen $E \in \mathcal{F}$.

(ii) Koska X ja Y ovat σ-äärellisiä, on olemassa joukot

$$X_1 \subset X_2 \subset \cdots,\ X_i \in \mathcal{M},\ \mu(X_i) < \infty,\ X = \bigcup_{i=1}^{\infty} X_i, \quad \text{ja}$$

$$Y_1 \subset Y_2 \subset \cdots,\ Y_i \in \mathcal{N},\ \nu(Y_i) < \infty,\ Y = \bigcup_{i=1}^{\infty} Y_i.$$

Olkoon

$$\mathcal{E} = \{E \in \sigma(\mathcal{S})\colon E \cap (X_i \times Y_i) \in \mathcal{F}\ \forall i \in \mathbb{N}\}$$

ja osoitetaan, että $\mathcal{E}$ on σ-algebra, joka sisältää $\mathcal{S}$:n. Tällöin $\mathcal{E} = \sigma(\mathcal{S})$ eli $E \cap (X_i \times Y_i) \in \mathcal{F}$ kaikilla $i \in \mathbb{N}$ ja kaikilla $E \in \sigma(\mathcal{S})$. Jos $E = A \times B \in \mathcal{S}$, niin $E \cap (X_i \times Y_i) \in \mathcal{S}$ kaikilla i. Todistuksen alkuosan nojalla $E \cap (X_i \times Y_i) \in \mathcal{F}$ kaikilla i, joten $\mathcal{S} \subset \mathcal{E}$. Erityisesti siis $X \times Y \in \mathcal{E}$. Osoitetaan, että $\mathcal{E}$ on d-systeemi. Jos $E_j \in \mathcal{E},\ E_j \subset E_{j+1}$, niin todistuksen (iii)-osan mukaan

$$\big(\cup_j E_j\big) \cap (X_i \times Y_i) = \cup_j \big(E_j \cap (X_i \times Y_i)\big) \in \mathcal{F} \quad \forall i,$$

joten $\cup_j E_j \in \mathcal{E}$. Oletetaan sitten, että $E, F \in \mathcal{E},\ E \subset F$. Merkitään

$$\begin{aligned} E_i &= E \cap (X_i \times Y_i) \quad \text{ja} \\ F_i &= F \cap (X_i \times Y_i), \end{aligned}$$

jolloin $E_i,\ F_i \in \mathcal{F}\ \forall i$ ja

$$F_i \setminus E_i = (F \setminus E) \cap (X_i \times Y_i).$$

Osoitetaan, että $F_i \setminus E_i \in \mathcal{F}$ kaikilla $i \in \mathbb{N}$. Jokaisella $x \in X$ pätee

$$\nu((F_i \setminus E_i)_x) = \nu(F_{ix} \setminus E_{ix}) = \nu(F_{ix}) - \nu(E_{ix}),$$

sillä $E_{ix} \subset F_{ix}$ ja $\nu(E_{ix}) < \infty$. Tästä päätellään, että

$$x \mapsto \nu((F_i \setminus E_i)_x)$$

on μ-mitallinen ja

$$\begin{aligned} \int_X \nu((F_i \setminus E_i)_x)\, d\mu(x) &= \int_X \nu(F_{ix})\, d\mu(x) - \int_X \nu(E_{ix})\, d\mu(x) \\ &= (\mu \times \nu)(F_i) - (\mu \times \nu)(E_i) \\ &= (\mu \times \nu)(F_i \setminus E_i). \end{aligned}$$

Siten $F_i \setminus E_i \in \mathcal{F}\ \forall i$. Olemme näyttäneet, että $\mathcal{E} = \sigma(\mathcal{S})$ ja siten $\mathcal{F} \subset \mathcal{E}$.

Olkoon sitten $E, F \in \mathcal{F},\ E \subset F$. Haluamme näyttää, että $F \setminus E \in \mathcal{F}$, jolloin olemme lopulta osoittaneet, että $\mathcal{F} = \sigma(\mathcal{S})$. Koska $F_i \setminus E_i \subset F_{i+1} \setminus E_{i+1}$ ja

$$F \setminus E = \bigcup_{i=1}^{\infty} \underbrace{F_i \setminus E_i}_{\in \mathcal{F}},$$

seuraa (iii)-kohdasta, että $F \setminus E \in \mathcal{F}$.

$\square$

Lause 1.56 (Tonelli)**.** *Olkoon* $f\colon X \times Y \to [0, +\infty]$ $\mu \times \nu$*-mitallinen. Tällöin pätee:*

(1) Kaikilla $(x_0, y_0) \in X \times Y$

$$\begin{aligned} &x \mapsto f(x, y_0) \ \textit{on } \mu\textit{-mitallinen ja} \\ &y \mapsto f(x_0, y) \ \textit{on } \nu\textit{-mitallinen.} \end{aligned}$$

(2)

$$x \mapsto \int_Y f(x,y)\,d\nu(y) \text{ on } \mu\text{-mitallinen ja}$$
$$y \mapsto \int_X f(x,y)\,d\mu(x) \text{ on } \nu\text{-mitallinen.}$$

(3)

$$\begin{aligned}\int_X \left(\int_Y f(x,y)\,d\nu(y)\right) d\mu(x) &= \int_{X\times Y} f(x,y)\,d(\mu\times\nu)(x,y)\\ &= \int_Y \left(\int_X f(x,y)\,d\mu(x)\right) d\nu(y).\end{aligned}$$

Todistus.

(a) Jos $E \in \sigma(\mathcal{S})$, niin väite pätee ($\mu \times \nu$-mitalliselle) funktiolle $f = \chi_E$ Lemmojen 1.54 ja 1.55 nojalla.

(b) Lineaarisuuden nojalla väite pätee ($\sigma(\mathcal{S})$:n suhteen) yksinkertaisille funktioille

$$f = \sum_{i=1}^{k} a_i \chi_{E_i}, \quad E_i \in \sigma(\mathcal{S}).$$

(c) Jos $f\colon X\times Y \to [0,+\infty]$ on $\mu\times\nu$-mitallinen, niin on olemassa kasvava jono ($\sigma(\mathcal{S})$:n suhteen) yksinkertaisia funktioita $s_i \nearrow f$ s.e.

$$\int_{X\times Y} s_i\,d(\mu\times\nu) \to \int_{X\times Y} f\,d(\mu\times\nu).$$

Koska $s_i \nearrow f$, niin $s_{ix} \nearrow f_x$ ja $s_i^y \nearrow f^y$ kaikilla $(x,y) \in X\times Y$. Siten monotonisen konvergenssin lauseen nojalla

$$\int_Y s_{ix}\,d\nu(y) \to \int_Y f_x\,d\nu(y) \quad \text{ja}$$
$$\int_X s_i^y\,d\mu(x) \to \int_X f^y\,d\mu(x).$$

"Rajafunktion mitallisuudesta" seuraa nyt, että funktiot

$$\begin{aligned}&x \mapsto f^y(x) = f(x,y),\\ &y \mapsto f_x(y) = f(x,y),\\ &x \mapsto \int_Y f_x(y)\,d\nu(y) = \int_Y f(x,y)\,d\nu(y) \quad \text{ja}\\ &y \mapsto \int_X f^y(x)\,d\mu(x) = \int_X f(x,y)\,d\mu(x)\end{aligned}$$

ovat mitallisia eli väitteet (1) ja (2) pätevät. Jos

$$g_i(x) = \int_Y s_{ix}\,d\nu(y),$$

niin $g_i \leq g_{i+1}$, joten MKL:n nojalla

$$\int_X \left(\int_Y s_{ix} \, d\nu(y) \right) d\mu(x) \to \int_X \left(\int_Y f_x \, d\nu(y) \right) d\mu(x) = \int_X \left(\int_Y f(x,y) \, d\nu(y) \right) d\mu(x).$$

Toisaalta

$$\int_X \left(\int_Y s_{ix} \, d\nu(y) \right) d\mu(x) \overset{(b)}{=} \int_{X \times Y} s_i \, d(\mu \times \nu) \to \int_{X \times Y} f \, d(\mu \times \nu),$$

joten vasen yhtälö (3):ssa pätee. Samoin todistetaan (3):n oikeanpuoleinen yhtälö.

□

Huomautus 1.57. Edellä olleet tulokset on muotoiltu tulomitalle $\mu \times \nu$ ja $(\mu \times \nu)$-mitallisille funktioille. Niitä *ei* voi suoraan soveltaa täydelliseen mitta-avaruuteen $(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k, \mathrm{Leb}(\mathbb{R}^{n+k}), m_{n+k})$. Esimerkiksi Lemmat 1.53 ja 1.54 *eivät* päde mitta-avaruudelle $(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k, \mathrm{Leb}(\mathbb{R}^{n+k}), m_{n+k})$. Jos nimittäin $B \subset \mathbb{R}^k$ on ei-mitallinen (m_k:n suhteen), niin $E = \{x\} \times B$ on m_{n+k}-mitallinen kaikilla $x \in \mathbb{R}^n$, sillä $m^*_{n+k}(E) = 0$. Toisaalta $B = E_x$, josta näemme, ettei Lemman 1.53 väite päde. Tonellin lauseessa voidaan mitta-avaruuden $(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k, \mathrm{Leb}(\mathbb{R}^{n+k}), m_{n+k})$ tapauksessa vaatia ehto (1) vain m.k. x_0 ja m.k. y_0.

Lause 1.58 (Fubini)**.** *Olkoon $f \colon X \times Y \to \dot{\mathbb{R}}$ $\mu \times \nu$-mitallinen ja oletetaan, että ainakin yksi integraaleista*

$$\int_{X \times Y} |f| \, d(\mu \times \nu), \quad \int_X \left(\int_Y |f(x,y)| \, d\nu(y) \right) d\mu(x), \quad \textit{tai}$$
$$\int_Y \left(\int_X |f(x,y)| \, d\mu(x) \right) d\nu(y)$$

on äärellinen. Tällöin

(1) $y \mapsto f(x,y)$ on integroituva Y:ssä melkein kaikilla $x \in X$;

(2) $x \mapsto f(x,y)$ on integroituva X:ssä melkein kaikilla $y \in Y$;

(3) $x \mapsto \int_Y f(x,y) \, d\nu(y)$ on integroituva X:ssä, t.s.

$$\int_X \left| \int_Y f(x,y) \, d\nu(y) \right| d\mu(x) < \infty\,;$$

(4) $y \mapsto \int_X f(x,y) \, d\mu(x)$ on integroituva Y:ssä;

(5) f on integroituva $X \times Y$:ssä ja

$$\int_{X \times Y} f \, d(\mu \times \nu) = \int_X \left(\int_Y f(x,y) \, d\nu(y) \right) d\mu(x) = \int_Y \left(\int_X f(x,y) \, d\mu(x) \right) d\nu(y) < \infty.$$

Todistus. Kuten Mitta ja integraali, Lause 4.3 (Fubini 2.) □

2 Hausdorffin mitat

2.1 Hausdorffin mitan perusominaisuudet

Lebesguen n-ulotteinen mitta m_n sopii hyvin $\mathbb{R}^n$:n "suurien" osajoukkojen koon mittaamiseen, mutta se on liian karkea mittari $\mathbb{R}^n$:n "pieniä" joukkoja varten. Esimerkiksi, m_2 ei pysty erottamaan tason $\mathbb{R}^2$ yksiötä suorasta, sillä ne molemmat ovat nollamittaisia.

Tässä luvussa esittelemme kokonaisen skaalan "s-ulotteisia" mittoja $\mathcal{H}^s$, $0 \le s < \infty$, jotka pystyvät näkemään joukkojen hienorakennetta Lebesguen mittaa paremmin. Ideana on, että joukko $A \subset \mathbb{R}^n$ on "s-ulotteinen", jos $0 < \mathcal{H}^s(A) < \infty$, vaikka A:n geometria olisi hyvin monimutkainen.

Nämä mitat voidaan määritellä missä tahansa metrisessä avaruudessa (X, d). Oletamme kuitenkin, että X on *separoituva*, s.o. X:ssä on numeroituva tiheä osajoukko $S = \{x_i\}_{i=1}^\infty$, jolloin $X = \bar{S}$. Tätä oletusta tarvitaan vain takaamaan se, että X:llä on olemassa ns. δ-peite jokaisella $\delta > 0$.

Määritelmä 2.2. 1. Epätyhjän joukon $E \subset X$ *halkaisija* on

$$d(E) = \sup_{x,y\in E} d(x,y).$$

2. Numeroituva kokoelma X:n osajoukkoja $\{E_i\}_{i=1}^\infty$ on joukon $A \subset X$ *δ-peite*, $\delta > 0$, jos

$$A \subset \bigcup_{i=1}^\infty E_i \quad \text{ja } d(E_i) \le \delta \ \forall i \in \mathbb{N}.$$

Kiinnitetään "dimensio" $s \in [0, \infty)$ ja $\delta > 0$. Kun $A \subset X$, niin määritellään

$$\mathcal{H}^s_\delta(A) = \inf\Big\{\sum_{i=0}^\infty d(E_i)^s \colon \{E_i\} \text{ on } A\text{:n } \delta\text{-peite}\Big\}, \tag{2.3}$$

missä tehdään sopimukset, että $d(\{x\})^0 = 1 \ \forall x \in X$ ja $d(\emptyset)^s = 0 \ \forall s \ge 0$.

Määritelmästä nähdään välittömästi, että

$$\mathcal{H}^s_{\delta_1}(A) \ge \mathcal{H}^s_{\delta_2}(A),$$

jos $0 < \delta_1 \le \delta_2$. Niinpä allaoleva raja-arvo (2.5) on olemassa ja voimme määritellä.

Määritelmä 2.4. Joukon $A \subset X$ *s-ulotteinen Hausdorffin (ulko)mitta* on

$$\mathcal{H}^s(A) = \lim_{\delta\to 0} \mathcal{H}^s_\delta(A) \quad \Big(= \sup_{\delta>0} \mathcal{H}^s_\delta(A)\Big). \tag{2.5}$$

Lause 2.6. *(i) $\mathcal{H}^s_\delta \colon \mathcal{P}(X) \to [0, +\infty]$ on ulkomitta kaikilla $\delta > 0$.*

(ii) $\mathcal{H}^s \colon \mathcal{P}(X) \to [0, +\infty]$ on metrinen ulkomitta.

Todistus.

(i) (a) Selvästi $\mathcal{H}^s_\delta(\emptyset) = 0$.

(b) Olkoon sitten $A \subset \bigcup_{i=1}^\infty A_i \subset X$. Voidaan olettaa, että $\mathcal{H}^s_\delta(A_i) < \infty \ \forall i$. Olkoon $\varepsilon > 0$ ja valitaan jokaisella i joukon A_i δ-peite $\{E^i_j\}_{j=1}^\infty$ s.e.

$$\sum_{j=1}^\infty d(E^i_j)^s \le \mathcal{H}^s_\delta(A_i) + \varepsilon 2^{-i}.$$

Tällöin $\bigcup_{i,j} E_j^i$ on yhdisteen $\bigcup_{i=1}^\infty A_i$ ja siten myös A:n δ-peite, joten

$$\begin{aligned}\mathcal{H}^s_\delta(A) &\le \sum_{i,j} d(E_j^i)^s \\ &\le \sum_{i=1}^\infty \left(\mathcal{H}^s_\delta(A_i) + \varepsilon 2^{-i}\right) \\ &\le \varepsilon + \sum_{i=1}^\infty \mathcal{H}^s_\delta(A_i).\end{aligned}$$

Antamalla $\varepsilon \to 0$ saadaan haluttu väite.

(ii) Selvästi $\mathcal{H}^s(\emptyset) = 0$. Jos $A \subset \bigcup_{i=1}^\infty A_i \subset X$, niin (i)-kohdan ja $\mathcal{H}^s$:n määritelmän nojalla

$$\mathcal{H}^s_\delta(A) \le \sum_{i=1}^\infty \mathcal{H}^s_\delta(A_i) \le \sum_{i=1}^\infty \mathcal{H}^s(A_i).$$

Antamalla $\delta \to 0$ nähdään, että $\mathcal{H}^s$ on ulkomitta. Olkoot sitten $A_1, A_2 \subset X$ joukkoja, joille $\operatorname{dist}(A_1, A_2) > 0$. Haluamme näyttää, että

$$\mathcal{H}^s(A_1 \cup A_2) = \mathcal{H}^s(A_1) + \mathcal{H}^s(A_2).$$

Riittää osoittaa, että

$$\mathcal{H}^s_\delta(A_1 \cup A_2) \ge \mathcal{H}^s_\delta(A_1) + \mathcal{H}^s_\delta(A_2), \tag{2.7}$$

jos $\delta \le \operatorname{dist}(A_1, A_2)/3$. Voidaan olettaa, että $\mathcal{H}^s_\delta(A_1 \cup A_2) < \infty$. Olkoon $\varepsilon > 0$ ja valitaan joukon $A_1 \cup A_2$ δ-peite $\{E_i\}_{i=1}^\infty$ siten, että

$$\sum_{i=1}^\infty d(E_i)^s \le \mathcal{H}^s_\delta(A_1 \cup A_2) + \varepsilon.$$

Koska $\delta \le \operatorname{dist}(A_1, A_2)/3$, jokainen E_i leikkaa enintään yhtä joukoista A_1 tai A_2. Niinpä voidaan jakaa

$$\{E_i\}_{i=1}^\infty = \{E_i'\}_{i=1}^\infty \sqcup \{E_i''\}_{i=1}^\infty,$$

missä

$$A_1 \subset \bigcup_{i=1}^\infty E_i' \quad \text{ja} \quad A_2 \subset \bigcup_{i=1}^\infty E_i''.$$

Näin ollen

$$\begin{aligned}\mathcal{H}^s_\delta(A_1) + \mathcal{H}^s_\delta(A_2) &\le \sum_{i=1}^\infty d(E_i')^s + \sum_{i=1}^\infty d(E_i'')^s \\ &= \sum_{i=1}^\infty d(E_i)^s \\ &\le \mathcal{H}^s_\delta(A_1 \cup A_2) + \varepsilon.\end{aligned}$$

Koska $\varepsilon > 0$ oli mielivaltainen, saadaan (2.7).

□

Lauseiden 1.18 ja 2.6 mukaan jokainen X:n Borel-joukko on $\mathcal{H}^s$-mitallinen. Merkitsemme $\mathcal{H}^s$:n rajoittumaa $\mathcal{H}^s$-mitallisiin joukkoihin samalla symbolilla $\mathcal{H}^s$. Tällöin siis pätee:

Lause 2.8. *$\mathcal{H}^s$ on Borel-mitta.*

Korollarista 1.29 saadaan nyt:

Korollari 2.9. *Jos $A \subset \mathbb{R}^n$ on $\mathcal{H}^s$-mitallinen ja $\mathcal{H}^s(A) < \infty$, niin $\mathcal{H}^s \llcorner A$ on Radon-mitta.*

Lause 2.10. *Separoituvan metrisen avaruuden X ulkomitta $\mathcal{H}^s$ on Borel-säännöllinen.*

Todistus. Koska edellisen lauseen mukaan $\mathcal{H}^s$:n määräämä mitta on Borel, riittää osoittaa, että jokaista $A \subset X$ kohti on olemassa $B \in \mathrm{Bor}(X)$ s.e. $A \subset B$ ja $\mathcal{H}^s(A) = \mathcal{H}^s(B)$.

Olkoon $A \subset X$. Jos $\mathcal{H}^s(A) = \infty$, voidaan valita $B = X$ ja väite pätee. Jos taas $\mathcal{H}^s(A) < \infty$, niin valitaan A:n $1/i$-peite $\{E_j^i\}_{j=1}^\infty$ jokaisella $i \in \mathbb{N}$ s.e.

$$\sum_{j=1}^\infty d(E_j^i)^s \le \mathcal{H}^s_{1/i}(A) + 1/i.$$

Koska $d(E) = d(\bar{E})$ jokaisella $E \subset X$, voimme olettaa, että joukot E_j^i ovat suljettuja. Tällöin

$$B = \bigcap_{i=1}^\infty \bigcup_{j=1}^\infty E_j^i$$

on Borel joukko ja $A \subset B$. Lisäksi $\{E_j^i\}$ on B:n $1/i$-peite jokaisella $i \in \mathbb{N}$, joten

$$\mathcal{H}^s_{1/i}(A) \le \mathcal{H}^s_{1/i}(B) \le \sum_{j=1}^\infty d(E_j^i)^s \le \mathcal{H}^s_{1/i}(A) + 1/i.$$

Antamalla $i \to \infty$ saadaan väite $\mathcal{H}^s(A) = \mathcal{H}^s(B)$. □

Huomautus 2.11.

1. $\mathcal{H}^0$ on lukumäärämitta.
2. $\mathcal{H}^s_\delta$ ei yleensä ole metrinen ulkomitta.
3. *Karkeasti* ottaen, $\mathcal{H}^1 \sim$ pituusmitta, $\mathcal{H}^2 \sim$ pinta-ala, jne.
4. Helposti nähdään (pian tulevia tuloksia käyttäen), ettei (esim.) taso $\mathbb{R}^2$ ole σ-äärellinen $\mathcal{H}^1$:n suhteen.

2.12 Hausdorff-dimensio

Olkoon (X, d) separoituva metrinen avaruus. Määrittelemme tässä luvussa osajoukoille $A \subset X$ dimension, joka kuvaa A:n (metristä) kokoa. Poiketen esim. topologisesta dimensiosta, tämän dimension ei tarvitse olla kokonaisluku.

Lemma 2.13. *Olkoon $A \subset X$ ja $s \ge 0$.*

(i) Jos $\mathcal{H}^s(A) < \infty$, niin $\mathcal{H}^t(A) = 0$ kaikilla $t > s$.

(ii) Jos $\mathcal{H}^s(A) > 0$, niin $\mathcal{H}^t(A) = \infty$ kaikilla $0 \le t < s$.

Todistus. Riittää todistaa (i), sillä väite (ii) seuraa (i):stä. Olkoon $\delta > 0$ ja $\{E_j\}_{j=1}^\infty$ A:n δ-peite s.e.

$$\sum_{j=1}^\infty d(E_j)^s \le \mathcal{H}^s_\delta(A) + 1 \le \mathcal{H}^s(A) + 1 < \infty.$$

Silloin kaikilla $t > s$

$$\begin{aligned}\mathcal{H}^t_\delta(A) &\le \sum_{j=1}^\infty d(E_j)^t \\ &\le \delta^{t-s} \sum_{j=1}^\infty d(E_j)^s \\ &\le \delta^{t-s}\left(\mathcal{H}^s(A) + 1\right).\end{aligned}$$

Väite seuraa antamalla $\delta \to 0$. $\square$

Edellisen lemman nojalla funktiolla $s \mapsto \mathcal{H}^s(A)$ on yksinkertainen kuvaaja: on nimittäin olemassa yksikäsitteinen $s_0 \in [0, \infty]$, jonka kohdalla kuvaaja tipahtaa äärettömyydestä nollaan.

Määritelmä 2.14. Osajoukon $A \subset X$ *Hausdorff-dimensio* on luku

$$\dim_{\mathcal{H}}(A) = \inf\{s > 0 \colon \mathcal{H}^s(A) = 0\}.$$

Tällöin siis pätee:

1. Jos $t < \dim_{\mathcal{H}}(A)$, niin $\mathcal{H}^t(A) = \infty$.
2. Jos $t > \dim_{\mathcal{H}}(A)$, niin $\mathcal{H}^t(A) = 0$.

Yleisesti luvusta $\mathcal{H}^s(A)$, kun $s = \dim_{\mathcal{H}}(A)$, ei voida sanoa mitään: se voi olla tapauksesta riippuen mikä tahansa luku väliltä $[0, \infty]$. Kuitenkin:

$$0 < \mathcal{H}^s(A) < \infty \;\Rightarrow\; \dim_{\mathcal{H}}(A) = s. \tag{2.15}$$

Joukkoa $A \subset X$, jolle (2.15) pätee, kutsutaan *s-joukoksi*.

Lemma 2.16. *(i) Jos $A \subset B$, niin $\dim_{\mathcal{H}}(A) \le \dim_{\mathcal{H}}(B)$.*

(ii) Jos $A_k \subset X$, $k \in \mathbb{N}$, niin

$$\dim_{\mathcal{H}}\Big(\bigcup_{k=1}^\infty A_k\Big) = \sup_k \dim_{\mathcal{H}}(A_k).$$

Todistus. (HT) $\square$

Siten esimerkiksi $\dim_{\mathcal{H}}(\mathbb{Q}) = 0$.

2.17 Hausdorffin mitat $\mathbb{R}^n$:ssä

Seuraavaksi laskemme (tai arvioimme) Cantor-tyyppisten fraktaalien Hausdorff-mittoja ja -dimensioita $\mathbb{R}^n$:ssä. Tätä varten tutkitaan Hausdorff-mittojen invarianssiominaisuuksia. Tehokkaampia tapoja Hausdorff-dimension määräämiseksi kehitämme myöhemmin.

Muistutetaan aluksi, että kuvaus $T \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ on *isometria*, jos

$$|Tx - Ty| = |x - y| \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^n.$$

Tunnetusti jokainen $\mathbb{R}^n$:n isometria on *affiini*, ts. muotoa

$$Tx = a_0 + Ux,$$

missä $a_0 \in \mathbb{R}^n$ ja $U\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ on lineaarinen isometria.

Vastaavasti, kuvaus $R\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ on *similariteetti*, jos

$$|Rx - Ry| = c|x-y| \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^n,$$

missä $c > 0$ on vakio (venytyskerroin, skaalauskerroin, jne.). Tällöin R on muotoa

$$Rx = a_0 + c\,Ux,$$

missä U on jälleen lineaarinen isometria.

Lause 2.18. *Olkoon $A \subset \mathbb{R}^n$. Ulkomitalle $\mathcal{H}^s$, $s \geq 0$, pätee:*

(a) $\mathcal{H}^s(A + x_0) = \mathcal{H}^s(A) \quad \forall x_0 \in \mathbb{R}^n$,

(b) $\mathcal{H}^s\big(U(A)\big) = \mathcal{H}^s(A)$ *kaikilla lineaarisilla isometrioilla* $U\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$,

(c) $\mathcal{H}^s\big(R(A)\big) = c^s \mathcal{H}^s(A)$, *jos* $R\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ *on similariteetti, jonka skaalauskerroin on* $c > 0$.

Todistus. Väitteet seuraavat havainnosta, että $d\big(R(E)\big) = c\,d(E)\ \forall E \subset \mathbb{R}^n$, missä R on kuten (c)-kohdassa. □

Olkoot (X, d_1) ja (Y, d_2) metrisiä avaruuksia. Palautetaan seuraavaksi mieliin, että kuvaus $f\colon X \to Y$ on *L-Lipschitz* (vakiolla $L > 0$), jos

$$d_2\big(f(x), f(y)\big) \leq L\, d_1(x, y)$$

kaikilla $x, y \in X$. Vastaavasti, kuvaus $g\colon X \to Y$ on *L-bilipschitz*, jos

$$\frac{1}{L}\, d_1(x,y) \leq d_2\big(f(x), f(y)\big) \leq L\, d_1(x, y)$$

kaikilla $x, y \in X$. Havaitaan, että L-bilipschitz kuvaus on aina injektio vasemmanpuoleisen epäyhtälön nojalla.

Lemma 2.19. *Olkoot (X, d_1) ja (Y, d_2) separoituvia metrisiä avaruuksia.*

(i) Jos $f\colon X \to Y$ on L-Lipschitz, niin

$$\mathcal{H}^s(fA) \leq L^s \mathcal{H}^s(A) \quad \forall A \subset X.$$

(ii) Jos $g\colon X \to Y$ on L-bilipschitz, niin

$$\dim_{\mathcal{H}}(gA) = \dim_{\mathcal{H}}(A) \quad \forall A \subset X.$$

Todistus.

(i) Voidaan olettaa, että $\mathcal{H}^s(A) < \infty$. Kiinnitetään $\varepsilon > 0$, $\delta > 0$ ja valitaan A:n δ-peite $\{E_j\}_{j=1}^\infty$ s.e.

$$\sum_{j=1}^\infty d(E_j)^s \le \mathcal{H}^s_\delta(A) + \varepsilon.$$

Silloin $\{f(E_j)\}_{j=1}^\infty$ on fA:n $L\delta$-peite, joten

$$\begin{aligned}\mathcal{H}^s_{L\delta}(fA) &\le \sum_{j=1}^\infty d\big(f(E_j)\big)^s \\ &\le L^s \sum_{j=1}^\infty d(E_j)^s \\ &\le L^s(\mathcal{H}^s_\delta(A) + \varepsilon).\end{aligned}$$

Väite seuraa antamalla $\varepsilon \to 0$ ja $\delta \to 0$.

(ii) Soveltamalla (i)-kohtaa kuvaukseen $g^{-1}\colon g(A) \to X$ saadaan

$$L^{-s}\mathcal{H}^s(A) \le \mathcal{H}^s(gA).$$

Siten

$$L^{-s}\mathcal{H}^s(A) \le \mathcal{H}^s(gA) \le L^s\mathcal{H}^s(A),$$

mistä väite seuraa.

□

Seuraavaksi tutkimme Lebesguen mitan m_n ja Hausdorff-mitan $\mathcal{H}^n$ yhteyttä $\mathbb{R}^n$:ssä.

Lause 2.20. *Kaikilla $A \in \operatorname{Bor}(\mathbb{R}^n)$ pätee*

$$\mathcal{H}^n(A) = c_n\, m_n(A),$$

missä $c_n \in (0,\infty)$ on vakio.

Todistus. Olkoon $Q = [0,1)^n$. Osoitetaan ensin, että

$$0 < \mathcal{H}^n(Q) < \infty. \tag{2.21}$$

Selvästi Q voidaan peittää j^n:llä yhtäsuurella osakuutioilla $\{Q_i\}_{i=1}^{j^n}$, joiden sivunpituus on $1/j$ ja halkaisija $d(Q_i) = \sqrt{n}/j$. Jos siis $\delta_j = \sqrt{n}/j$, niin

$$\mathcal{H}^n_{\delta_j}(Q) \le \sum_{i=1}^{j^n}\left(\frac{\sqrt{n}}{j}\right)^n = n^{n/2}.$$

Antamalla $\delta_j = \sqrt{n}/j \to 0$, saadaan

$$\mathcal{H}^n(Q) \le n^{n/2}.$$

Olkoon sitten $\delta > 0$ ja oletetaan, että $\{E_i\}_{i=1}^\infty$ on Q:n δ-peite. Selvästi $E_i \subset I_i$, missä I_i on sopivasti valittu kuutio, jonka sivunpituus on $2d(E_i)$. Silloin

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^\infty d(E_i)^n = 2^{-n}\sum_{i=1}^\infty \big(2d(E_i)\big)^n = 2^{-n}\sum_{i=1}^\infty m_n(I_i) \\ &\ge 2^{-n} m_n\big(\bigcup_{i=1}^\infty I_i\big) \ge 2^{-n} m_n(Q) \\ &= 2^{-n},\end{aligned}$$

joten

$$\mathcal{H}^n_\delta(Q) \geq 2^{-n}.$$

Näin ollen

$$\mathcal{H}^n(Q) \geq 2^{-n}$$

ja väite (2.21) pätee.

Merkitään $c_n = \mathcal{H}^n(Q)$ ja osoitetaan, että

$$\mathcal{H}^n(A) = c_n\, m_n(A) \tag{2.22}$$

kaikilla Borel-joukoilla $A \subset \mathbb{R}^n$. Väite (2.22) pätee, kun $A = [0,1)^n$. Lauseen 2.18 (c)-kohdan nojalla (2.22) pätee, jos A on mielivaltainen $\mathbb{R}^n$:n "oikealle puoliavoin" kuutio, ts. muotoa $A = [a_1, b_1) \times \cdots \times [a_n, b_n)$, $0 < b_1 - a_1 = \cdots = b_n - a_n < \infty$. Seuraavaksi todetaan, että jokainen $\mathbb{R}^n$:n oikealle puoliavoin n-väli voidaan esittää erillisten oikealle puoliavoimien kuutioiden numeroituvana yhdisteenä. Siten (2.22) pätee kaikille $\mathbb{R}^n$:n oikealle puoliavoimille n-väleille. Jos $Q_m = [-m, m)^n$, $m \in \mathbb{N}$, niin oikealle puoliavoimien n-välien ja Q_m:n leikkaukset muodostavat π-systeemin ja virittävät Q_m:n Borelin joukot. Lauseen 1.34 mukaan $\mathcal{H}^n(A) = c_n\, m_n(A)$ kaikilla $A \in \mathrm{Bor}([-m,m)^n)$. Koska tämä pätee kaikilla $m \in \mathbb{N}$, niin (2.22) pätee kaikilla $A \in \mathrm{Bor}(\mathbb{R}^n)$. □

Sekä $\mathcal{H}^n$ että m_n^* ovat molemmat $\mathbb{R}^n$:n Borel-säännöllisiä ulkomittoja, joten pätee:

Korollari 2.23.

$$\mathcal{H}^n(A) = c_n\, m_n^*(A) \quad \forall A \subset \mathbb{R}^n.$$

Todistus. (HT) □

Esitetään Lauseelle 2.20 myös toinen todistus, joka perustuu tasaisesti jakautuneisiin mittoihin.

Määritelmä 2.24. Sanomme, että metrisen avaruuden X Borel-mitta μ on *tasaisesti jakautunut*, jos

$$0 < \mu\big(B(x,r)\big) = \mu\big(B(y,r)\big) < \infty$$

kaikilla $x, y \in X$ ja kaikilla $0 < r < \infty$.

Lebesguen mitta m_n on tasaisesti jakautunut $\mathbb{R}^n$:ssä. Lauseen 2.18 perustella $\mathcal{H}^s\big(B(x,r)\big) = \mathcal{H}^s\big(B(y,r)\big)$ kaikilla $x, y \in \mathbb{R}^n$, $r > 0$ ja $s \geq 0$. Toisaalta $\mathbb{R}^n$ kuulien $\mathcal{H}^s$-mitat ovat positiivisia ja äärellisiä vain, jos $s = n$ (vrt. Lemma 2.13 ja (2.21)). Siten $\mathcal{H}^n$ on tasaisesti jakautunut $\mathbb{R}^n$:ssä. Lause 2.20 saadaan nyt seuraavasta yleisestä tuloksesta.

Lause 2.25. *Jos μ ja ν ovat tasaisesti jakautuneita Borel-mittoja separoituvassa metrisessä avaruudessa X, niin on olemassa vakio $c_0 \in \mathbb{R}$ s.e.*

$$\mu(A) = c_0\, \nu(A)$$

kaikilla $A \in \mathrm{Bor}(X)$.

Todistus. Merkitään $g(r) = \mu\big(B(x,r)\big)$ ja $h(r) = \nu\big(B(x,r)\big)$, kun $0 < r < \infty$ ja $x \in X$. Jos $U \subset X$ on rajoitettu, avoin joukko ja $x \in U$, niin on olemassa raja-arvo

$$\lim_{r \to 0+} \frac{\nu\big(B(x,r) \cap U\big)}{h(r)} = 1.$$

Fatoun lemman nojalla pätee tällöin

$$\begin{aligned}\mu(U) &= \int_U \lim_{r\to 0+} \frac{\nu\big(B(x,r)\cap U\big)}{h(r)}\, d\mu(x)\\ &\le \liminf_{r\to 0+} \frac{1}{h(r)} \int_U \nu\big(B(x,r)\cap U\big)\, d\mu(x).\end{aligned}$$

Fubinin lauseesta (ks. Huomautus 2.26) seuraa nyt, että

$$\begin{aligned}\int_U \nu\big(B(x,r)\cap U\big)\, d\mu(x) &= \int_U \left(\int_U \chi_{B(x,r)}(y)\, d\nu(y)\right) d\mu(x)\\ &= \int_U \left(\int_U \chi_{B(y,r)}(x)\, d\mu(x)\right) d\nu(y)\\ &\le \int_U \mu\big(B(y,r)\big)\, d\nu(y)\\ &= g(r)\nu(U).\end{aligned}$$

Siten

$$0 < \mu(U) \le \liminf_{r\to 0+} \frac{g(r)}{h(r)}\nu(U).$$

Samalla tavalla saadaan

$$0 < \nu(U) \le \liminf_{r\to 0+} \frac{h(r)}{g(r)}\mu(U).$$

Nähdään, että on olemassa raja-arvo

$$\lim_{r\to 0+} \frac{g(r)}{h(r)} = c_0$$

ja että $\mu(U) = c_0\nu(U)$ kaikilla avoimilla $U \subset X$ ja siten myös kaikilla $U \in \operatorname{Bor}(X)$. □

Huomautus 2.26. Perustellaan Fubinin lauseen käyttö edellisessä todistuksessa. Ensiksikin sekä μ että ν ovat σ-äärellisiä. Toiseksi pätee yleinen tulos: Jos Y ja Z ovat topologisia avaruuksia, joilla on numeroituva kanta (ts. ovat N_2), niin silloin

$$\operatorname{Bor}(Y\times Z) = \sigma\big(\operatorname{Bor}(Y)\times\operatorname{Bor}(Z)\big). \tag{2.27}$$

Edellisessä lauseessa $Y = Z = X$ on separoituva metrinen avaruus, joten se on N_2 ja siten (2.27) pätee. Näin ollen avoin joukko $\Delta_r = \{(x,y)\in X\times X : d(x,y) < r\}$ on $X\times X$:n Borel-joukkona $\mu\times\nu$-mitallinen. Tästä seuraa edelleen, että kuvaus $f\colon X\times X\to\mathbb{R}$,

$$f(x,y) = \chi_{B(x,r)}(y) = \chi_{B(y,r)}(x) = \chi_{\Delta_r}(x,y)$$

on $\mu\times\nu$-mitallinen ja siksi Fubinia voi käyttää.

Osoitetaan vielä (2.27):n inkluusio $\operatorname{Bor}(Y\times Z)\subset\sigma\big(\operatorname{Bor}(Y)\times\operatorname{Bor}(Z)\big)$, jota käytettiin edellä. Toinen suunta jää harjoitustehtäväksi. Olkoon $A\subset Y\times Z$ avoin. Koska Y ja Z ovat N_2:ia, niin A voidaan esittää numeroituvana yhdisteenä

$$A = \bigcup_{i,j\in\mathbb{N}} A_i\times B_j,$$

missä $A_i\in Y,\ B_j\in Z$ ovat avoimia. Tällöin $A_i\times B_j\in\operatorname{Bor}(Y)\times\operatorname{Bor}(Z)$, joten $A\in\sigma\big(\operatorname{Bor}(Y)\times\operatorname{Bor}(Z)\big)$. Näin ollen $\operatorname{Bor}(Y\times Z)\subset\sigma\big(\operatorname{Bor}(Y)\times\operatorname{Bor}(Z)\big)$.

Seuraavaksi konstruoimme joukkoja, joiden Hausdorff-dimensio ei ole kokonaisluku. Palautetaan mieliin Cantor-joukon konstruktio Reaalianalyysi I:stä. (Käytämme hieman eri merkintöjä ja käsittelemme vain erikoistapauksen.)

Olkoon $0 < \lambda < 1/2$. Merkitään $I_{0,1} = [0,1]$, $I_{1,1} = [0,\lambda]$ ja $I_{1,2} = [1-\lambda, 1]$. Toisin sanoen, $I_{1,1}$ ja $I_{1,2}$ on saatu $I_{0,1}$:stä poistamalla sen keskeltä avoin väli, jonka pituus on $1-2\lambda$. Seuraavaksi poistetaan suljettujen välien $I_{1,i}$ keskeltä avoimet välit, joiden pituus on $(1-2\lambda)\lambda$ ja jatketaan prosessia induktiivisesti. Oletetaan, että n:n vaiheen välit $I_{n,i}$, $i = 1,\dots,2^n$, on määritelty. Tällöin $(n+1)$:n vaiheen välit $I_{n+1,j}$, $j = 1,\dots,2^{n+1}$ saadaan poistamalla n:n vaiheen välien keskeltä avoin väli, jonka pituus on $(1-2\lambda)\lambda^n$. Siten

$$d(I_{n,i}) = \lambda^n, \quad \forall n \text{ ja } \forall i = 1,\dots,2^n.$$

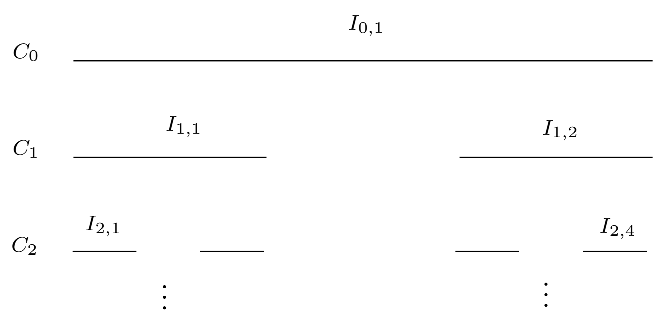
Merkitään

$$C_n(\lambda) = \bigcup_{i=1}^{2^n} I_{n,i}$$

("n:n vaiheen approksimaatio") ja

$$C(\lambda) = \bigcap_{n=1}^{\infty} C_n(\lambda).$$

Tällöin $C(\lambda)$ on kompakti, ylinumeroituva joukko, jolla ei ole sisäpisteitä. Lisäksi $C(\lambda)$ on "itsesimilaari" ja $m_1\big(C(\lambda)\big) = 0$. Cantorin 1/3-joukko $C(1/3)$ on usein käytetty erikoistapaus.



Lause 2.28. *Kaikilla* $0 < \lambda < 1/2$

$$\dim_{\mathcal{H}} C(\lambda) = \frac{\log 2}{\log(1/\lambda)}.$$

Erityisesti $\dim_{\mathcal{H}} C(\lambda)$ *voi saada kaikki arvot väliltä* $(0,1)$.

Todistus. Riittää osoittaa, että

$$1/2 \le \mathcal{H}^s\big(C(\lambda)\big) \le 1, \tag{2.29}$$

jos

$$s = \frac{\log 2}{\log(1/\lambda)}.$$

(i) Esitetään ensin *heuristinen argumentti* eksponentin s löytämiseksi: Selvästi

$$C(\lambda) = C_1 \cup C_2,$$

missä C_1 ja C_2 ovat erillisiä ja similaarisia $C(\lambda)$:n kanssa skaalauskertoimella λ. Jos $C(\lambda)$ *olisi* s-joukko, niin Lauseen 2.18 (c)-kohdan nojalla

$$\begin{aligned}\mathcal{H}^s\bigl(C(\lambda)\bigr) &= \mathcal{H}^s(C_1) + \mathcal{H}^s(C_2)\\ &= 2\lambda^s\mathcal{H}^s\bigl(C(\lambda)\bigr).\end{aligned}$$

Siten

$$1 = 2\lambda^s,$$

josta ratkaisemalla saadaan

$$s = \frac{\log 2}{\log(1/\lambda)}.$$

(ii) Arvion (2.29) tarkka todistus: Jos $\delta > 0$ on annettu, niin valitaan $n \in \mathbb{N}$ niin suureksi, että $\lambda^n < \delta$. Tällöin $\{I_{n,i}\}_{i=1}^{2^n}$ on $C(\lambda)$:n δ-peite, joten

$$\mathcal{H}^s_\delta\bigl(C(\lambda)\bigr) \le \sum_{i=1}^{2^n}(\lambda^n)^s = \sum_{i=1}^{2^n}(1/2)^n = 1.$$

Siis

$$\mathcal{H}^s\bigl(C(\lambda)\bigr) \le 1.$$

Esitämme todistuksen alarajalle (2.29) vain erikoistapauksessa $\lambda = 1/3$, sillä myöhemmin tulemme käsittelemään tehokkaimpia keinoja Hausdorff-dimension määräämiseksi. Yleinen tapaus $\lambda \in (0, 1/2)$ ei toisi olennaisia muutoksia todistukseen. Oletetaan, että $\{E_j\}_{j=1}^\infty$ on sellainen $C(1/3)$:n δ-peite, että

$$\sum_{j=1}^\infty d(E_j)^s \le \mathcal{H}^s\bigl(C(1/3)\bigr) + \delta, \quad s = \frac{\log 2}{\log 3}$$

Jokaisella j valitaan suljettu väli I_j $(= [a,b])$ s.e. $E_j \subset \operatorname{int} I_j$ $(=]a,b[)$ ja $d(I_j) < (1+\delta)d(E_j)$. Tällöin $\{\operatorname{int} I_j\}_{j=1}^\infty$ muodostaa $C(1/3)$:n avoimen peitteen, joten $C(1/3)$:n kompaktisuuden nojalla voimme valita äärellisen osapeitteen. Indeksöimällä välit I_j uudelleen voimme olettaa, että

$$C(1/3) \subset \bigcup_{j=1}^m I_j$$

ja

$$\begin{aligned}\mathcal{H}^s\bigl(C(1/3)\bigr) + \delta &\ge \sum_{j=1}^\infty d(E_j)^s\\ &\ge (1+\delta)^{-s}\sum_{j=1}^m d(I_j)^s.\end{aligned}$$

Alarajan (2.29) todistamiseksi riittää siis osoittaa, että

$$\sum_{j=1}^m d(I_j)^s \ge \frac{1}{2}, \tag{2.30}$$

jos $\{I_j\}_{j=1}^m$ on $C(1/3)$:n peite äärellisen monella suljetulla välillä I_j. Jokaisella j valitaan $k = k(j) \in \mathbb{N}$, jolle

$$3^{-(k+1)} \le d(I_j) < 3^{-k}. \tag{2.31}$$

Olkoon k_0 suurin luvuista $k(j), j = 1, \dots, m$. Konstruktion ja luvun $k = k(j)$ valinnan perusteella jokainen I_j voi leikata ainoastaan yhtä k:n vaiheen väliä $I_{k,i}$. Siis I_j leikkaa korkeintaan $2^{k_0 - k(j)}$:tä vaiheen k_0 väliä $I_{k_0,i}$. Siten tällaisten k_0:n vaiheen välien lukumäärä on korkeintaan

$$\sum_{j=1}^m 2^{k_0 - k(j)}.$$

Toisaalta k_0:n vaiheen välejä on 2^{k_0} kappaletta. Näistä jokainen sisältää $C(1/3)$:n pisteitä ja $C(1/3) \subset \bigcup_{j=1}^m I_j$, joten on oltava

$$2^{k_0} \le \sum_{j=1}^m 2^{k_0 - k(j)}.$$

Nyt voimme laskea

$$\begin{aligned}
2^{k_0} &\le \sum_{j=1}^m 2^{k_0 - k(j)} = 2^{k_0} \sum_{j=1}^m 2^{-k(j)} \\
&= 2^{k_0} \sum_{j=1}^m (3^{-k(j)})^s \\
&\le 2^{k_0} \sum_{j=1}^m \big(3d(I_j)\big)^s,
\end{aligned}$$

josta sieventämällä saadaan

$$\sum_{j=1}^m d(I_j)^s \ge 3^{-s} = 1/2.$$

□

Huomautus 2.32. Edellistä todistusta tarkentamalla voidaan osoittaa, että

$$\mathcal{H}^s\big(C(\lambda)\big) = 1, \ s = \frac{\log 2}{\log(1/\lambda)},$$

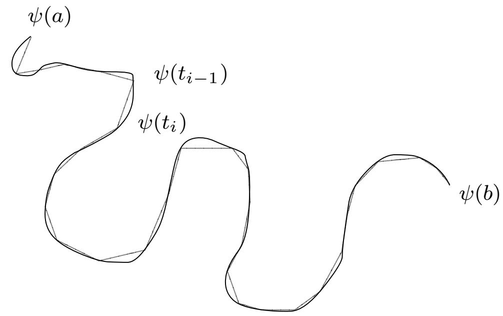
(ks. [Fa1, s. 14-15]).

2.33 Suoristuvat ja epäsuoristuvat 1-joukot

Tarkastellaan aluksi *suoristuvia kaaria* $\mathbb{R}^n$:ssä. Olkoon $\psi\colon [a,b] \to \mathbb{R}^n$, $a < b$, jatkuva injektio, jolloin $\psi[a,b] = \Gamma$ on *kaari*. Määrittelemme, että Γ:n pituus on

$$\mathcal{L}(\Gamma) = \sup\{\sum_{i=1}^m |\psi(t_i) - \psi(t_{i-1})| \colon a = t_0 < t_1 < \cdots < t_m = b\},$$

missä supremum otetaan yli kaikkien $[a,b]$:n äärellisten jakojen.



Sanomme, että Γ on *suoristuva*, jos $\mathcal{L}(\Gamma) < \infty$.

Lause 2.34. *Olkoon $\Gamma \subset \mathbb{R}^n$ suoristuva kaari. Silloin*

$$\mathcal{L}(\Gamma) = \mathcal{H}^1(\Gamma).$$

Todistus. Jokainen suoristuva kaari Γ voidaan parametrisoida kaarenpituuden suhteen (HT). Toisin sanoen, on olemassa homeomorfismi $\psi_0\colon [0, \mathcal{L}(\gamma)] \to \Gamma$, jolle $\mathcal{L}(\psi_0[s,t]) = t - s$ kaikilla $0 \le s \le t \le \mathcal{L}(\Gamma)$.

Kaarenpituuden määritelmän nojalla

$$|\psi_0(t) - \psi_0(s)| \le \mathcal{L}(\psi_0[a,b]) = |t-s|, \quad 0 \le s \le t \le \mathcal{L}(\Gamma),$$

joten ψ_0 on 1-Lipschitz. Siten

$$\mathcal{H}^1(\Gamma) = \mathcal{H}^1(\psi_0[0, \mathcal{L}(\Gamma)]) \le \mathcal{H}^1([0, \mathcal{L}(\Gamma)]) = \mathcal{L}(\Gamma),$$

missä viimeinen yhtälö seuraa faktasta, että $\mathcal{H}^1 = m_1$ $\mathbb{R}$:ssä.

Käänteisen epäyhtälön todistamiseen riittää näyttää ($\mathcal{L}(\Gamma)$:n määritelmän nojalla), että

$$\mathcal{H}^1(\psi_0[s,t]) \ge |\psi_0(s) - \psi_0(t)|$$

kaikilla $0 \le s \le t \le \mathcal{L}(\Gamma)$. Voidaan olettaa, että $\psi_0(s) \ne \psi_0(t)$. Olkoon P ortogonaaliprojektio pisteiden $\psi_0(s)$ ja $\psi_0(t)$ kautta kulkevalle suoralle S. Silloin P on 1-Lipschitz ja

$$P(\psi_0[s,t]) \supset J,$$

missä $J \subset S$ on pisteiden $\psi_0(s)$ ja $\psi_0(t)$ väliin jäävä jana S:llä. Siten

$$\mathcal{H}^1\big(\psi_0[s,t]\big) \ge \mathcal{H}^1\big(P(\psi_0[s,t])\big) \ge \mathcal{H}^1(J) = |\psi_0(s) - \psi_0(t)|.$$

Viimeisessä yhtälössä käytettiin Lausetta 2.18 ja faktaa, että $\mathcal{H}^1 = m_1$ $\mathbb{R}$:ssä. $\square$

Korollari 2.35. *Olkoon $\Gamma \subset \mathbb{R}^n$ suoristuva kaari ja $\psi\colon [0, \mathcal{L}(\Gamma)] \to \mathbb{R}^n$ sen parametrisointi kaarenpituuden suhteen. Jos $E \subset [0, \mathcal{L}(\Gamma)]$ on Lebesgue-mitallinen, niin $\psi E \subset \mathbb{R}^n$ on $\mathcal{H}^1$-mitallinen ja $\mathcal{H}^1(\psi E) = m_1(E)$.*

Huomautus 2.36. Jos $\Gamma \subset \mathbb{R}^n$ on suoristuva kaari ja $\psi\colon [0, \mathcal{L}(\Gamma)] \to \mathbb{R}^n$ sen parametrisointi kaarenpituuden suhteen. Silloin $\psi = (\psi_1, \ldots, \psi_n)$, missä jokainen ψ_i, $i = 1, \ldots, n$, on 1-Lipschitz ja siten absoluuttisesti jatkuva. Näin ollen $\psi_i'(t)$ on olemassa m.k. $t \in [0, \mathcal{L}(\Gamma)]$ ja edelleen derivaatta

$$\psi'(t) = (\psi_1'(t), \ldots, \psi_n'(t)) \in \mathbb{R}^n$$

on olemassa melkein kaikilla $t \in [0, \mathcal{L}(\Gamma)]$.

Lauseen 2.34 mukaan jokainen suoristuva kaari on 1-joukko, ts. $0 < \mathcal{H}^1(\Gamma) < \infty$. Tällaisia joukkoja ovat myös suoristuvien kaarien äärelliset ja myös numeroituvat yhdisteet $\cup_i \Gamma_i$, jos $\sum_i \mathcal{H}^1(\Gamma_i) < \infty$.

Onko olemassa olennaisesti muunlaisia 1-joukkoja?

Lähestytään kysymystä esimerkkien valossa.

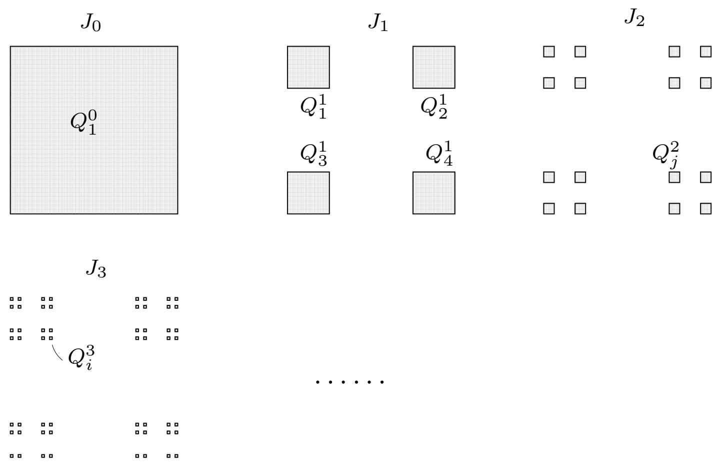
Esimerkki 2.37. Aloitetaan tason suljetusta yksikköneliöstä $J_0 = Q_1^0 = [0,1]^2$. Olkoon J_1 yhdiste neljästä suljetusta nurkkaneliöstä Q_i^1, $i = 1, \dots, 4$, joiden jokaisen sivunpituus on $1/4$. Sen jälkeen kukin J_1:n neliöstä Q_i^1, $i = 1, \dots, 4$, korvataan neljällä nurkkaneliöllä Q_j^2, $j = 1, \dots, 16$, joiden sivunpituudet ovat $1/16$. Näin jatketaan, jolloin n:nnessä vaiheessa meillä on 4^n kpl neliöitä Q_j^n, $j = 1, \dots, 4^n$, joiden kunkin sivunpituus on 4^{-n}. Olkoon

$$J_n = \bigcup_{j=1}^{4^n} Q_j^n$$

ja

$$J = \bigcap_{n=0}^{\infty} J_n.$$

Tällöin J on Cantor-tyyppinen joukko. Itseasiassa $J = C(1/4) \times C(1/4)$.



Mikä on J:n Hausdorff-dimensio $\dim_{\mathcal{H}} J$? Päätellään sopiva ehdokas ensin similariteettien avulla. Havaitaan, että

$$J = \bigsqcup_{i=1}^{4} \tilde{J}_i,$$

missä $\tilde{J}_i$ on similaarinen J:n kanssa skaalauskertoimella $1/4$, joten $\mathcal{H}^s(\tilde{J}_i) = (1/4)^s \mathcal{H}^s(J)$ ja

$$\mathcal{H}^s(J) = 4(1/4)^s \mathcal{H}^s(J).$$

Jos J on s-joukko, saadaan ylläolevasta ehto

$$4(1/4)^s = 1$$

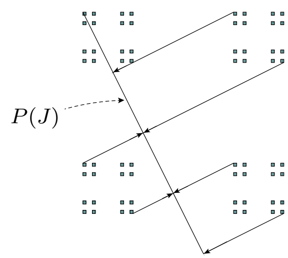
eli $s = 1$. Perustellaan asiaa hieman tarkemmin. Kiinnitetään $\delta > 0$. Todetaan ensin, että $d(Q_j^n) = \sqrt{2}/4^n$. Jos $n \in \mathbb{N}$ on niin suuri, että $\sqrt{2}/4^n \leq \delta$, niin $\{Q_j^n\}_{j=1}^{4^n}$ on J:n δ-peite ja siten

$$\mathcal{H}_\delta^1(J) \leq \sum_{j=1}^{4^n} d(Q_j^n) \leq 4^n \sqrt{2}/4^n = \sqrt{2}.$$

Siten $\mathcal{H}^1(J) \le \sqrt{2} < \infty$. Samanlaisella päättelyllä kuin Lauseen 2.28 todistuksessa voidaan osoittaa, että $\mathcal{H}^1(J) > 0$. Siten

$$\dim_{\mathcal{H}}(J) = 1 \quad \text{ja} \quad 0 < \mathcal{H}^1(J) < \infty,$$

eli J on 1-joukko. Geometrialtaan se näyttää kuitenkin hyvin erilaiselta kuin suoristuva käyrä. *Huom.*: Positiivinen alaraja voidaan myös löytää käyttämällä ortogonaalista projektiota $P\colon \mathbb{R}^2 \to S$ suoralle S, jonka kulmakerroin on -2. Tällöin kuvajoukko $P(J)$ on jana, jonka pituus on $3/\sqrt{5}$. Koska projektio P on 1-Lipschitz, niin $\mathcal{H}^1(J) \ge \mathcal{H}^1(P(J)) = 3/\sqrt{5}$. Itseasiassa voidaan osoittaa, että $\mathcal{H}^1(J) = \sqrt{2}$.



Edellä huomautettiin, että $J = C(1/4) \times C(1/4)$. Havaitaan, että $\dim_{\mathcal{H}}(J) = 1 = 2\log 2/\log 4 = \dim_{\mathcal{H}} C(1/4) + \dim_{\mathcal{H}} C(1/4)$.

Esimerkki 2.38. Olkoot $q_1, q_2, \ldots$ suljetun yksikkökiekon $\bar{D} = \{x \in \mathbb{R}^2 \colon |x| \le 1\}$ ne pisteet, joiden molemmat koordinaatit ovat rationaalilukuja. Nämä pisteet muodostavat $\bar{D}$:n tiheän numeroituvan osajoukon. Olkoon

$$E = \bigcup_{j=1}^{\infty} S_j,$$

missä

$$S_j = \{x \in \mathbb{R}^2 \colon |x - q_j| = 2^{-j}\}.$$

Nyt

$$0 < \mathcal{H}^1(E) \le \sum_{j=1}^{\infty} 2\pi\, 2^{-j} = 2\pi < \infty.$$

Siten E on 1-joukko ja $\dim_{\mathcal{H}} E = 1$. Kuitenkin E on tiheä $\bar{D}$:ssä, $\bar{E} \cap \bar{D} = \bar{D}$, joten E on “hyvin suuri”. Missä mielessä E muistuttaa geometrisilta ominaisuuksiltaan suoristuvaa kaarta?

Nämä ja vastaavat esimerkit herättävät useita kysymyksiä:

- Millä tavalla Esimerkin 2.37 Cantor-joukko on erilainen kuin suoristuva kaari?
- Millainen on yleinen 1-joukko? Miten siitä voi erottaa “Cantor-tyyppiset” ja “suoristuvat” osat ja miten ko. osat voi määritellä?
- Miten suoristuvien kaarien geometriset ominaisuudet, kuten esim. tangenttien olemassaolo, yleistyvät Esimerkin 2.38 kaltaisiin joukkoihin?

Määritelmä 2.39. Sanomme, että $\mathcal{H}^1$-mitallinen joukko $E \subset \mathbb{R}^n$ on 1-*suoristuva* (tai lyhyemmin *suoristuva*), jos on olemassa numeroituvan monta suoristuvaa kaarta $\Gamma_i, i \in \mathbb{N}$, s.e.

$$\mathcal{H}^1(E \setminus \bigcup_{i=1}^{\infty} \Gamma_i) = 0.$$

Joukko $F \subset \mathbb{R}^n$ on *täysin* 1-*epäsuoristuva* (tai lyhyemmin *epäsuoristuva*), jos $\mathcal{H}^1(F \cap \Gamma) = 0$ jokaisella suoristuvalla kaarella $\Gamma \subset \mathbb{R}^n$.

Esimerkin 2.38 joukko E on 1-suoristuva, kun taas Esimerkin 2.37 joukko J on täysin 1-epäsuoristuva (HT).

Huomautus 2.40.

1. Jos A on 1-suoristuva ja $E \subset A$ on $\mathcal{H}^1$-mitallinen, niin E on 1-suoristuva.
2. Jos joukot $A_1, A_2, \ldots,$ ovat 1-suoristuvia, niin $\cup_j A_j$ on 1-suoristuva.
3. Voidaan määritellä myös m-suoristuvat joukot kaikilla $m \in \mathbb{N}$, ks. Mattilan kirja [Mat].

Lause 2.41. *Jokainen $\mathcal{H}^1$-mitallinen joukko $A \subset \mathbb{R}^n$, jolle $\mathcal{H}^1(A) < \infty$, on muotoa $A = E \cup F$, missä E on 1-suoristuva ja F on täysin 1-epäsuoristuva. Lisäksi E ja F ovat $\mathcal{H}^1$-nollamittaisia joukkoja vaille yksikäsitteiset.*

Todistus. HT 6/5. □

Tarkastelemme seuraavaksi suoristuvien/epäsuoristuvien joukkojen geometrisia ominaisuuksia. Palautetaan mieleen *Lebesguen tiheyspistelause* Reaalianalyysi I:stä: Jos $E \in \mathrm{Leb}(\mathbb{R}^n)$, niin

$$\lim_{r \to 0+} \frac{m_n(E \cap B(x,r))}{m_n(B(x,r))} = 1$$

melkein kaikilla $x \in E$. Kysymme onko Hausdorff-mitoilla mitään vastaavia ominaisuuksia. Voidaan näyttää, että

$$\mathcal{H}^n(\bar{B}(x,r)) = (2r)^n,$$

kun $B(x,r) \subset \mathbb{R}^n$, ks. esim. [EG], [Mat]. Tämä mielessä pitäen määrittelemme:

Määritelmä 2.42. Olkoon $0 \le s < \infty$, $A \subset \mathbb{R}^n$ ja $a \in \mathbb{R}^n$. Joukon A *ylä-* ja *ala-s-tiheydet pisteessä* a ovat

$$\Theta^{*s}(A,a) = \limsup_{r \to 0+} \frac{\mathcal{H}^s(A \cap \bar{B}(a,r))}{(2r)^s},$$
$$\Theta^{s}_{*}(A,a) = \liminf_{r \to 0+} \frac{\mathcal{H}^s(A \cap \bar{B}(a,r))}{(2r)^s}.$$

Jos $\Theta^s_*(A,a) = \Theta^{*s}(A,a)$, niin tätä arvoa kutsutaan *A:n (s-ulotteiseksi) tiheydeksi a:ssa* ja merkitään $\Theta^s(A,a)$:lla.

Tutkimme tiheyksiä peitelauseita käyttäen. Palautetaan mieliin Reaalianalyysi I:stä seuraava Peruspeitelause ja Vitalin peitteen käsite. Jos B on x-keskinen r-säteinen avoin (suljettu) kuula, niin $5B$ on x-keskinen $5r$-säteinen avoin (suljettu) kuula.

Lause 2.43 (Peruspeitelause)**.** *Olkoon $\mathcal{F}$ mielivaltainen perhe $\mathbb{R}^n$:n kuulia s.e.*

$$D = \sup\{d(B) \colon B \in \mathcal{F}\} < \infty.$$

Tällöin on olemassa numeroituva (mahdollisesti äärellinen) perhe $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$ s.e.

$$B_i \cap B_j = \emptyset \quad \forall B_i, B_j \in \mathcal{G},\ B_i \neq B_j, \quad \textit{ts. } \mathcal{G}\textit{:n kuulat erillisiä; ja}$$
$$\bigcup_{B \in \mathcal{F}} B \subset \bigcup_{B \in \mathcal{G}} 5B\,.$$

Määritelmä 2.44. Olkoon $\mathcal{V}$ perhe $\mathbb{R}^n$:n kuulia. Sanomme, että $\mathcal{V}$ on joukon $E \subset \mathbb{R}^n$ *Vitalin peite*, jos jokaista $x \in E$ ja jokaista $\varepsilon > 0$ kohti on olemassa $B \in \mathcal{V}$ s.e. $x \in B$ ja $d(B) < \varepsilon$. Perhe $\mathcal{V}$ on suljettu (avoin) Vitalin peite, jos jokainen $B \in \mathcal{V}$ on suljettu (avoin) kuula.

Lause 2.45 (Vitalin peitelause Hausdorff-mitoille)**.** *Olkoon $0 < s < \infty$ ja olkoon $\mathcal{V}$ joukon $E \subset \mathbb{R}^n$ suljettu Vitalin peite. Silloin on olemassa numeroituva perhe erillisiä kuulia $B_i \in \mathcal{V}$ s.e. joko*

$$\sum_{i=1} d(B_i)^s = \infty \tag{2.46}$$

tai

$$\mathcal{H}^s\big(E \setminus \bigcup_{i=1} B_i\big) = 0. \tag{2.47}$$

Huomautus 2.48. Käyttämällä ns. Besicovitchin peitelausetta saadaan Lauseen 2.45 vastine mielivaltaiselle $\mathbb{R}^n$:n Radon-mitalle (ks. Lauseet 5.2, 5.12).

Todistus. Voidaan olettaa, että $0 < d(B) < 1$ kaikilla $B \in \mathcal{V}$. Valitaan kuulat induktiivisesti: Olkoon $B_1 \in \mathcal{V}$ mielivaltainen. Oletetaan, että erilliset kuulat $B_1, \ldots, B_m \in \mathcal{V}$ on valittu. Olkoon

$$d_m = \sup\{d(B) \colon B \in \mathcal{V},\ B \cap B_i = \emptyset\ \forall 1 \le i \le m\}.$$

Jos $d_m = 0$, niin on oltava

$$E \subset \bigcup_{i=1}^m B_i,$$

ja väite on siten todistettu ((2.47) pätee). Jos nimittäin olisi olemassa $x \in E \setminus \cup_{i=1}^m B_i$, niin

$$\operatorname{dist}(x, \cup_{i=1}^m B_i) > 0,$$

sillä $\cup_{i=1}^m B_i$ on kompakti. Koska $\mathcal{V}$ on E:n Vitalin peite, olisi silloin olemassa $B \in \mathcal{V}$ s.e. $x \in B$ ja $B \cap \cup_{i=1}^m B_i = \emptyset$ ja siten $d_m > 0$.

Jos $d_m > 0$, niin valitaan sellainen $B_{m+1} \in \mathcal{V}$, että $d(B_{m+1}) > d_m/2$. Jos tämä valintaprosessi ei päädy millään m, saadaan erilliset kuulat $\{B_i\}_{i=1}^\infty \subset \mathcal{V}$. On siis näytettävä: Jos

$$\sum_{i=1}^\infty d(B_i)^s < \infty,$$

niin ehto (2.47) pätee. Tätä varten osoitetaan ensin, että

$$E \setminus \bigcup_{i=1}^k B_i \subset \bigcup_{j=k+1}^\infty 5B_j \quad \forall k \in \mathbb{N}. \tag{2.49}$$

Jos nimittäin

$$x \in E \setminus \bigcup_{i=1}^{k} B_i,$$

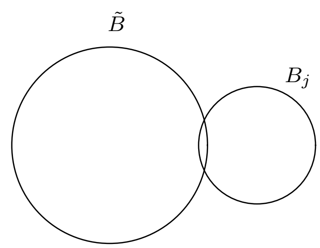
niin $x \in \tilde{B} \in \mathcal{V}$, missä $\tilde{B} \cap B_i = \emptyset$ kaikilla $1 \le j \le k$. Koska $d(B_m) \to 0$, kun $m \to \infty$, niin $d(\tilde{B}) > 2d(B_{m+1})$ jollakin m. Tällöin $\tilde{B}$:n on leikattava jotain joukoista $B_{k+1}, \dots, B_m$, muussa tapauksessa

$$d_m \ge d(\tilde{B}) > 2d(B_{m+1}) > d_m.$$

Olkoon B_j ensimmäinen kuulista $B_1, \dots, B_m$, jota $\tilde{B}$ leikkaa. Silloin

$$\tilde{B} \cap B_j \ne \emptyset, \quad d(B_j) > d_{j-1}/2 \ge d(\tilde{B})/2 \quad \text{ja} \quad k+1 \le j \le m.$$

Siten $\tilde{B} \subset 5B_j$ ja (2.49) pätee.



Olkoon lopuksi $\delta > 0$. Kun k on riittävän suuri, niin $d(5B_j) \le \delta$ kaikilla $j \ge k$. Siten

$$\begin{aligned} \mathcal{H}^s_\delta\big(E \setminus \bigcup_{i=1}^{\infty} B_i\big) &\le \mathcal{H}^s_\delta\big(E \setminus \bigcup_{i=1}^{k} B_i\big) \\ &\le \mathcal{H}^s_\delta\big(\bigcup_{j=k+1}^{\infty} 5B_j\big) \\ &\le \sum_{j=k+1}^{\infty} d(5B_j)^s \\ &= 5^s \sum_{j=k+1}^{\infty} d(B_j)^s \to 0, \end{aligned}$$

kun $k \to \infty$. Siten

$$\mathcal{H}^s_\delta\big(E \setminus \bigcup_{i=1}^{\infty} B_i\big) = 0$$

kaikilla $\delta > 0$ ja (2.47) pätee. □

Seuraava lause on hyödyllinen tutkittaessa s-joukkojen lokaaleja ominaisuuksia.

Lause 2.50. *Olkoon* $0 < s < \infty$, $A \subset \mathbb{R}^n$ *ja* $\mathcal{H}^s(A) < \infty$.

(a) $2^{-s} \le \Theta^{*s}(A, a) \le 1$ $\mathcal{H}^s$*-m.k.* $a \in A$.

(b) Jos A *on* $\mathcal{H}^s$*-mitallinen, niin* $\Theta^{*s}(A, a) = 0$ $\mathcal{H}^s$*-m.k.* $a \in \mathbb{R}^n \setminus A$

Todistus. Osoitetaan ensin (a)-kohdan vasen epäyhtälö. Todetaan aluksi, että

$$\{x \in A\colon \Theta^{*s}(A,x) < 2^{-s}\} = \bigcup_{k=1}^{\infty} \underbrace{\{x \in A\colon \mathcal{H}^s(A \cap \bar{B}(x,r)) < (1-1/k)r^s \quad \forall\, 0 < r < 1/k\}}_{=C_k}$$

ja osoitetaan sitten, että $\mathcal{H}^s(C_k) = 0$ kaikilla $k \in \mathbb{N}$. Kiinnitetään $k \in \mathbb{N}$, $\varepsilon > 0$ ja merkitään $C = C_k$. Peitetään C joukoilla $E_j,\ j \in \mathbb{N}$, s.e. $0 < d(E_j) < 1/k,\ C \cap E_j \neq \emptyset$ ja

$$\sum_{j=1}^{\infty} d(E_j)^s \leq \mathcal{H}^s(C) + \varepsilon.$$

Jokaisella j valitaan $x_j \in C \cap E_j$ ja merkitään $r_j = d(E_j)$. Koska $C \cap E_j \subset A \cap \bar{B}(x_j, r_j)$, niin

$$\begin{aligned}
\mathcal{H}^s(C) &\leq \sum_{j=1}^{\infty} \mathcal{H}^s(C \cap E_j) \\
&\leq \sum_{j=1}^{\infty} \mathcal{H}^s(A \cap \bar{B}(x_j, r_j)) \\
&\leq \sum_{j=1}^{\infty} (1-1/k) r_j^s \\
&= (1-1/k) \sum_{j=1}^{\infty} d(E_j)^s \\
&\leq (1-1/k)(\mathcal{H}^s(C) + \varepsilon).
\end{aligned}$$

Antamalla $\varepsilon \to 0$ nähdään, että $\mathcal{H}^s(C) = 0$, sillä $1 - 1/k < 1$ ja $\mathcal{H}^s(C) < \infty$.

Todistetaan sitten (a)-kohdan oikeanpuoleinen epäyhtälö. Koska $\mathcal{H}^s$ on Borel-säännöllinen (ulkomitta), voimme olettaa, että A on Borel-joukko. Silloin Korollari 2.9:n nojalla $\mathcal{H}^s \llcorner A$ on Radon-mitta.

Kun $t > 1$, niin olkoon

$$E = \{x \in A\colon \Theta^{*s}(A,x) > t\}.$$

Haluamme näyttää, että $\mathcal{H}^s(E) = 0$. Olkoon $\delta > 0$ ja $\varepsilon > 0$. Koska $\mathcal{H}^s \llcorner A$ on Radon-mitta, on olemassa avoin $U \subset \mathbb{R}^n$ s.e. $E \subset U$ ja

$$\mathcal{H}^s(A \cap U) < \mathcal{H}^s(E) + \varepsilon.$$

Jokaisella $x \in E$ on olemassa säde $r_x < \delta/2$, jolla $B(x, r_x) \subset U$ sekä jono säteitä $r_i < r_x,\ r_i \to 0$ s.e.

$$\mathcal{H}^s(A \cap \bar{B}(x, r_i)) > t\,(2r_i)^s \quad \forall i \in \mathbb{N}. \tag{2.51}$$

(Huomaa, että jono r_i riippuu x:stä, siis $r_i = r_i(x)$.) Käytetään Vitalin peitelausetta E:n Vitalin peitteeseen $\mathcal{V} = \{\bar{B}(x, r_i)\colon x \in E,\ i \in \mathbb{N}\}$. Siten on olemassa erilliset suljetut kuulat $\{B_j\} \subset \mathcal{V}$ s.e.

$$\mathcal{H}^s(E \setminus \cup_j B_j) = 0. \tag{2.52}$$

Tällöin

$$\begin{aligned}
\mathcal{H}^s(E)+\varepsilon &\geq \mathcal{H}^s(A\cap U)\\
&\geq \sum_j \mathcal{H}^s(A\cap B_j)\\
&\overset{(2.51)}{\geq} t\sum_j d(B_j)^s\\
&\geq t\,\mathcal{H}^s_\delta(E\cap\cup_j B_j)\\
&\geq t\,\mathcal{H}^s_\delta(E),
\end{aligned}$$

missä viimeinen epäyhtälö seuraa (2.52):stä ja $\mathcal{H}^s_\delta$:n subadditiivisuudesta. Antamalla $\varepsilon\to 0$ ja $\delta\to 0$, saadaan $t\,\mathcal{H}^s(E)\leq\mathcal{H}^s(E)<\infty$. Siten $\mathcal{H}^s(E)=0$, koska $t>1$.

Todistetaan lopuksi (b): Olkoon $t>0$ ja

$$B=\{x\in\mathbb{R}^n\setminus A\colon \Theta^{*s}(A,x)>t\}$$

ja osoitetaan, että $\mathcal{H}^s(B)=0$. Kiinnitetään $\delta>0$ ja $\varepsilon>0$. Sovelletaan Lauseen 1.24 (b)-kohtaa Borel-säännölliseen ulkomittaan $\mathcal{H}^s\llcorner A$ (ks. Lemma 1.23). Koska $(\mathcal{H}^s\llcorner A)(B)=0$, niin 1.24:n nojalla on olemassa avoin $U\subset\mathbb{R}^n$ s.e. $B\subset U$ ja $\mathcal{H}^s(A\cap U)<\varepsilon$. Jokaisella $x\in B$ on olemassa säde $0<r(x)<\delta$ s.e. $\bar{B}(x,r(x))\subset U$ ja

$$\mathcal{H}^s\big(A\cap\bar{B}(x,r(x))\big)>t\,\big(2r(x)\big)^s.$$

Peruspeitelauseesta 2.43 seuraa, että on olemassa erilliset kuulat $B_i=\bar{B}(x_i,r(x_i))$ s.e. $B\subset\cup_i 5B_i$. Siten

$$\begin{aligned}
t\,\mathcal{H}^s_{10\delta}(B) &\leq t\sum_i d(5B_i)^s\\
&=5^s t\sum_i d(B_i)^s\\
&\leq 5^s\sum_i \mathcal{H}^s(A\cap B_i)\\
&\leq 5^s\mathcal{H}^s(A\cap U)\\
&\leq 5^s\varepsilon.
\end{aligned}$$

Antamalla $\varepsilon\to 0$ saadaan $\mathcal{H}^s_{10\delta}(B)=0$, josta seuraa edelleen $\mathcal{H}^s(B)=0$, kun $\delta\to 0$. □

Korollari 2.53. *Olkoot $A,B\subset\mathbb{R}^n$ $\mathcal{H}^s$-mitallisia s.e. $B\subset A$ ja $\mathcal{H}^s(A)<\infty$. Silloin $\mathcal{H}^s$-m.k. $x\in B$ pätee:*

$$\Theta^{*s}(A,x)=\Theta^{*s}(B,x)\quad \textit{ja}\quad \Theta^s_*(A,x)=\Theta^s_*(B,x).$$

Todistus.

$$\frac{\mathcal{H}^s\big(A\cap\bar{B}(x,r)\big)}{(2r)^s}=\underbrace{\frac{\mathcal{H}^s\big((A\setminus B)\cap\bar{B}(x,r)\big)}{(2r)^s}}_{\xrightarrow{r\to 0+}0\ \mathcal{H}^s\text{-m.k. }x\in B}+\frac{\mathcal{H}^s\big(B\cap\bar{B}(x,r)\big)}{(2r)^s}.$$

□

Määritelmä 2.54. Sanomme, että piste $x \in E$ on joukon $E \subset \mathbb{R}^n$ *s-säännöllinen piste*, jos

$$\Theta^{*s}(E,x) = \Theta^s_*(E,x) = 1.$$

Jos $x \in E$ ei ole s-säännöllinen, niin sanomme, että se on E:n s-epäsäännöllinen piste.

Millaisen joukon $\mathcal{H}^s$-m.k. pisteet ovat s-säännöllisiä?

Lause 2.55. *(a) Jos $E \subset \mathbb{R}^n$ on 1-suoristuva ja $\mathcal{H}^1(E) < \infty$, niin*

$$\Theta^1_*(E,x) = \Theta^{*1}(E,x) = 1 \quad \mathcal{H}^1\text{-m.k. } x \in E.$$

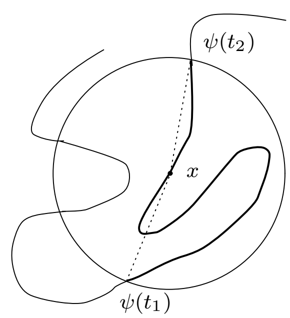
(b) Jos $F \subset \mathbb{R}^2$ on täysin 1-epäsuoristuva, niin

$$\Theta^1_*(F,x) \le 3/4 \quad \mathcal{H}^1\text{-m.k. } x \in F.$$

Todistus. Sivuutamme (b)-kohdan todistuksen (ks. Falconerin kirja [Fa1, s. 40-44]) ja todistamme vain (a)-kohdan.

1. Olkoon $E = \Gamma$ suoristuva kaari ja ψ sen parametriesitys. Oletetaan, ettei $x = \psi(t_0) \in \Gamma$ ole Γ:n päätepiste. Silloin kaikilla riittävän pienillä $r > 0$ on olemassa $t_1 < t_0$ ja $t_2 > t_0$ s.e. $\psi(t_1), \psi(t_2) \in \partial B(x,r)$ ja $\psi]t_1,t_2[\subset B(x,r)$. Jos P on ortogonaalinen projektio x:n ja $\psi(t_1)$:n kautta kulkevalle suoralle, niin

$$\mathcal{H}^1(\psi[t_1,t_0] \cap \bar{B}(x,r)) \ge \mathcal{H}^1\big(P(\psi[t_1,t_0] \cap \bar{B}(x,r))\big) \ge r.$$



Tarkastelemalla samoin projektiota x:n ja $\psi(t_2)$:n väliselle suoralle havaitaan, että

$$\mathcal{H}^1\big(\Gamma \cap \bar{B}(x,r)\big) \ge 2r$$

kaikilla riittävän pienillä $r > 0$. Siten $\Theta^1_*(\Gamma,x) \ge 1$, jos x ei ole Γ:n päätepiste. Lauseen 2.50 (a)-kohdasta seuraa nyt, että

$$1 \le \Theta^1_*(E,x) \le \Theta^{*1}(E,x) \le 1$$

$\mathcal{H}^1$-m.k. $x \in E = \Gamma$.

2. Jos $E \subset \Gamma$, missä Γ on suoristuva kaari, niin (a)-kohdan väite seuraa edellä todistetusta ja Korollari 2.53:sta.

3. Yleisessä tapauksessa yläraja $\Theta^{*1}(E,x) \le 1$ $\mathcal{H}^1$-m.k. $x \in E$ seuraa Lauseen 2.50 (a)-kohdasta. Tätä varten oletamme, että $\mathcal{H}^1(E) < \infty$. Koska E on 1-suoristuva, niin

$$E = E_0 \cup \bigcup_j E_j,$$

missä $\mathcal{H}^1(E_0) = 0$ ja $E_j = E \cap \Gamma_j \subset \Gamma_j$, missä Γ_j on suoristuva kaari. Siten $\mathcal{H}^1$-melkein jokainen E:n piste on jonkin E_j:n piste ja näin ollen

$$\Theta^1_*(E,x) \ge \Theta^1_*(E_j,x) \ge 1$$

$\mathcal{H}^1$-m.k. $x \in E_j$. Siis $\Theta^1_*(E,x) \ge 1$ $\mathcal{H}^1$-m.k. $x \in E$.

□

3 $\mathbb{R}^n$:n Radon-mittojen kompaktius- ja konvergenssilauseita

3.1 Rieszin esityslause

Tässä luvussa tarkastelemme vain $\mathbb{R}^n$:n Radonin mittoja, mutta uudesta näkökulmasta: Selvitämme millaiset jatkuvien funktioiden operaatiot ("funktionaalit") vastaavat integroimista Radon-mittojen suhteen. Tämä tulee seuraavassa osiossa antamaan luonnolliset kompaktius- ja konvergenssikäsitteet $\mathbb{R}^n$:n Radon-mitoille.

Merkitään

$$C_0(\mathbb{R}^n) = \{f \in C(\mathbb{R}^n)\colon \operatorname{supp}(f) \subset \mathbb{R}^n \text{ kompakti}\}.$$

Tässä $C(\mathbb{R}^n)$ on $\mathbb{R}^n$:n jatkuvien funktioiden $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ avaruus ja

$$\operatorname{supp}(f) = \overline{\{x \in \mathbb{R}^n\colon f(x) \neq 0\}}$$

on f:n *kantaja*. Koska kaikki $C_0(\mathbb{R}^n)$:n alkiot ovat rajoitettuja funktioita, voimme varustaa $C_0(\mathbb{R}^n)$:n normilla

$$\|f\| = \sup_{x\in\mathbb{R}^n} |f(x)|.$$

Seuraava tulos on ratkaisevan tärkeä lukuisten sovellusten takia. Lause voidaan todistaa jokaisessa lokaalisti kompaktissa Hausdorff-avaruudessa (ks. Rudin [Ru]), mutta alla esitettävä $\mathbb{R}^n$:n tapaus on helpompi, sillä voimme käyttää Luvun 1 koneistoa, erityisesti metrisiä ulkomittoja.

Määritelmä 3.2. Kuvaus $\Lambda\colon C_0(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}$ on *lineaarinen* ja *positiivinen funktionaali*, jos

(i) $\Lambda(\alpha f_1 + \beta f_2) = \alpha\Lambda(f_1) + \beta\Lambda(f_2)$ kaikilla $f_1, f_2 \in C_0(\mathbb{R}^n)$ ja kaikilla $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

(ii) $\Lambda(f) \ge 0$ aina, kun $f \in C_0(\mathbb{R}^n)$ ja $f(x) \ge 0$ $\forall x \in \mathbb{R}^n$.

Jos μ on Radon-mitta $\mathbb{R}^n$:ssä, niin

$$\Lambda_\mu(f) = \int_{\mathbb{R}^n} f\, d\mu, \quad f \in C_0(\mathbb{R}^n)$$

on positiivinen lineaarinen funktionaali. Nimittäin f on integroituva, sillä f on rajoitettu ja kompaktikantajainen ja $\mu(\operatorname{supp}(f)) < \infty$, koska μ on Radon-mitta.

Syvällistä on, että myös käänteinen pätee:

Lause 3.3 (Rieszin esityslause)**.** *Olkoon $\Lambda\colon C_0(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}$ positiivinen ja lineaarinen funktionaali. Silloin on olemassa yksikäsitteinen Radonin mitta μ, tarkemmin mitta-avaruus $(\mathbb{R}^n, \mathrm{Bor}(\mathbb{R}^n), \mu)$, jolle pätee:*

$$\Lambda(f) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\, d\mu(x)$$

kaikilla $f \in C_0(\mathbb{R}^n)$.

Rieszin esityslauseen todistusta varten tarvitsemme aputuloksen.

Lemma 3.4. *(a) Olkoon $V \subset \mathbb{R}^n$ avoin ja $K \subset V$ kompakti. Silloin on olemassa $f \in C_0(\mathbb{R}^n)$ s.e.*

$$\mathrm{supp}(f) \subset V \quad \textit{ja} \quad \chi_K(x) \leq f(x) \leq 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

(b) Olkoot $V_j \subset \mathbb{R}^n$, $j = 1, \ldots, m$, avoimia ja $K \subset \bigcup_{j=1}^m V_j$ kompakti. Silloin on olemassa funktiot $h_j \in C_0(\mathbb{R}^n)$, joille pätee

$$0 \leq h_j \leq 1, \quad \mathrm{supp}(h_j) \subset V_j \quad \textit{ja} \quad \chi_K \leq \sum_{j=1}^m h_j \leq 1.$$

Todistus.

(a) Merkitään $\delta = \mathrm{dist}(K, \partial V)$. Koska K on kompakti, niin $\delta > 0$. Silloin funktio

$$f(x) = \max\bigl(0, 1 - \frac{2}{\delta}\,\mathrm{dist}(x, K)\bigr)$$

toteuttaa (a)-kohdan ehdot.

(b) Jokaisella $x \in K$ on olemassa kuula $B(x, r_x)$, jolle $B(x, 2r_x) \subset V_j$ jollakin j. Koska K on kompakti, niin se voidaan peittää äärellisen monella tällaisella kuulalla, ts.

$$K \subset \bigcup_{i=1}^k B(x_i, r_{x_i}).$$

Olkoon A_j niiden suljettujen kuulien $\bar{B}(x_i, r_{x_i})$ yhdiste, joilla $B(x_i, 2r_{x_i}) \subset V_j$. Silloin

$$A_j \subset V_j \quad \text{ja} \quad K \subset \bigcup_{j=1}^m A_j.$$

Valitaan (a)-kohdan nojalla funktiot $g_j \in C_0(\mathbb{R}^n)$ s.e.

$$\chi_{A_j} \leq g_j \leq 1 \quad \text{ja} \quad \mathrm{supp}(g_j) \subset V_j.$$

Määritellään sitten

$$\begin{aligned} h_1 &= g_1, \\ h_2 &= (1 - g_1) g_2, \\ &\ \vdots \\ h_m &= (1 - g_1) \cdots (1 - g_{m-1}) g_m. \end{aligned}$$

Tällöin selvästi

$$0 \le h_j \le 1 \quad \text{ja} \quad \operatorname{supp}(h_j) \subset V_j.$$

Induktiolla m:n suhteen nähdään, että $\sum_{j=1}^m h_j = 1 - (1-g_1)\cdots(1-g_m)$. Lisäksi

$$\chi_K \le \sum_{j=1}^m h_j \le 1,$$

sillä jos $x \in K$, niin $x \in A_j$ jollakin j jolloin $1 - g_j(x) = 0$ ja siten $\sum_{j=1}^m h_j(x) = 1$.

□

Rieszin esityslauseen todistus. Määritellään

$$\tilde{\mu}(\emptyset) = 0$$

ja asetetaan

$$\tilde{\mu}(V) = \sup\{\Lambda(f) \colon f \in C_0(\mathbb{R}^n),\ 0 \le f \le 1 \text{ ja } \operatorname{supp}(f) \subset V\}$$

jokaisella *avoimella* joukolla $V \subset \mathbb{R}^n$. Tällöin suoraan määritelmän nojalla

$$0 \le \tilde{\mu}(V_1) \le \tilde{\mu}(V_2), \tag{3.5}$$

jos $V_1, V_2 \subset \mathbb{R}^n$ ovat avoimia ja $V_1 \subset V_2$.

Määritellään sitten

$$\tilde{\mu}(A) = \inf\{\tilde{\mu}(V) \colon A \subset V \subset \mathbb{R}^n,\ V \text{ avoin}\} \tag{3.6}$$

jokaisella $A \subset \mathbb{R}^n$ ja osoitetaan, että $\tilde{\mu}$ on *metrinen* ulkomitta. Tällöin $\mathbb{R}^n$:n Borel-joukot ovat $\tilde{\mu}$-mitallisia Lauseen 1.18 nojalla.

1. *Monotonisuus*

$$\tilde{\mu}(A_1) \le \tilde{\mu}(A_2), \quad \text{jos } A_1 \subset A_2,$$

seuraa suoraan (3.5):stä ja määritelmästä (3.6).

2. Osoitetaan ensin *subadditiivisuus* avoimille joukoille. Toisin sanoen, jos $V_j \subset \mathbb{R}^n,\ j \in \mathbb{N}$, ovat avoimia, niin

$$\tilde{\mu}\Big(\bigcup_{j=1}^{\infty} V_j\Big) \le \sum_{j=1}^{\infty} \tilde{\mu}(V_j). \tag{3.7}$$

Tämän osoittamiseksi olkoon $f \in C_0(\mathbb{R}^n)$ s.e. $0 \le f \le 1$ ja $\operatorname{supp}(f) \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} V_j$. Joukon $\operatorname{supp}(f)$ kompaktisuuden nojalla

$$\operatorname{supp}(f) \subset \bigcup_{j=1}^{m} V_j.$$

Merkitään $K = \operatorname{supp}(f)$. Lemman 3.4 (b)-kohdasta seuraa, että on olemassa funktiot $h_j \in C_0(\mathbb{R}^n)$, joille pätee

$$0 \le h_j \le 1, \quad \operatorname{supp}(h_j) \subset V_j \quad \text{ja} \quad \chi_K \le \sum_{j=1}^m h_j \le 1.$$

Silloin

$$f = \sum_{j=1}^{m} h_j f,$$

$$\operatorname{supp}(h_j f) \subset V_j \quad \text{ja} \quad 0 \le h_j f \le 1 \quad \forall\ j = 1, \dots, m,$$

joten

$$\Lambda(f) = \sum_{j=1}^{m} \Lambda(h_j f) \le \sum_{j=1}^{m} \tilde{\mu}(V_j) \le \sum_{j=1}^{\infty} \tilde{\mu}(V_j).$$

Ottamalla sup yli kaikkien $\tilde{\mu}\big(\cup_j V_j\big)$:n määritelmässä "sallittujen" funktioiden f saadaan (3.7).
Olkoot sitten $A_j \subset \mathbb{R}^n, j \in \mathbb{N}$, mielivaltaisia joukkoja. Kiinnitetään $\varepsilon > 0$ ja valitaan avoimet joukot $V_j \subset \mathbb{R}^n$ s.e. $A_j \subset V_j$ ja

$$\tilde{\mu}(V_j) \le \tilde{\mu}(A_j) + \varepsilon/2^j.$$

Silloin

$$\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} V_j,$$

joten monotonisuudesta ja (3.7):stä saadaan

$$\tilde{\mu}\Big(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j\Big) \le \tilde{\mu}\Big(\bigcup_{j=1}^{\infty} V_j\Big) \le \sum_{j=1}^{\infty} \tilde{\mu}(V_j) \le \sum_{j=1}^{\infty} \tilde{\mu}(A_j) + \varepsilon,$$

mistä seuraa subadditiivisuus kaikille joukoille antamalla $\varepsilon \to 0$. Olemme todistaneet, että $\tilde{\mu}$ on ulkomitta.

3. Olkoot $V_1, V_2 \subset \mathbb{R}^n$ avoimia ja $\operatorname{dist}(V_1, V_2) > 0$. Olkoon edelleen $f_j \in C_0(\mathbb{R}^n)$ s.e. $0 \le f_j \le 1$ ja $\operatorname{supp}(f_j) \subset V_j,\ j = 1, 2$. Silloin $0 \le f_1 + f_2 \le 1$ ja $\operatorname{supp}(f_1 + f_2) \subset V_1 \cup V_2$, joten

$$\Lambda(f_1) + \Lambda(f_2) = \Lambda(f_1 + f_2) \le \tilde{\mu}(V_1 \cup V_2).$$

Ottamalla sup yli kaikkien sallittujen funktioiden f_1 ja f_2 saadaan

$$\tilde{\mu}(V_1) + \tilde{\mu}(V_2) \le \tilde{\mu}(V_1 \cup V_2) \overset{(3.7)}{\le} \tilde{\mu}(V_1) + \tilde{\mu}(V_2). \tag{3.8}$$

Olkoot sitten $A_1, A_2 \subset \mathbb{R}^n$ mielivaltaisia joukkoja, joille $\operatorname{dist}(A_1, A_2) > 0$. Kiinnitetään $\varepsilon > 0$ ja valitaan avoin $V \subset \mathbb{R}^n$ s.e. $A_1 \cup A_2 \subset V$ ja

$$\tilde{\mu}(V) \le \tilde{\mu}(A_1 \cup A_2) + \varepsilon.$$

Valitaan sitten avoimet joukot $V_j \subset \mathbb{R}^n,\ j = 1, 2$, s.e. $A_j \subset V_j$ ja $\operatorname{dist}(V_1, V_2) > 0$. (Voimme valita esimerkiksi $V_j = \{x \in \mathbb{R}^n\colon\ \operatorname{dist}(x, A_j) < \frac{1}{3}\operatorname{dist}(A_1, A_2)\}$.) Nyt $A_j \subset V_j \cap V$ ja

$$\operatorname{dist}(V_1 \cap V, V_2 \cap V) > 0,$$

joten (3.8):n nojalla

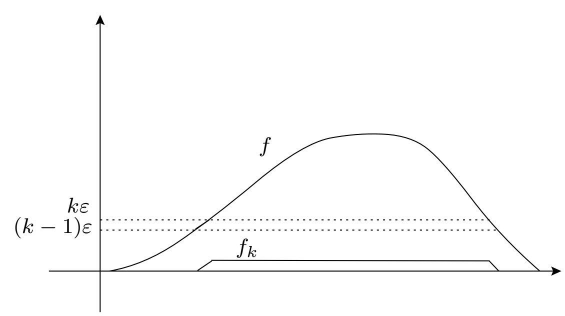
$$\begin{aligned}
\tilde{\mu}(A_1) + \tilde{\mu}(A_2) &\le \tilde{\mu}(V_1 \cap V) + \tilde{\mu}(V_2 \cap V) \\
&= \tilde{\mu}(V \cap (V_1 \cup V_2)) \\
&\le \tilde{\mu}(V) \\
&\le \tilde{\mu}(A_1 \cup A_2) + \varepsilon.
\end{aligned}$$

Antamalla nyt $\varepsilon \to 0$ nähdään, että $\tilde{\mu}$ on metrinen ulkomitta.

4. Osoitetaan seuraavaksi, että $\tilde{\mu}$ on lokaalisti äärellinen: Jos $B(x,r) \subset \mathbb{R}^n$, niin valitaan $f_0 \in C_0(\mathbb{R}^n)$ s.e. $0 \le f_0 \le 1$ ja
$$\chi_{B(x,r)} \le f_0.$$
Tällöin $f \le f_0$ kaikille $\tilde{\mu}\big(B(x,r)\big)$:n määritelmässä sallitulle funktioille f. Koska $\Lambda(f_0 - f) \ge 0$, niin
$$\Lambda(f) \le \Lambda(f_0).$$
Ottamalla sup yli kaikkien tällaisten funktioiden f saadaan
$$\tilde{\mu}\big(B(x,r)\big) = \sup_f \Lambda(f) \le \Lambda(f_0) < \infty.$$
Korollari 1.29:n mukaan
$$\mu = \tilde{\mu}|\operatorname{Bor}(\mathbb{R}^n)$$
on Radon-mitta.

5. Vielä on näytettävä, että
$$\Lambda(f) = \int_{\mathbb{R}^n} f \, d\mu$$
kaikilla $f \in C_0(\mathbb{R}^n)$.

Olkoon $f \in C_0(\mathbb{R}^n)$. Voimme olettaa, että $f \ge 0$, sillä $f = f_+ - f_-$, missä $f_+ = \max(0,f) \in C_0(\mathbb{R}^n)$ ja $f_- = \max(0,-f) \in C_0(\mathbb{R}^n)$. Kiinnitetään $\varepsilon > 0$ ja asetetaan kaikilla $k \in \mathbb{N}$
$$f_k(x) = \max\big((k-1)\varepsilon, \min(f(x), k\varepsilon)\big) - (k-1)\varepsilon.$$



Selvästi $0 \le f_k \le \varepsilon$ ja $f_k \in C_0(\mathbb{R}^n)$ kaikilla k. Koska $f_k \equiv 0$, jos $(k-1)\varepsilon \ge \|f\|_\infty$, niin
$$f = \sum_{k=1}^m f_k$$
jollakin $m \in \mathbb{N}$. Olkoon $K(k) = \{x \in \mathbb{R}^n \colon f(x) \ge k\varepsilon\},\ k \in \mathbb{N}$ ja $K(0) = \operatorname{supp}(f)$. Tällöin

$$\varepsilon\chi_{K(k)} \le f_k \le \varepsilon\chi_{K(k-1)}, \tag{3.9}$$

joten

$$\varepsilon \sum_{k=1}^m \mu\big(K(k)\big) \le \sum_{k=1}^m \int_{\mathbb{R}^n} f_k \, d\mu = \int_{\mathbb{R}^n} f \, d\mu \le \varepsilon \sum_{k=1}^m \mu\big(K(k-1)\big). \tag{3.10}$$

Toisaalta, jos $\delta > 0$, niin (3.9):n nojalla

$$\frac{1}{\varepsilon}(1+\delta)f_k \geq 1$$

jossakin $K(k)$:n ympäristössä W. Erityisesti

$$\frac{1}{\varepsilon}(1+\delta)f_k \geq g$$

jokaisella $\mu(W)$:n määritelmässä sallitulla funktiolla $g \in C_0(\mathbb{R}^n)$. Näin ollen

$$\Lambda\big((1+\delta)f_k\big) \geq \varepsilon\mu(W) \geq \varepsilon\mu\big(K(k)\big),$$

josta saadaan

$$\Lambda(f_k) \geq \varepsilon\mu\big(K(k)\big)$$

antamalla $\delta \to 0$. Vastaavasti f_k/ε on sallittu $\mu(V)$:n määritelmässä jokaisella $K(k-1)$:n ympäristöllä V, joten $\Lambda(f_k) \leq \varepsilon\mu(V)$. Tällöin määritelmän nojalla

$$\Lambda(f_k) \leq \varepsilon\mu\big(K(k-1)\big).$$

Yhdistämällä nämä arviot saadaan

$$\sum_{k=1}^{m} \varepsilon\mu\big(K(k)\big) \leq \Lambda(f) \leq \varepsilon\sum_{k=1}^{m}\mu\big(K(k-1)\big). \tag{3.11}$$

Arvioista (3.10) ja (3.11) seuraa, että

$$\begin{aligned}\Big|\lambda(f) - \int_{\mathbb{R}^n} f\,d\mu\Big| &\leq \varepsilon\sum_{k=1}^{m}\Big(\mu\big(K(k-1)\big) - \mu\big(K(k)\big)\Big)\\ &= \varepsilon\Big(\mu\big(K(0)\big) - \mu\big(K(m)\big)\Big)\\ &\leq \varepsilon\underbrace{\mu\big(\operatorname{supp}(f)\big)}_{<\infty}.\end{aligned}$$

Antamalla $\varepsilon \to 0$ nähdään, että

$$\Lambda(f) = \int_{\mathbb{R}^n} f\,d\mu$$

ja siten μ on etsitty Radon-mitta.

6. Osoitetaan lopuksi μ:n yksikäsitteisyys. Olkoon μ_1 myös Radon-mitta, jolle

$$\Lambda(f) = \int_{\mathbb{R}^n} f\,d\mu_1$$

kaikilla $f \in C_0(\mathbb{R}^n)$. Olkoon $V \subset \mathbb{R}^n$ avoin ja rajoitettu. Lemman 3.4 nojalla on olemassa jono $f_j \in C_0(\mathbb{R}^n)$ s.e.

$$0 \leq f_1(x) \leq f_2(x) \leq \cdots \leq f_j(x) \to \chi_V(x)$$

kaikilla $x \in \mathbb{R}^n$. Monotonisen konvergenssin lauseen mukaan

$$\begin{aligned}\mu_1(V) &= \lim_{j\to\infty} \int f_j \, d\mu_1 \\ &= \lim_{j\to\infty} \Lambda(f_j) \\ &= \lim_{j\to\infty} \int f_j \, d\mu \\ &= \mu(V).\end{aligned}$$

Koska $\mathrm{Bor}(\mathbb{R}^n)$ on avointen ja rajoitettujen joukkojen virittämä σ-algebra, niin $\mu_1 = \mu$ ($\mathrm{Bor}(\mathbb{R}^n)$:ssä).

$\square$

Määritellään $\mathbb{R}^n$:n Radon-mitan μ *kantaja*, $\mathrm{supp}(\mu)$, pieninpänä suljettuna joukkona, jonka ulkopuolella μ häviää. Täsmällisemmin,

$$\mathrm{supp}(\mu) = \mathbb{R}^n \setminus \bigcup \{V : V \subset \mathbb{R}^n \text{ avoin ja } \mu(V) = 0\}.$$

Korollari 3.12. *Olkoon $K \subset \mathbb{R}^n$ kompakti ja $\Lambda \colon C(K) \to \mathbb{R}$ positiivinen ja lineaarinen funktionaali. Silloin on olemassa yksikäsitteinen äärellinen Borel-mitta μ joukossa K s.e.*

$$\Lambda(f) = \int_K f(x) \, d\mu(x)$$

kaikilla $f \in C(K)$.

Todistus. (HT) $\square$

3.13 Mittojen heikko suppeneminen

Määritelmä 3.14. Olkoot μ_k, $k \in \mathbb{N}$, Radon-mittoja $\mathbb{R}^n$:ssä. Sanomme, että jono (μ_k) *suppenee heikosti* kohti Radon-mittaa μ, jos

$$\lim_{k\to\infty} \int_{\mathbb{R}^n} f \, d\mu_k = \int_{\mathbb{R}^n} f \, d\mu$$

kaikilla $f \in C_0(\mathbb{R}^n)$. Tällöin merkitään $\mu_k \rightharpoonup \mu$ tai $\mu_k \xrightarrow{\mathrm{w}} \mu$.

Esimerkki 3.15. (i) $\mathbb{R}$:ssä pätee $\delta_k \rightharpoonup 0$.

(ii) Olkoon $\mu_k = \frac{1}{k}\big(\delta_{1/k} + \delta_{2/k} + \cdots + \delta_{k/k}\big)$. Silloin kaikilla $f \in C_0(\mathbb{R})$

$$\int_{\mathbb{R}} f \, d\mu_k = \sum_{j=1}^{k} \frac{1}{k} f(j/k) \xrightarrow{k\to\infty} \int_0^1 f(x) \, dx,$$

sillä summat ovat funktion f tiheneviä Riemannin summia välillä $[0,1]$. Siis $\mu_k \rightharpoonup m_1 \llcorner [0,1]$.

Helpot esimerkit (kuten 3.15) osoittavat, ettei aina päde $\mu_k(A) \to \mu(A)$, jos $\mu_k \rightharpoonup \mu$. Kuitenkin pätee:

Lause 3.16. *Olkoot μ, μ_k, $k \in \mathbb{N}$, Radon-mittoja $\mathbb{R}^n$:ssä s.e. $\mu_k \rightharpoonup \mu$. Tällöin* *(a)* $\limsup_{k\to\infty} \mu_k(K) \le \mu(K)$, *jos* $K \subset \mathbb{R}^n$ *on kompakti,*

(b) $\liminf_{k\to\infty} \mu_k(V) \ge \mu(V)$, *jos* $V \subset \mathbb{R}^n$ *on avoin.*

Todistus.

(a) Olkoon $K \subset \mathbb{R}^n$ kompakti ja $V \subset \mathbb{R}^n$ avoin s.e. $K \subset V$. Valitaan Lemman 3.4 (a)-kohdan nojalla funktio $f \in C_0(\mathbb{R}^n)$, jolle pätee $\chi_K \le f \le 1$ ja $\mathrm{supp}(f) \subset V$. Tällöin

$$\begin{aligned}\mu(V) &\ge \int_{\mathbb{R}^n} f\,d\mu \\ &= \lim_{k\to\infty} \int_{\mathbb{R}^n} f\,d\mu_k \\ &\ge \limsup_{k\to\infty} \mu_k(K).\end{aligned}$$

Koska tämä pätee kaikilla avoimilla $V \supset K$, saadaan (a)-kohdan väite.

(b) Jos $V \subset \mathbb{R}^n$ on avoin, niin olkoon $K \subset V$ kompakti. Samoin kuin edellä saadaan, että

$$\mu(K) \le \liminf_{k\to\infty} \mu_k(V).$$

Koska μ on Radon-mitta,

$$\mu(V) = \sup\{\mu(K) \colon K \subset V \text{ kompakti}\},$$

joten (b)-kohta on todistettu.

□

3.17 Mittojen kompaktius

Mittojen heikko suppeneminen on paitsi luonnollinen myös erittäin hyödyllinen käsite. Rajoitettujen Radon-mittojen perheet ovat nimittäin jonokompakteja. Tämä on monissa tapauksissa ainoa tunnettu keino konstruoida haluttuja mittoja (heikosti suppenevien jonojen rajamittoina).

Lause 3.18. *Olkoon* (μ_k) *jono Radon-mittoja* $\mathbb{R}^n$*:ssä, jolle*

$$\sup_k \mu_k(K) < \infty$$

kaikilla kompakteilla $K \subset \mathbb{R}^n$*. Silloin on olemassa osajono* (μ_{k_j}) *ja Radon-mitta* μ*, joille*

$$\mu_{k_j} \rightharpoonup \mu.$$

Lauseen todistamista varten tarvitsemme seuraavan aputuloksen.

Lemma 3.19. *Normiavaruus* $\big(C_0(\mathbb{R}^n), \|\cdot\|\big)$*, missä* $\|f\| = \sup\{|f(x)| \colon x \in \mathbb{R}^n\}$*, on separoituva eli on olemassa numeroituva tiheä joukko* $\mathcal{F} = \{f_j\}_{j=1}^\infty \subset C_0(\mathbb{R}^n)$*. Toisin sanoen, jos* $f \in C_0(\mathbb{R}^n)$ *ja* $\varepsilon > 0$*, niin* $\|f - f_j\| < \varepsilon$ *jollakin* $f_j \in \mathcal{F}$*.*

Todistus. (HT)

Lauseen 3.18 todistus. Oletetaan ensin, että

$$\sup_k \mu_k(\mathbb{R}^n) = A < \infty. \tag{3.20}$$

Olkoon $\{f_j\}_{j=1}^\infty$ tiheä joukko $C_0(\mathbb{R}^n)$:ssä. Oletuksesta (3.20) seuraa, että

$$\Big\{\int_{\mathbb{R}^n} f_1\, d\mu_k \colon k \in \mathbb{N}\Big\}$$

on rajoitettu $\mathbb{R}$:n osajoukko, joten on olemassa (μ_k):n osajono (μ_k^1) s.e.

$$\int_{\mathbb{R}^n} f_1\, d\mu_k^1 \xrightarrow{k\to\infty} a_1$$

jollakin $a_1 \in \mathbb{R}$. Valitaan induktiivisesti jokaisella $j \geq 2$ jonon $\{\mu_k^{j-1}\}$ osajono $\{\mu_k^j\}$ s.e.

$$\int_{\mathbb{R}^n} f_j\, d\mu_k^j \xrightarrow{k\to\infty} a_j$$

jollakin $a_j \in \mathbb{R}$. Silloin diagonaalijono $\{\mu_k^k\}_{k=1}^\infty$ toteuttaa

$$\lim_{k\to\infty} \int_{\mathbb{R}^n} f_j\, d\mu_k^k = a_j \tag{3.21}$$

kaikilla $j \geq 1$. Olkoon L funktioiden f_j virittämä vektoriavaruus,

$$L = \Big\{g = \sum_{j=1}^m \lambda_j f_j \colon \lambda_j \in \mathbb{R},\ m \in \mathbb{N}\Big\}.$$

Asetetaan

$$\Lambda(g) = \sum_j \lambda_j a_j,$$

kun

$$g = \sum_j \lambda_j f_j.$$

Silloin (3.21):n nojalla

$$\Lambda(g) = \lim_{k\to\infty} \int_{\mathbb{R}^n} g\, d\mu_k^k$$

kaikilla $g \in L$. Erityisesti Λ on hyvin määritelty, positiivinen ja lineaarinen funktionaali L:ssä. Lisäksi (3.20):stä seuraa, että

$$|\Lambda(g)| \leq A\,\|g\| \tag{3.22}$$

kaikilla $g \in L$. Jos $f \in C_0(\mathbb{R}^n)$ on mielivaltainen, niin valitaan jono (h_j), $h_j \in L$, s.e.

$$\|f - h_j\| \xrightarrow{j\to\infty} 0,$$

ja asetetaan

$$\Lambda(f) = \lim_{j\to\infty} \Lambda(h_j).$$

Silloin (3.22):sta seuraa, että Λ on hyvin määritelty $C_0(\mathbb{R}^n)$:ssä ja (3.22) pätee kaikilla $g \in C_0(\mathbb{R}^n)$. Lisäksi Λ on positiivinen lineaarinen funktionaali $C_0(\mathbb{R}^n)$:ssä. Jos nimittäin $f \geq 0$ ja $\|f - h_j\| \to 0$, niin $\liminf_{j\to\infty}(\min h_j) \geq 0$, joten

$$\Lambda(f) = \lim_{j\to\infty} \lim_{k\to\infty} \int_{\mathbb{R}^n} h_j \, d\mu_k^k \geq 0,$$

sillä $\int h_j \, d\mu_k^k \geq A \min(0, \min h_j)$. Rieszin esityslauseen nojalla on olemassa Radon-mitta μ s.e.

$$\Lambda(f) = \int_{\mathbb{R}^n} f \, d\mu$$

kaikilla $f \in C_0(\mathbb{R}^n)$. Osoitetaan seuraavaksi, että $\mu_k^k \rightharpoonup \mu$. Olkoon $\varepsilon > 0$. Kun $f \in C_0(\mathbb{R}^n)$, niin valitaan sellainen $g \in L$, että $\|f - g\| \leq \frac{\varepsilon}{2A}$. Silloin suurilla k:n arvoilla

$$\begin{aligned}
\Big|\Lambda(f) - \int_{\mathbb{R}^n} f \, d\mu_k^k\Big| &\leq |\Lambda(f-g)| + \underbrace{\Big|\Lambda(g) - \int_{\mathbb{R}^n} g \, d\mu_k^k\Big|}_{\leq\varepsilon} + \Big|\int_{\mathbb{R}^n} (g-f) \, d\mu_k^k\Big| \\
&\leq A\|f-g\| + \varepsilon + A\|f-g\| \\
&\leq 2\varepsilon.
\end{aligned}$$

Siis $\mu_k^k \rightharpoonup \mu$. Lopuksi luovutaan vielä oletuksesta (3.20). Oletuksesta, että

$$\sup_k \mu_k(K) < \infty$$

kaikilla kompakteilla $K \subset \mathbb{R}^n$ ja edellä olleesta päättelystä seuraa, että jokaisella $m \in \mathbb{N}$ on olemassa (μ_k):n osajono (μ_k^m) s.e. $\{\mu_k^m : k \in \mathbb{N}\} \subset \{\mu_k^{m-1} : k \in \mathbb{N}\}$ ja

$$\mu_k^m \llcorner B(0,m) \rightharpoonup \nu^m,$$

missä ν^m on Radon-mitta, jolle $\operatorname{supp}(\nu^m) \subset \bar{B}(0,m)$. Silloin diagonaalijonolle μ_k^k pätee

$$\mu_k^k \llcorner B(0,m) \rightharpoonup \nu^m$$

kaikilla $m \in \mathbb{N}$. Siten $\nu^m \llcorner B(0,\ell) = \nu^\ell$, kun $\ell \leq m$. Voimme siten määritellä $\mathbb{R}^n$:n Radon-mitan μ asettamalla

$$\mu(E) = \nu^1\big(E \cap B(0,1)\big) + \sum_{m\geq 2} \nu^m\Big(E \cap \big(B(0,m) \setminus B(0,m-1)\big)\Big), \quad E \in \operatorname{Bor}(R^n).$$

Kun $\operatorname{supp}(f) \subset B(0,m_0)$, niin

$$\int_{\mathbb{R}^n} f \, d\mu = \int_{\mathbb{R}^n} f \, d\nu^{m_0} = \lim_{k\to\infty} \int_{\mathbb{R}^n} f \, d\mu_k^k,$$

joten $\mu_k^k \rightharpoonup \mu$. $\square$

4 Fraktaalien Hausdorff-dimensiosta

4.1 Massajaon periaate ja Frostmanin lemma

Hausdorff-mitan (ja -dimension) arvioiminen alhaalta on yleensä vaikeaa. Esitämme seuraavaksi yksinkertaisen keinon, ns. *massajaon periaatteen*, joka usein ratkaisee kyseisen ongelman.

Lause 4.2. *Olkoon $K \subset \mathbb{R}^n$ kompakti. Oletetaan, että on olemassa $\mathbb{R}^n$:n Radon-mitta μ s.e.*

$$\mu(K) > 0$$

ja

$$\mu(C) \leq c_0 d(C)^s$$

kaikilla kompakteilla $C \subset \mathbb{R}^n$, joilla $d(C) \leq \delta_0$, missä $s > 0$ ja $\delta_0 > 0$ ovat vakioita. Tällöin

$$\dim_{\mathcal{H}}(K) \geq s.$$

Todistus. Jos $\{E_j\}_{j=1}^{\infty}$ on K:n δ-peite ja $0 < \delta \leq \delta_0$, niin

$$0 < \mu(K) \leq \mu\Big(\bigcup_{j=1}^{\infty} \bar{E}_j\Big) \leq \sum_{j=1}^{\infty} \mu(\bar{E}_j) \leq c_0 \sum_{j=1}^{\infty} d(\bar{E}_j)^s = c_0 \sum_{j=1}^{\infty} d(E_j)^s.$$

Siten

$$\mathcal{H}^s(K) \geq \mu(K)/c_0 > 0$$

ja näin ollen

$$\dim_{\mathcal{H}}(K) \geq s.$$

□

Edellä ollut todistaa myös seuraavan:

Lause 4.3. *Olkoon X separoituva metrinen avaruus ja $K \subset X$. Oletetaan, että on olemassa X:n ulkomitta μ s.e. $\mu(K) > 0$ ja*

$$\mu(U) \leq c_0 d(U)^s$$

kaikilla $U \subset X$, joilla $d(U) \leq \delta_0$, missä $s > 0$ ja $\delta_0 > 0$ ovat vakioita. Tällöin $\dim_{\mathcal{H}}(K) \geq s$.

Esimerkki 4.4. Olkoon $C(1/3)$ tavallinen Cantorin 1/3-joukko,

$$C_n(1/3) = \bigcup_{i=1}^{2^n} I_{n,i}$$

n:n vaiheen approksimaatio, jolloin

$$C(1/3) = \bigcap_{n=1}^{\infty} C_n(1/3).$$

Konstruoidaan seuraavaksi $C(1/3)$:lle "luonnollinen" mitta μ. Määritellään jono Radon-mittoja (μ_n) asettamalla

$$\mu_n = \frac{3^n}{2^n} m_1 \llcorner C_n(1/3), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Silloin

$$
\begin{aligned}
\mu_n(I_{n,i}) &= 2^{-n} \quad \forall i = 1, \dots, 2^n;\\
\mu_n \llcorner I_{n,i} &= \frac{2^{-n}}{m_1(I_{n,i})} m_1 \llcorner I_{n,i} \quad \forall i = 1, \dots, 2^n;\\
\operatorname{supp}(\mu_n) &= C_n(1/3);\\
\mu_n\bigl(C_n(1/3)\bigr) &= 1.
\end{aligned}
$$

Ensimmäisestä yhtälöstä seuraa, että

$$
\mu_n(I_{m,i}) = 2^{n-m} \cdot 2^{-n} = 2^{-m} \quad \forall m \le n,\ \forall i = 1, \dots, 2^m. \tag{4.5}
$$

(Tässä 2^{n-m} on $I_{m,i}$:n sisältämien välien $I_{n,j}$ lukumäärä.) Näin ollen μ_n jakaa mitan “tasan” Cantor-joukkoa approksimoiville väleille. Koska $\mu_n(\mathbb{R}) \equiv 1$, voimme Lauseen 3.18 nojalla valita osajonon (μ_{n_k}), joka suppenee heikosti kohti Radon-mittaa μ,

$$
\mu_{n_k} \rightharpoonup \mu, \quad \text{kun } k \to \infty.
$$

Jos $I_{m,i}$ on m:nen vaiheen väli, niin olkoon $U \subset \mathbb{R}$ sellainen avoin joukko, että $U \cap C_m(1/3) = I_{m,i}$. Lauseen 3.16 nojalla

$$
\begin{aligned}
2^{-m} &\overset{(4.5)}{=} \limsup_{k\to\infty} \mu_{n_k}(I_{m,i}) \le \mu(I_{m,i})\\
&\le \mu(U) \le \liminf_{k\to\infty} \mu_{n_k}(U)\\
&\overset{(4.5)}{=} 2^{-m}.
\end{aligned}
$$

Siten

$$
\mu(I_{m,i}) = 2^{-m},
$$

joten (4.5) pätee myös μ:lle, eli myös μ on “tasan jakautunut” kaikissa vaiheissa n. Helposti nähdään, että $\operatorname{supp}(\mu) = C(1/3)$.

Jos $E \subset \mathbb{R}$ on suljettu s.e.

$$
3^{-n} \le d(E) < 3^{-n+1},
$$

jollakin $n \in \mathbb{N}$, niin E voi leikata korkeintaan kahta n:nnen vaiheen väliä $I_{n,i}$. Näin ollen

$$
\mu(E) \le 2\,\mu(I_{n,i}) = 2 \cdot 2^{-n} = 2 \cdot (3^{-n})^s \le 2 \cdot d(E)^s,
$$

missä $s = \log 2 / \log 3$. Siten Lauseen 4.2 nojalla

$$
\dim_{\mathcal{H}}\bigl(C(1/3)\bigr) \ge s = \frac{\log 2}{\log 3}.
$$

Yhdistämällä tämä (helposti todistettavaan) arvioon $\mathcal{H}^s\bigl(C(1/3)\bigr) \le 1$ saadaan $\dim_{\mathcal{H}}\bigl(C(1/3)\bigr) = s$.

Vastaavia päättelyjä voidaan tehdä muissakin yhteyksissä. Niitä ennen todistamme seuraavan perustuloksen.

Lause 4.6 (Frostmanin lemma)**.** *Olkoon $K \subset \mathbb{R}^n$ kompakti ja $s > 0$. Silloin*

$$
\mathcal{H}^s(K) > 0,
$$

jos ja vain jos on olemassa $\mathbb{R}^n$:n Radon-mitta μ s.e.

$$
\operatorname{supp}(\mu) \subset K, \quad \mu(K) > 0 \quad \textit{ja} \quad \mu\bigl(B(x,r)\bigr) \le c_0\, r^s \ \forall x \in \mathbb{R}^n,\ \forall r > 0.
$$

Todistus. Suunta "$\Leftarrow$" seuraa Lauseesta 4.2. Jos nimittäin $C \subset \mathbb{R}^n$ on kompakti, niin $C \subset B\big(x, 2d(C)\big)$ kaikilla $x \in C$ ja siten

$$\mu(C) \le c\, d(C)^s.$$

Suunnan "$\Rightarrow$" todistus on paljon vaikeampi. Siinä käytetään ns. "stopping time"-tyyppisiä argumentteja. Tällaiset argumentit ovat erittäin hyödyllisiä monissa eri yhteyksissä, mm. harmonisessa analyysissa.

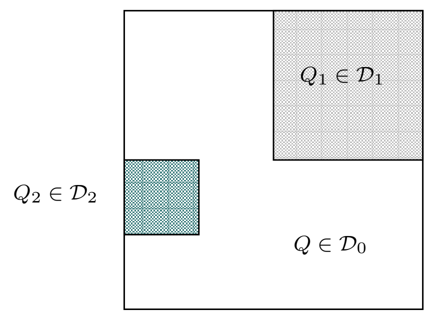
Voimme olettaa (ks. Lause 2.18 (c)), että $K \subset [0,1)^n$ ja $\mathcal{H}^s(K) > 0$.

Kutsumme kuutiota $[0,1)^n$ kertaluvun 0 *dyadiseksi kuutioksi.* Yleisesti *kertaluvun m dyadiset kuutiot* ovat joukkoja, jotka ovat muotoa

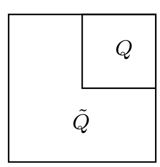
$$Q = \Big[\frac{j_1 - 1}{2^m}, \frac{j_1}{2^m}\Big) \times \Big[\frac{j_2 - 1}{2^m}, \frac{j_2}{2^m}\Big) \times \cdots \times \Big[\frac{j_n - 1}{2^m}, \frac{j_n}{2^m}\Big),$$

missä $1 \le j_1, j_2, \ldots, j_n \le 2^m,\ j_i \in \mathbb{N}$. Kertalukua m olevien kuutioiden sivunpituus on 2^{-m} ja nämä kuutiot saadaan siis jakamalla kertaluvun $m-1$ kuutiot 2^n:ään yhtäsuureen osakuutioon puolittamalla sivut. Olkoon

$$\mathcal{D}_m = \{Q \colon Q \text{ on kertaluvun } m \text{ dyadinen kuutio } [0,1)^n\text{:ssä}\}.$$



Jokaista kuutiota $Q \in \mathcal{D}_m,\ m \in \mathbb{N}$, kohti on olemassa yksikäsitteinen kertaluvun $m-1$ kuutio $\tilde{Q} \in \mathcal{D}_{m-1}$, joka sisältää Q:n ($Q \subset \tilde{Q}$).



Voimme olettaa (tarvittaessa skaalaamalla), että

$$K \not\subset Q, \quad \text{jos } Q \in \mathcal{D}_1.$$

Seuraavaksi käytetään oletusta $\mathcal{H}^s(K) > 0$. Tällöin nimittäin $\mathcal{H}^s_\delta(K) > 0$ jollakin $\delta > 0$, jolloin

$$\sum_{j=1}^{\infty} d(Q_j)^s \ge a_0 > 0, \tag{4.7}$$

aina, kun K peitetään dyadisilla kuutioilla $Q_j \in \cup_m \mathcal{D}_m$. Luvuksi a_0 voidaan valita esimerkiksi

$$a_0 = \min\{\delta^s, \mathcal{H}^s_\delta(K)\}.$$

Jokaisella $m \in \mathbb{N}$ määritellään mitta μ_m^m asettamalla $\mu_m^m \llcorner \mathbb{R}^n \setminus [0,1)^n = 0$ ja jokaisessa kuutiossa $Q \in \mathcal{D}_m$:

$$
\begin{cases}
\mu_m^m \llcorner Q = \frac{2^{-ms}}{m_n(Q)} m_n \llcorner Q, & \text{jos } Q \cap K \neq \emptyset; \\
\\
\mu_m^m \llcorner Q = 0, & \text{jos } Q \cap K = \emptyset.
\end{cases}
\tag{4.8}
$$

Koska $\cup\{Q \colon Q \in \mathcal{D}_m\} = [0,1)^n$, niin (4.8) määrittelee $\mathbb{R}^n$:n Radon-mitan μ_m^m, jolle $\operatorname{supp}(\mu_m^m) \subset [0,1]^n$. Seuraavaksi muokataan mittaa μ_m^m määrittelemällä mitta μ_{m-1}^m asettamalla

$$\mu_{m-1}^m \llcorner \mathbb{R}^n \setminus [0,1)^n = 0$$

ja jokaisessa kuutiossa $Q \in \mathcal{D}_{m-1}$:

$$
\begin{cases}
\mu_{m-1}^m \llcorner Q = \mu_m^m \llcorner Q, & \text{jos } \mu_m^m(Q) \leq 2^{-(m-1)s}; \\
\\
\mu_{m-1}^m \llcorner Q = \frac{2^{-(m-1)s}}{\mu_m^m(Q)} \mu_m^m \llcorner Q, & \text{jos } \mu_m^m(Q) > 2^{-(m-1)s}.
\end{cases}
\tag{4.9}
$$

Jatketaan samalla tavalla; mitta μ_{m-j-1}^m saadaan mitasta μ_{m-j}^m asettamalla jokaisessa kuutiossa $Q \in \mathcal{D}_{m-j-1}$:

$$
\begin{cases}
\mu_{m-j-1}^m \llcorner Q = \mu_{m-j}^m \llcorner Q, & \text{jos } \mu_{m-j}^m(Q) \leq 2^{-(m-j-1)s}; \\
\\
\mu_{m-j-1}^m \llcorner Q = \frac{2^{-(m-j-1)s}}{\mu_{m-j}^m(Q)} \mu_{m-j}^m \llcorner Q, & \text{jos } \mu_{m-j}^m(Q) > 2^{-(m-j-1)s}.
\end{cases}
\tag{4.10}
$$

Lopuksi määrittelemme $\mu^m = \mu_0^m$. Konstruktion ideana on, ettei missään vaiheessa minkään dyadisen kuution mitta kasva. Siksi

$$\mu^m(Q) \leq 2^{-js} \quad \forall Q \in \mathcal{D}_j \text{ ja } \forall j = 0, 1, \ldots, m. \tag{4.11}$$

Seuraavaksi osoitetaan, että mitoilla $\mu^m(\mathbb{R}^n)$ on positiivinen alaraja. Havaitaan, että konstruktion nojalla jokaista $x \in K$ kohti on olemassa dyadinen kuutio $Q \in \mathcal{D}_j$, $j = j(x)$, jolle $x \in Q$ ja $\mu^m(Q) = 2^{-js}$ (vrt. (4.8) ja (4.10)). Valitaan kullakin $x \in K$ mahdollisimman suuri tällainen kuutio $Q = Q(x)$. Silloin

$$\mu^m\big(Q(x)\big) = 2^{-js} = c(n,s) d\big(Q(x)\big)^s. \tag{4.12}$$

Lisäksi, jos $x, x' \in K$, niin joko $Q(x) = Q(x')$ tai $Q(x) \cap Q(x') = \emptyset$. Siten

$$\bigcup_{x \in K} Q(x) = \bigsqcup_{i=1}^{\ell} Q_i \supset K$$

ja (4.7):sta seuraa, että

$$\sum_{i=1}^{\ell} d(Q_i)^s \geq a_0.$$

Koska kuutiot Q_i ovat erilliset, niin saamme $\mu^m(\mathbb{R}^n)$:lle alarajan

$$\mu^m(\mathbb{R}^n) = \sum_{i=1}^{\ell} \mu^m(Q_i) = c(n,s) \sum_{i=1}^{\ell} d(Q_i)^s \geq c(n,s) a_0 > 0. \tag{4.13}$$

Nyt voimme asettaa

$$\nu^m = \frac{1}{\mu^m(\mathbb{R}^n)}\mu^m.$$

Koska $\nu^m(\mathbb{R}^n) \equiv 1$, on Lauseen 3.18 nojalla olemassa osajono (ν^{m_j}) ja Radon-mitta μ s.e.

$$\nu^{m_j} \rightharpoonup \mu, \quad \text{kun } j \to \infty.$$

Osoitetaan, että μ on etsitty mitta.

Ensiksikin, koska $\operatorname{supp}(\nu^m) \subset [0,1]^n$ ja $\nu^m(\mathbb{R}^n) \equiv 1$, niin sama pätee rajamitalle μ, ks. Lause 3.16.

Toiseksi, (4.8):stä seuraa, että $\operatorname{supp}(\nu^m)$ sisältyy K:n $c(n)2^{-m}$-ympäristöön. Siten

$$\operatorname{supp}(\mu) \subset K,$$

koska $2^{-m_j} \to 0$. Erityisesti $\mu(K) = \mu(\mathbb{R}^n) = 1$.

Olkoon sitten $x \in \mathbb{R}^n$ ja $0 < r < 1/4$. Tarkastellaan dyadisia kuutioita $Q_i \in \mathcal{D}_\ell$, missä $2^{-\ell} \leq 4r < 2^{-\ell+1}$. Tällöin korkeintaan 2^n tällaista kuutiota voi leikata kuulaa $B(x,r)$. Nyt arvioista (4.11) ja (4.13) sekä Lauseesta 3.16 seuraa, että

$$\begin{aligned}
\mu\big(B(x,r)\big) &\overset{3.16}{\leq} \liminf_{j\to\infty} \nu^{m_j}\big(B(x,r)\big) \\
&\leq \liminf_{j\to\infty} \nu^{m_j}\Big(\bigcup_{i=1}^{2^n} Q_i\Big) \\
&\overset{(4.11)}{\leq} 2^n \liminf_{j\to\infty} \frac{(2^{-\ell})^s}{\mu^{m_j}(\mathbb{R}^n)} \\
&\overset{(4.13)}{\leq} c_0 r^s.
\end{aligned}$$

Jos $r > 1/4$, niin

$$\mu\big(B(x,r)\big) \leq \mu(\mathbb{R}^n) = 1 \leq 4^s r^s.$$

Näin ollen kaikki Frostmanin lemman vaatimukset mitalle μ ovat voimassa. $\square$

Huomautus 4.14. 1. Selvästi Frostmanin lemma pätee kaikille $\mathcal{F}_\sigma$-joukoille $K \subset \mathbb{R}^n$.

2. Frostmanin lemma pätee myös kaikille $\mathbb{R}^n$:n Borel-joukoille K, mutta siinä tapauksessa todistus on paljon vaikeampi.

Korollari 4.15. *Olkoon $K \subset \mathbb{R}^n$ kompakti. Silloin*

$$\dim_{\mathcal{H}}(K) = \sup\{s\colon \exists \text{ tn-mitta } \mu, \text{ jolle } \operatorname{supp}(\mu) \subset K \text{ ja } \mu\big(B(x,r)\big) \leq c_0 r^s \ \forall r > 0,\ \forall x \in \mathbb{R}^n\}$$

4.16 Itsesimilaarit fraktaalit

Olkoon X metrinen avaruus, $\emptyset \neq S \subset X$ ja $\varepsilon > 0$. Joukko

$$S(\varepsilon) = \{x \in X\colon \operatorname{dist}(x,S) < \varepsilon\}$$

on S:n ε-ympäristö. Toisin sanoen,

$$S(\varepsilon) = \bigcup_{x\in S} B(x,\varepsilon).$$

Asetetaan $\emptyset(\varepsilon) = \emptyset$.

Määritelmä 4.17. Joukkojen $A \subset X$ ja $B \subset X$, $A \neq \emptyset \neq B$, välinen *Hausdorff-etäisyys* on

$$d_H(A,B) = \inf\{r > 0\colon A \subset B(r), B \subset A(r)\}.$$

Asetetaan $d_H(\emptyset,\emptyset) = 0$ ja $d_H(A,\emptyset) = d_H(\emptyset, A) = \infty$, jos $A \neq \emptyset$.

Esimerkiksi, jos $A = \{0\} \subset \mathbb{R}^n$ ja $B = B(0,r) \subset \mathbb{R}^n$, niin $d_H(A,B) = r$. Helposti nähdään, että "kolmioepäyhtälö" pätee kaikilla $A, B, C \subset X$:

Lemma 4.18. *Jos $A, B, C \subset X$, niin $d_H(A,B) \leq d_H(A,C) + d_H(C,B)$.*

Todistus. (HT)

Kuitenkaan d_H ei ole välttämättä metriikka, sillä voi olla $d_H(A,B) = \infty$ (esim. $X = \mathbb{R}^2$, A on suora $y = x$ ja B on suora $y = -x$), tai $d_H(A,B) = 0$, vaikka $A \neq B$ (esim. $X = \mathbb{R} = A$, $B = \mathbb{Q}$).

Merkitään X:n kompaktien epätyhjien osajoukkojen perhettä $\mathcal{C}(X)$:llä, ts.

$$\mathcal{C}(X) = \{K\colon K \subset X \text{ kompakti ja epätyhjä}\}.$$

Tällöin pätee:

Lemma 4.19. *Jos $A, B \subset X$ ovat suljettuja ja $A \neq B$, niin $d_H(A,B) > 0$. Erityisesti d_H määrittelee metriikan $\mathcal{C}(X)$:ssä.*

Todistus. (HT)

Rajoitutaan jatkossa $\mathbb{R}^n$:n tapaukseen.

Lemma 4.20. *Metrinen avaruus $(\mathcal{C}(\mathbb{R}^n), d_H)$ on täydellinen.*

Todistus. Olkoon (A_j) Cauchy-jono $(\mathcal{C}(\mathbb{R}^n), d_H)$:ssä. Merkitään

$$B_k = \overline{\bigcup_{i=k}^{\infty} A_i}$$

ja osoitetaan, että

$$A = \bigcap_{k=1}^{\infty} B_k \tag{4.21}$$

on jonon (A_j) raja-arvo d_H-metriikassa. Koska (A_j) on Cauchy-jono, niin $d_H(A_i, A_1)$, $i = 1, 2, \ldots,$ on rajoitettu jono. Siten

$$A_i \subset A_1(r)$$

jollakin $r > 0$ kaikilla i. Koska $\overline{A_1(r)}$ on rajoitettuna ja suljettuna joukkona kompakti ja

$$B_k \subset \overline{A_1(r)}$$

on suljettu, niin B_k on kompakti. Erityisesti A on kompakti ja epätyhjä kompaktien joukkojen vähenevän jonon leikkauksena eli $A \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^n)$. On osoitettava, että

$$d_H(A_i, A) \to 0,$$

kun $i \to \infty$. Olkoon $\varepsilon > 0$ ja i_0 niin suuri, että

$$d_H(A_j, A_k) < \varepsilon/2$$

kaikilla $j, k \geq i_0$. Silloin kaikilla $i \geq k$
$$A_i \subset A_j(\varepsilon),$$
joten
$$\bigcup_{i=k}^{\infty} A_i \subset A_j(\varepsilon)$$
ja
$$B_k \subset A_j(2\varepsilon).$$
Erityisesti
$$A \subset A_j(2\varepsilon),$$
kun $j \geq i_0$. Kääntäen, jos $i \geq i_0$ ja $x \in A_i$, niin Hausdorff-metriikan määritelmän mukaan jokaisella $j \geq i_0$ on olemassa $x_j \in A_j$ s.e. $|x - x_j| < \varepsilon$. Tällöin jono (x_j) on rajoitettu. Olkoon y sen kasautumispiste. Koska $y \in B_k$ kaikilla k, niin $y \in A$. Toisaalta $|x - y| \leq \varepsilon$, joten
$$A_i \subset A(2\varepsilon),$$
kun $i \geq i_0$. Olemme näyttäneet, että $d_H(A_i, A) \leq 2\varepsilon$, kun $i \geq i_0$. □

Huomautus 4.22. Metrisen avaruuden X tapauksessa pätee (ks. esim. [Ho3, Lause 3.7, Lause 3.10]):

1. Jos X on kompakti metrinen avaruus, niin $(\mathcal{C}(X), d_H)$ on kompakti.
2. Jos
$$\mathcal{B}(X) = \{A \subset X : A \text{ suljettu, rajoitettu ja epätyhjä}\}$$
ja X on täydellinen, niin $(\mathcal{B}(X), d_H)$ on täydellinen.

Tarkoituksenamme on seuraavaksi soveltaa *Banachin kiintopistelausetta* täydellisessä metrisessä avaruudessa $(\mathcal{C}(\mathbb{R}^n), d_H)$. Palautetaan kyseinen lause mieliin topologian kurssilta (tai ks. [Ho4, Lause 0.8]). Sitä ennen otetaan käyttöön merkintä
$$f^{\circ m} = \underbrace{f \circ f \circ \cdots \circ f}_{m \text{ kpl}}$$
kuvauksille $f : Y \to Y$.

Lause 4.23. *Olkoon (X, d) täydellinen metrinen avaruus ja $f : X \to X$ aito kontraktio, toisin sanoen f on L-Lipschitz vakiolla $L < 1$. Tällöin f:llä on olemassa yksikäsitteinen kiintopiste $x_0 \in X$, so. $f(x_0) = x_0$. Lisäksi*
$$x_0 = \lim_{m \to \infty} f^{\circ m}(y)$$
kaikilla $y \in X$.

Olkoot sitten kuvaukset $\psi_j : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $j = 1, \ldots, k$, aitoja kontraktioita vakiolla $c_0 < 1$, ts.
$$|\psi_j(x) - \psi_j(y)| \leq c_0 \, |x - y| \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^n, \ \forall j = 1, \ldots, k.$$
Määritellään tämän kontraktioiden perheen avulla kuvaus $\Psi : \mathcal{C}(\mathbb{R}^n) \to \mathcal{C}(\mathbb{R}^n)$ asettamalla
$$\Psi(A) = \bigcup_{j=1}^{k} \psi_j A, \tag{4.24}$$

kun $A \subset \mathbb{R}^n$ on kompakti. Koska kuvaukset ψ_j ovat jatkuvia, niin jokainen $\psi_j A$ on kompakti ja siten $\Psi(A)$ on kompakti (eli $\Psi(A) \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^n)$). Koska

$$d_H(\Psi(A), \Psi(B)) \leq \max_j d_H(\psi_j A, \psi_j B) \leq c_0\, d_H(A, B)$$

kaikilla $A, B \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^n)$, niin Ψ on aito kontraktio. Siten on olemassa yksikäsitteinen kompakti joukko F, jolle

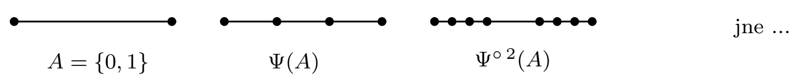
$$F = \Psi(F) = \bigcup_{j=1}^{k} \psi_j F.$$

Lisäksi $d_H(F, \Psi^{\circ m}(A)) \to 0$, kun $m \to \infty$, valittiinpa kompakti joukko $A \neq \emptyset$ miten tahansa! Joukkoa F kutsutaan perhettä $\{\psi_j\}_{j=1}^{k}$ vastaavaksi *invariantiksi joukoksi*.

Esimerkki 4.25. Jos $\psi_1(x) = \frac{1}{3}x$ ja $\psi_2(x) = \frac{1}{3}x + \frac{2}{3}$, $x \in \mathbb{R}$, niin perhettä $\{\psi_1, \psi_2\}$ vastaava invariantti joukko on Cantorin 1/3-joukko $C(1/3)$. Helposti nimittäin nähdään, että

$$\Psi(C(1/3)) = \psi_1(C(1/3)) \cup \psi_2(C(1/3)) = C(1/3),$$

joten väite seuraa (kiintopisteen) yksikäsitteisyydestä.



Tarkastellaan sitten perhettä kontraktoivia similariteetteja $\psi_j \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, s.o.

$$|\psi_j(x) - \psi_j(y)| = r_j |x - y| \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^n,$$

ja $0 < r_j < 1$ $\forall j = 1, \ldots, k$. Tällöin perhettä $\{\psi_j\}_{j=1}^{k}$ vastaavaa invarianttia joukkoa F kutsutaan *itsesimilaariksi fraktaaliksi*. Olkoon sitten $s > 0$ se yksikäsitteinen luku, jolle

(4.26)
$$\sum_{j=1}^{k} r_j^s = 1.$$

Tällainen yksikäsitteinen s on olemassa, sillä summa on s:n funktiona aidosti vähenevä, $\sum_{j=1}^{k} r_j^0 = k > 1$ ja $\sum_{j=1}^{k} r_j^s \to 0$, kun $s \to 0$.

Lause 4.27. *On olemassa Radon-mitta μ, jolle $\mu(F) = \mu(\mathbb{R}^n) = 1$ ja*

(4.28)
$$\mu(A) = \sum_{i=1}^{k} r_i^s \mu(\psi_i^{-1}(A))$$

kaikilla Borel-joukoilla $A \subset \mathbb{R}^n$.

Todistus. Havaitaan aluksi, että korottamalla yhtälön (4.26) molemmat puolet (mihin tahansa) potenssiin $m \in \mathbb{N}$ saadaan

(4.29)
$$\sum_{1 \leq j_1, \ldots, j_m \leq k} (r_{j_1} r_{j_2} \cdots r_{j_m})^s = 1.$$

Kiinnitetään $x \in F$ ja merkitään

$$x_{j_1 \cdots j_m} = \psi_{j_1} \circ \cdots \psi_{j_m}(x),$$

missä $m \in \mathbb{N}$ ja $1 \le j_i \le k$. Määritellään jokaisella $m \in \mathbb{N}$ Radon-mitta

$$\mu_m = \sum_{1 \le j_1, \ldots, j_m \le k} (r_{j_1} r_{j_2} \cdots r_{j_m})^s \delta_{x_{j_1 \cdots j_m}}.$$

Silloin yhtälöstä (4.29) seuraa, että

$$\mu_m(\mathbb{R}^n) = 1 \quad \forall m \in \mathbb{N}.$$

Koska

$$x_{j_1 \cdots j_m} \in \Psi^{\circ m}(\{x\}) \subset \Psi^{\circ m}(F) = F,$$

on oltava $\operatorname{supp}(\mu_m) \subset F$. Lauseen 3.18 mukaan jonolla (μ_m) on heikosti suppeneva osajono,

$$\mu_{m_j} \rightharpoonup \mu, \quad j \to \infty, \tag{4.30}$$

missä μ on Radon-mitta $\mathbb{R}^n$:ssä. Lisäksi Lauseen 3.16 nojalla

$$1 = \limsup_{j \to \infty} \mu_{m_j}(F) \le \mu(F) \le \mu(U) \le \liminf_{j \to \infty} \mu_{m_j}(U) = 1,$$

kun U on F:n avoin ympäristö. Siten $\mu(F) = 1$ ja $\operatorname{supp}(\mu) \subset F$.

Itseasiassa, koko jono $\mu_m \rightharpoonup \mu$, kun $m \to \infty$. Tämän osoittamiseksi riittää (4.30):n nojalla näyttää, että

$$\Big(\int_{\mathbb{R}^n} f \, d\mu_m \Big)_{m=1}^{\infty}$$

on Cauchy-jono jokaisella $f \in C_0(\mathbb{R}^n)$. Kiinnitetään $f \in C_0(\mathbb{R}^n)$ ja $\varepsilon > 0$. Tasaisen jatkuvuuden nojalla on olemassa $\eta > 0$ s.e.

$$|f(x) - f(y)| < \varepsilon, \quad \text{kun } |x - y| < \eta. \tag{4.31}$$

Havaitaan, että

$$d\big(\psi_{j_1} \circ \cdots \circ \psi_{j_m}(F)\big) \le (\underbrace{\max r_j}_{<1})^m d(F) < \eta, \tag{4.32}$$

kun $m \ge m_0$ ja m_0 on riittävän suuri. Jos nyt $\ell > m \ge m_0$, niin

$$\begin{aligned}
\Big| \int_{\mathbb{R}^n} f \, d\mu_\ell - \int_{\mathbb{R}^n} f \, d\mu_m \Big| &= \Big| \sum_{j_1, \ldots, j_\ell} (r_{j_1} \cdots r_{j_\ell})^s f(x_{j_1 \cdots j_\ell}) - \sum_{j_1, \ldots, j_m} (r_{j_1} \cdots r_{j_m})^s f(x_{j_1 \cdots j_m}) \Big| \\
&= \Big| \sum_{j_1, \ldots, j_\ell} (r_{j_1} \cdots r_{j_\ell})^s \big(f(x_{j_1 \cdots j_\ell}) - f(x_{j_1 \cdots j_m}) \big) \Big|,
\end{aligned}$$

missä jälkimmäinen yhtälö pätee, sillä

$$\begin{aligned}
\sum_{j_1, \ldots, j_\ell} (r_{j_1} \cdots r_{j_\ell})^s f(x_{j_1 \cdots j_m}) &= \sum_{j_1, \ldots, j_m} (r_{j_1} \cdots r_{j_m})^s f(x_{j_1 \cdots j_m}) \underbrace{\sum_{j_{m+1}, \ldots, j_\ell} (r_{j_{m+1}} r_{j_{m+1}} \cdots r_{j_\ell})^s}_{=1} \\
&= \sum_{j_1, \ldots, j_m} (r_{j_1} \cdots r_{j_m})^s f(x_{j_1 \cdots j_m}).
\end{aligned}$$

Koska

$$x_{j_1\cdots j_\ell} = \psi_{j_1}\circ\cdots\psi_{j_m}\circ\underbrace{\psi_{j_{m+1}}\circ\cdots\circ\psi_{j_\ell}(x)}_{\in F}\in\psi_{j_1}\circ\cdots\psi_{j_m}(F)$$

ja

$$x_{j_1\cdots j_m}\in\psi_{j_1}\circ\cdots\psi_{j_m}(F),$$

niin (4.32):n mukaan

$$|x_{j_1\cdots j_\ell}-x_{j_1\cdots j_m}|<\eta.$$

Näin ollen (4.31):n nojalla

$$\Big|\int_{\mathbb{R}^n} f\,d\mu_\ell-\int_{\mathbb{R}^n} f\,d\mu_m\Big|\le\varepsilon\sum_{j_1,\dots,j_\ell}(r_{j_1}\cdots r_{j_\ell})^s=\varepsilon.$$

Olemme osoittaneet, että koko jono $\mu_m \rightharpoonup \mu$.

Lopuksi havaitaan, että kaikilla $f\in C_0(\mathbb{R}^n)$,

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n} f\,d\mu_m &= \sum_{j_1,\dots,j_m} f(x_{j_1\cdots j_m})(r_{j_1}\cdots r_{j_m})^s\\ &= \sum_{j_2,\dots,j_m}\Big(\sum_{i=1}^k f\circ\psi_i(x_{j_2\cdots j_m})r_i^s\Big)(r_{j_2}\cdots r_{j_m})^s\\ &= \int_{\mathbb{R}^n}\Big(\sum_{i=1}^k r_i^s(f\circ\psi_i)\Big)\,d\mu_{m-1}.\end{aligned}$$

Koska koko jono $\mu_m\rightharpoonup\mu$, niin tästä yhtälöstä seuraa antamalla $m\to\infty$, että

$$\int_{\mathbb{R}^n} f\,d\mu=\int_{\mathbb{R}^n}\Big(\sum_{i=1}^k r_i^s(f\circ\psi_i)\Big)\,d\mu. \tag{4.33}$$

Approksimoinnilla nähdään, että (4.33) pätee jokaisen Borel-joukon $A\subset\mathbb{R}^n$ karakteristiselle funktiolle χ_A. Näin ollen

$$\begin{aligned}\mu(A) &= \int_{\mathbb{R}^n}\chi_A\,d\mu\\ &= \int_{\mathbb{R}^n}\Big(\sum_{i=1}^k r_i^s(\chi_A\circ\psi_i)\Big)\,d\mu\\ &= \sum_{i=1}^k r_i^s\int_{\mathbb{R}^n}\chi_{\psi_i^{-1}A}\,d\mu\\ &= \sum_{i=1}^k r_i^s\mu(\psi_i^{-1}A)\end{aligned}$$

ja yhtälö (4.28) on siten todistettu. □

Esimerkki 4.34. Olkoot $F=C(1/3)$, $\psi_1(x)=\frac13 x$ ja $\psi_2(x)=\frac13 x+\frac23$ kuten Esimerkissä 4.25. Koska $\psi_1^{-1}\big(C(1/3)\cap[0,1/3]\big)=C(1/3)$ ja $\psi_2^{-1}\big(C(1/3)\cap[0,1/3]\big)\subset[-2,-1]\subset\mathbb{R}\setminus C(1/3)$, niin Lauseen 4.27 antama mitta μ toteuttaa

$$\mu\big(C(1/3)\cap[0,1/3]\big)=(1/3)^s\mu\big(C(1/3)\big)=1/2.$$

Huomaa, että $(1/3)^s = 1/2$, jos s toteuttaa ehdon (4.26) eli $r_1^s + r_2^s = 1$, $r_j = 1/3$. Tällöin $s = \dim_{\mathcal{H}} C(1/3)$. Samoin

$$\mu\big(C(1/3) \cap [2/3, 1]\big) = 1/2.$$

Iteroimalla havaitaan, että μ on Esimerkissä 4.4 konstruoitu "tasan jakautunut" mitta. Itse asiassa voidaan näyttää, että $\mu = \mathcal{H}^s \llcorner C(1/3)$.

Edellinen esimerkki herättää kysymyksen: Jos F on perheen $\{\psi_j\}_{j=1}^k$ antama itsesimilaari fraktaali, niin määräytyykö $\dim_{\mathcal{H}} F$ yhtälön

$$\sum_{j=1}^{k} r_j^s = 1$$

ratkaisuna? (Tässä r_j on ψ_j:n skaalauskerroin.)

Helposti huomataan, että vastaus on *ei*, jos joukot $\psi_j F$ menevät liikaa päällekkäin:

Esimerkki 4.35. Jos $\psi_1(x) = (1-\varepsilon)x$ ja $\psi_2(x) = (1-\varepsilon)x + \varepsilon$, kun $x \in \mathbb{R}$ ja $\varepsilon \in (0, 1/2]$, niin

$$[0,1] = \underbrace{\psi_1[0,1]}_{[0,1-\varepsilon]} \cup \underbrace{\psi_2[0,1]}_{[\varepsilon,1]}.$$

Näin ollen $[0,1]$ on $\{\psi_1, \psi_2\}$:n määräämä itsesimilaari fraktaali. Nyt $r_1^s + r_2^s = 2(1-\varepsilon)^s = 1$, jos (ja vain jos)

$$s = \frac{\log 1/2}{\log(1-\varepsilon)}.$$

Nähdään, että $s \to \infty$, kun $\varepsilon \to 0$.

Esimerkin 4.35 kaltaisen tilanteen estämiseksi määritellään seuraava käsite.

Määritelmä 4.36. Similariteetit $\{\psi_j\}_{j=1}^k$ toteuttavat *avoimen joukon ehdon*, jos on olemassa rajoitettu ja avoin joukko $V \subset \mathbb{R}^n$ s.e.

$$\Psi(V) = \bigcup_{j=1}^{k} \psi_j V \subset V \tag{4.37}$$

ja joukot $\psi_j V$ ovat erillisiä, ts.

$$\psi_i V \cap \psi_j V = \emptyset, \quad \text{kun } i \neq j. \tag{4.38}$$

Esimerkki 4.39. Olkoot $F = C(1/3)$ ja $\{\psi_1, \psi_2\}$ kuten Esimerkissä 4.34. Valitsemalla (esimerkiksi) $V = (0,1)$ havaitaan, että

$$\Psi(V) = \underbrace{(0, 1/3)}_{=\psi_1 V} \cup \underbrace{(2/3, 1)}_{=\psi_2 V} \subset V,$$

joten $\{\psi_1, \psi_2\}$ toteuttaa avoimen joukon ehdon.

Lause 4.40. *Olkoon $\{\psi_j\}_{j=1}^k$ perhe kontraktoivia similariteetteja, jotka toteuttavat avoimen joukon ehdon. Olkoon F perheen $\{\psi_j\}_{j=1}^k$ määräämä itsesimilaari fraktaali. Jos r_j on ψ_j:n skaalauskerroin ja*

$$\sum_{j=1}^{k} r_j^s = 1, \tag{4.41}$$

niin $0 < \mathcal{H}^s(F) < \infty$. Toisin sanoen, F on s-joukko, missä s määräytyy ehdosta (4.41). Erityisesti $\dim_{\mathcal{H}} F = s$.

Todistusta varten tarvitsemme useita aputuloksia.

Lemma 4.42. *Oletetaan, että $\{\psi_j\}_{j=1}^k$ toteuttaa avoimen joukon ehdon avoimella joukolla $V \subset \mathbb{R}^n$.*

(a) Jos F on $\{\psi_j\}_{j=1}^k$:n määräämä itsesimilaari fraktaali, niin $F \subset \bar{V}$.

(b) Olkoon $\mathcal{V} = \{\psi_{j_1} \circ \cdots \circ \psi_{j_\ell}(V) \colon 1 \le j_i \le k, \ell \in \mathbb{N}\}$. Jos $U, U' \in \mathcal{V}$ ja $U \cap U' \neq \emptyset$, niin joko $U \subset U'$ tai $U' \subset U$.

Todistus.

(a) Ehdosta (4.37) seuraa, että
$$\Psi(\bar{V}) \subset \bar{V}.$$
Näin ollen
$$\bar{V} \supset \Psi(\bar{V}) \supset \Psi^{\circ 2}(\bar{V}) \supset \cdots \supset \Psi^{\circ i}(\bar{V}) \supset \cdots.$$
Koska $d_H(\Psi^{\circ i}(\bar{V}), F) \to 0$, saadaan $F \subset \bar{V}$.

(b) Merkitään
$$V_{j_1 j_2 \cdots j_\ell} = \psi_{j_1} \circ \psi_{j_2} \circ \cdots \circ \psi_{j_\ell}(V).$$
Ehdosta (4.37) seuraa erityisesti, että $\psi_j V \subset V$ kaikilla $j = 1,\ldots,$k ja siten $V_{j_1 j_2 \cdots j_\ell} \subset V$. Jos $m \ge \ell$, niin edellisestä havainnosta saadaan

$$V_{j_1 j_2 \cdots j_m} = \psi_{j_1} \circ \cdots \circ \psi_{j_\ell}\big(\underbrace{\psi_{j_{\ell+1}} \circ \cdots \circ \psi_{j_m}(V)}_{\subset V}\big) \subset V_{j_1 j_2 \cdots j_\ell}. \tag{4.43}$$

Riittää siis osoittaa: Jos

$$V_{j_1 j_2 \cdots j_\ell} \cap V_{k_1 k_2 \cdots k_\ell} \neq \emptyset, \tag{4.44}$$

niin $j_i = k_i \; \forall i = 1, \ldots, \ell$. Jos nimittäin $V_{j_1 j_2 \cdots j_m} \cap V_{k_1 k_2 \cdots k_\ell} \neq \emptyset$ jollakin $m \ge \ell$, niin (4.43):n nojalla myös (4.44) pätee. Tehdään vastaoletus, että $j_i \neq k_i$ jollakin $i \in \{1, 2, \ldots, \ell\}$ ja olkoon N pienin näistä indekseistä $i \in \{1, 2, \ldots, \ell\}$. Tällöin

$$\begin{aligned}
\psi_{j_1} \circ \cdots \circ \psi_{j_{N-1}} &= \psi_{k_1} \circ \cdots \circ \psi_{k_{N-1}}, \\
V_{j_1 \cdots j_\ell} \subset V_{j_1 \cdots j_N} &= \psi_{j_1} \circ \cdots \circ \psi_{j_{N-1}}(\psi_{j_N} V) \quad \text{ja} \\
V_{k_1 \cdots k_\ell} \subset V_{k_1 \cdots k_N} &= \psi_{k_1} \circ \cdots \circ \psi_{k_{N-1}}(\psi_{k_N} V),
\end{aligned}$$

missä $\psi_{j_N} V \cap \psi_{k_N} V = \emptyset$ ehdon (4.38) mukaan. Nyt päädytään ristiriitaan, sillä tällöin olisi $V_{j_1 \cdots j_\ell} \cap V_{k_1 \cdots k_\ell} = \emptyset$ kuvauksen $\psi_{j_1} \circ \cdots \circ \psi_{j_{N-1}} = \psi_{k_1} \circ \cdots \circ \psi_{k_{N-1}}$ injektiivisyyden nojalla. □

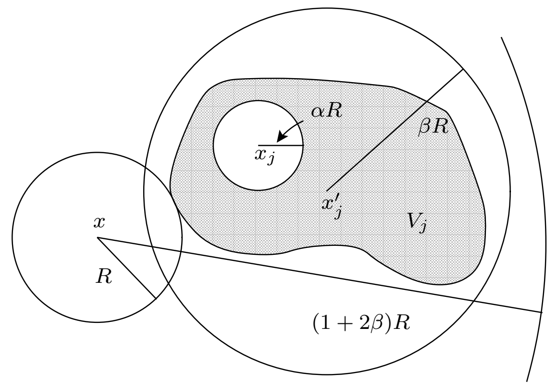
Lemma 4.45. *Olkoon $\{V_j \colon j \in J\}$ kokoelma erillisiä $\mathbb{R}^n$:n avoimia osajoukkoja s.e. on olemassa positiiviset vakiot α, β ja R ja jokaisella $j \in J$ pisteet x_j, x_j', joille pätee*

$$B(x_j, \alpha R) \subset V_j \subset B(x_j', \beta R).$$

Silloin mikä tahansa R-säteinen kuula $B(x, R)$ leikkaa korkeintaan q:ta joukkoa $\bar{V}_j$, missä $q \le (1 + 2\beta)^n \alpha^{-n}$.

Todistus. Jos $B(x, R) \cap \bar{V}_j \neq \emptyset$, niin

$$B(x_j, \alpha R) \subset V_j \subset B\big(x, (1 + 2\beta)R\big).$$



Väite seuraa nyt vertaamalla αR- ja $(1+2\beta)R$-säteisten kuulien tilavuuksia (eli m_n-mittoja) ja käyttämällä joukkojen V_j ja siten kuulien $B(x_j, \alpha R)$ erillisyyttä. □

Seuraavassa lemmassa kuvausten ψ_j ei tarvitse olla similariteetteja.

Lemma 4.46. *Olkoot $\psi_1, \ldots, \psi_k$ aitoja kontraktioita $\mathbb{R}^n$:ssä,*

$$|\psi_j(x) - \psi_j(y)| \leq r_j |x-y|, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^n, \ \forall j = 1, \ldots, k.$$

Jos $\sum_{j=1}^k r_j^s = 1$, niin

$$\mathcal{H}^s(F) < \infty,$$

kun F on perhettä $\{\psi_j\}_{j=1}^k$ vastaava invariantti joukko. Erityisesti, $\dim_{\mathcal{H}} F \leq s$.

Todistus. Palautetaan aluksi mieliin, että

$$F = \Psi(F) = \bigcup_{j=1}^k \psi_j F. \tag{4.47}$$

Olkoon $\delta > 0$. Merkitään

$$F_{j_1 \cdots j_\ell} = \psi_{j_1} \circ \cdots \circ \psi_{j_\ell}(F).$$

Olkoon ℓ niin suuri, että

$$(\max\{r_1, \ldots, r_k\})^\ell d(F) < \delta.$$

Silloin

$$d(F_{j_1 \cdots j_\ell}) \leq r_{j_1} \cdots r_{j_\ell} d(F) < \delta,$$

joten

$$\{F_{j_1 \cdots j_\ell} \colon 1 \leq j_1, j_2, \ldots, j_\ell \leq k\}$$

on F:n δ-peite, sillä iteroimalla kaavaa (4.47) saadaan

$$F = \Psi^{\circ \ell}(F) = \bigcup_{j_1, \ldots, j_\ell = 1}^k F_{j_1 \cdots j_\ell}.$$

Näin ollen

$$\mathcal{H}^s_\delta(F) \leq \sum_{1 \leq j_1, j_2, \ldots, j_\ell \leq k} (r_{j_1} \cdots r_{j_\ell})^s d(F)^s = d(F)^s \Big(\sum_{j=1}^k r_j^s\Big)^\ell = d(F)^s.$$

Antamalla $\delta \to 0$ nähdään, että $\mathcal{H}^s(F) \leq d(F)^s < \infty$. □

Lauseen 4.40 todistus. Oletetaan, että avoimen joukon ehto pätee kontraktoivien similaariteettien perheelle $\{\psi_j\}_{j=1}^k$ rajoitetulla ja avoimella joukolla V. Olkoon F tätä perhettä vastaava itsesimilaari fraktaali. Lemman 4.46 mukaan riittää näyttää, että

$$\mathcal{H}^s(F) > 0.$$

Frostmanin lemman (Lause 4.6) nojalla riittää osoittaa, että Lauseessa 4.27 konstruoitu mitta μ toteuttaa arvion

$$\mu\big(B(x,\varrho)\big) \le c\,\varrho^s \tag{4.48}$$

kaikilla $x \in \mathbb{R}^n$ ja kaikilla $\varrho > 0$. Kiinnitetään kuula $B(x,\varrho)$, missä $\varrho < 1$. Merkitään $r_{\min} = \min\{r_1,\dots,r_k\}$. Olkoot $x_0 \in V$ ja $\alpha,\beta > 0$ sellaisia, että

$$B(x_0,\alpha) \subset V \subset B(x_0,\beta). \tag{4.49}$$

Olkoon $J = \{j_1, j_2, \dots\} \in \{1,\dots,k\}^{\mathbb{N}}$ päättymätön jono. Jokaista tällaista jonoa J vastaa pienin indeksi $\ell = \ell(J) \ge 1$, jolle

$$r_{\min}\varrho \le r_{j_1} r_{j_2} \cdots r_{j_\ell} < \varrho. \tag{4.50}$$

Olkoon

$$\mathcal{S} = \{(j_1,\dots,j_{\ell(J)})\colon J \in \{1,\dots,k\}^{\mathbb{N}}\}$$

näin saatujen katkaistujen jonojen joukko. Lemman 4.42 (b)-kohdan (tai itse asiassa sen todistuksen) mukaan joukot

$$V_{j_1 j_2 \cdots j_\ell}, \quad (j_1, j_2, \dots, j_\ell) \in \mathcal{S},$$

ovat tällöin erillisiä. Koska s-säteisen kuulan kuva similariteetissa on ts-säteinen kuula, missä t on similariteetin skaalaustekijä, niin kaavasta (4.49) seuraa, että kukin $V_{j_1 j_2 \cdots j_\ell}$ sisältää $\alpha r_{j_1} \cdots r_{j_\ell}$-säteisen kuulan ja sisältyy $\beta r_{j_1} \cdots r_{j_\ell}$-säteiseen kuulaan. Toisaalta (4.50):n nojalla

$$r_{\min}\alpha\varrho \le \alpha r_{j_1} \cdots r_{j_\ell} \le \beta r_{j_1} \cdots r_{j_\ell} \le \beta\varrho,$$

joten Lemmasta 4.45 seuraa, että kuula $B(x,\varrho)$ voi leikata korkeintaan q:n joukon $\bar V_{j_1 \cdots j_\ell}$, $(j_1,\dots,j_\ell) \in \mathcal{S}$, kanssa, missä $q \le (1+2\beta)^n (\alpha r_{\min})^{-n}$.

Seuraavaksi näytämme, että kaikilla Borel-joukoilla $A \subset \mathbb{R}^n$

$$\mu(A) = \sum_{(j_1,\dots,j_\ell)\in\mathcal{S}} \mu\big((\psi_{j_1} \circ \psi_{j_2} \circ \cdots \circ \psi_{j_\ell})^{-1}(A)\big)(r_{j_1} \cdots r_{j_\ell})^s. \tag{4.51}$$

Lauseen 4.27 mukaan

$$\mu(A) = \sum_{i=1}^k \mu(\psi_i^{-1}A) r_i^s. \tag{4.52}$$

Tarkastellaan niitä indeksejä $i \in \{1,\dots,k\}$, joilla $(i, j_2, \dots, j_\ell) \in \mathcal{S}$ joillakin $j_2,\dots,j_\ell$. Sovelletaan (4.52):a joukkoon $\psi_i^{-1}A$, jolloin

$$\mu(\psi_i^{-1}A) r_i^s = \sum_j r_i^s r_j^s \mu(\psi_j^{-1}\psi_i^{-1}A) = \sum_j \mu\big((\psi_i \circ \psi_j)^{-1}A\big)(r_i r_j)^s.$$

Toistamalla tätä prosessia päädymme äärellisen monen askeleen jälkeen kaavaan (4.51).

Koska $\operatorname{supp}(\mu) \subset F \subset \bar{V}$, niin

$$\mu\big((\psi_{j_1} \circ \cdots \circ \psi_{j_\ell})^{-1} B(x,\varrho)\big) \neq 0,$$

vain jos

$$(\psi_{j_1} \circ \cdots \circ \psi_{j_\ell})(F) \cap B(x,\varrho) \neq \emptyset.$$

Mutta silloin myös

$$\bar{V}_{j_1 \cdots j_\ell} \cap B(x,\varrho) \neq \emptyset$$

ja edellä olleen mukaan näin voi käydä korkeintaan q:lla indeksijonolla ja näillä pätee (4.50):n nojalla

$$r_{j_1} \cdots r_{j_\ell} \leq \varrho.$$

Sijoittamalla tämä tieto (4.51):ään saadaan

$$\begin{aligned}
\mu\big(B(x,\varrho)\big) &= \sum_{(j_1,\ldots,j_\ell)\in\mathcal{S}} \mu\big((\psi_{j_1} \circ \psi_{j_2} \circ \cdots \circ \psi_{j_\ell})^{-1} B(x,\varrho)\big)(r_{j_1} \cdots r_{j_\ell})^s \\
&\leq q\,\mu(\mathbb{R}^n)\varrho^s \\
&= c_0\varrho^s
\end{aligned}$$

kaikilla $x \in \mathbb{R}^n$ ja kaikilla $0 < \varrho \leq 1$. Jos $\varrho > 1$, niin

$$\mu\big(B(x,\varrho)\big) \leq \mu(\mathbb{R}^n)\varrho^s.$$

□

Esimerkki 4.53. Cantorin joukko $C(\lambda)$ on perheen $\{\psi_1, \psi_2\}$,

$$\psi_1(x) = \lambda x, \quad \psi_2(x) = \lambda x + 1 - \lambda,\ x \in \mathbb{R},$$

määräämä itsesimilaari fraktaali. Nyt

$$r_1^s + r_2^s = 2\lambda^s = 1 \iff s = \frac{\log(1/2)}{\log\lambda} = \frac{\log 2}{\log(1/\lambda)}.$$

Lisäksi $\{\psi_1, \psi_2\}$ toteuttaa selvästi avoimen joukon ehdon, joten

$$\dim_{\mathcal{H}} C(\lambda) = \frac{\log 2}{\log(1/\lambda)}.$$

Lause 4.40 kattaa useita tunnettuja perusfraktaaleja. Näitä ovat Cantorin joukkojen lisäksi mm. "Sierpinskin kolmio" ja "von Kochin käyrä" ("lumihiutalekäyrä"). Tarkastelemme näitä lähemmin harjoitustehtävissä.

4.54 Itsesimilaarin fraktaalin piirtäminen satunnaiskävelyllä

Fraktaalin piirtäminen onnistuu periaatteessa valitsemalla piste x_0 ja laskemalla iteraatiot $\Psi^{\circ m}(\{x_0\})$, sillä $d_H(F, \Psi^{\circ m}(\{x_0\})) \to 0$, kun $m \to \infty$. Kuitenkin (pahimmassa tapauksessa) card $\Psi^{\circ m}(\{x_0\}) = k^m$, missä k on similariteettien lukumäärä, joten käytännössä tietokoneen muisti tukkeutuu nopeasti.

Parempi (oikeampi) tapa piirtämiseen on seuraava stokastinen algoritmi, jota käyttämällä tietokoneen muistirasitus on minimaalinen.

Algoritmi 4.55. Piirretään invariantti joukko F seuraavasti:

1. askel: Valitaan lähtöpiste $x_0 \in F$ (esim. jonkin similariteetin kiintopiste, joka on helposti löydettävissä).

2. askel: Oletetaan, että pisteet $x_0, \dots, x_{\ell-1}$ on konstruoitu ja piirretty. Valitaan indeksi $j \in \{1, \dots, k\}$ satunnaisesti (ts. heitetään noppaa, jossa on k tahkoa) ja asetetaan

$$x_\ell = \psi_j(x_{\ell-1}).$$

Toistetaan 2. askelta "rajatta".

Tulos: Todennäköisyydellä 1 pätee:

$$\lim_{\ell\to\infty} d_H(\{x_0, x_1, \dots, x_\ell\}, F) = 0. \tag{4.56}$$

Haluamme seuraavaksi muotoilla ja todistaa edellisen väitteen (4.56) tarkasti. Tarvitsemme stokastiikasta vain seuraavan tuloksen:

Lemma 4.57. *Olkoon* $\Omega = \{1, 2, \dots, k\}^{\mathbb{N}} = \prod_{\ell\in\mathbb{N}}\{1, 2, \dots, k\}$ *ja* $X_\ell\colon \Omega \to \{1, \dots, k\}$ *projektio*

$$X_\ell(\omega) = \omega_\ell, \quad \textit{kun } \omega = (\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_{\ell-1}, \omega_\ell, \omega_{\ell+1}, \dots) \in \Omega.$$

Olkoot $p_j > 0,\ j = 1, \dots, k$, *s.e.* $\sum_{j=1}^k p_j = 1$. *Olkoon* $\mathcal{F}$ *joukkojen*

$$X_\ell^{-1}(j) = \{\omega \in \Omega\colon X_\ell(\omega) = j\}, \quad j \in \{1, \dots, k\},\ \ell \in \mathbb{N},$$

virittämä σ*-algebra* Ω*:ssa. Silloin on olemassa yksikäsitteinen todennäköisyysmitta* $\mathbb{P}$ *(mitallisessa) avaruudessa* $(\Omega, \mathcal{F})$ *siten, että*

$$\mathbb{P}\big(\{\omega \in \Omega\colon X_\ell(\omega) = j_\ell,\ 1 \le \ell \le m\}\big) = p_{j_1}p_{j_2}\dots p_{j_m} \tag{4.58}$$

aina, kun $m \ge 1$ *ja* $j_1, j_2, \dots, j_m \in \{1, \dots, k\}$.

Todistus. Kysessä on tulomitan $\mathbb{P}$ konstruointi tuloavaruudessa

$$\Omega = \{1, \dots, k\}^{\mathbb{N}} = \prod_{\ell\in\mathbb{N}}\{1, \dots, k\}$$

siten, että

$$\mathbb{P} = \mu_1 \times \mu_2 \times \cdots \times \mu_\ell \times \cdots,$$

missä

$$\mu_\ell \equiv \mu\colon \mathcal{P}(\{1, \dots, k\}) \to [0, 1], \quad \mu(\{j\}) = p_j$$

kaikilla $1 \le j \le k$. Kun

$$G_m = \{\omega \in \Omega\colon \omega_1 = j_1, \omega_2 = j_2, \dots, \omega_m = j_m\} = \{(j_1, j_2, \dots, j_m)\} \times \prod_{\ell>m}\{1, \dots, k\}, \quad m \in \mathbb{N},$$

niin asetetaan (vrt. (4.58))

$$\mathbb{P}(G_m) = p_{j_1}p_{j_2}\dots p_{j_m}$$

ja $\mathbb{P}(\emptyset) = 0$. Joukkojen $G_m,\ m \in \mathbb{N}$, äärelliset yhdisteet ja $\emptyset$ muodostavat algebran $\mathcal{A}$, johon $\mathbb{P}$ laajenee. Voidaan osoittaa, että tällöin $\mathbb{P}\colon \mathcal{A} \to [0, 1]$ on σ-additiivinen [ks. esim. Williams: "Probability with Martingales"]. Väite seuraa tämän jälkeen Carathéodory-Hahnin laajennuslauseesta 1.44. $\square$

Huomautus 4.59. Ehdosta (4.58) seuraa, että jokaisella äärellisellä $J \subset \mathbb{N}$ pätee

$$\mathbb{P}\big(\{\omega \in \Omega \colon X_\ell(\omega) = j_\ell \ \forall \ell \in J\}\big) = \prod_{\ell \in J} p_{j_\ell}. \tag{4.60}$$

Todennäköisyyslaskennan kielellä:

- $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ on "todennäköisyysavaruus",
- Ω:n mitalliset joukot ($\in \mathcal{F}$) ovat "tapahtumia",
- Lemman 4.57 mukaan "satunnaismuuttujat" X_ℓ ovat riippumattomia ja samoin jakautuneita,
- X_ℓ on "ℓ:nnen nopanheiton tulos",
- tapahtuma $A \subset \Omega$ (so. $A \in \mathcal{F}$) "sattuu melkein varmasti (m.v.)", jos $\mathbb{P}(A) = 1$.

Esimerkki 4.61. Olkoon $\Omega = \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ ja $p_0 = p_1 = 1/2$. Kuvaus $J \colon \Omega \to [0,1]$,

$$J(\omega) = \sum_{\ell=1}^{\infty} \omega_\ell 2^{-\ell},$$

on surjektio ja $\mathbb{P}(A) = m_1(JA)$. Itse asiassa, Korollari 4.63:n nojalla on olemassa joukko $B \subset \Omega$ s.e. $\mathbb{P}(B) = 1$ ja $J \colon B \to [0,1]$ on bijektio.

Seuraava lemma sanoo, että Lemman 4.57:n mukainen indeksien $1, 2, \ldots, k$ satunnaisjono ω sisältää segmenttinään melkein varmasti minkä tahansa äärellisen jonon indeksejä $1, \ldots, k$.

Lemma 4.62. *Olkoon $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ kuten Lemmassa 4.57 ja $a = (a_1, \ldots, a_m) \in \{1, 2, \ldots, k\}^m$, $m \geq 1$. Silloin*

$$\mathbb{P}\left(\{\omega = (\omega_\ell)_{\ell=1}^{\infty} \in \Omega \colon (\omega_j, \omega_{j+1}, \ldots, \omega_{j+m-1}) = a \textit{ jollakin } j \in \mathbb{N}\}\right) = 1.$$

Todistus. On siis osoitettava, että $\mathbb{P}(A_a) = 1$, kun $A_a \subset \Omega$ on tapahtuma

$$A_a = \{\omega = (\omega_\ell)_{\ell=1}^{\infty} \in \Omega \colon (\omega_j, \omega_{j+1}, \ldots, \omega_{j+m-1}) = a \text{ jollakin } j \in \mathbb{N}\}.$$

Kun $r \geq 1$, niin merkitään

$$B_r = \{\omega \in \Omega \colon (\omega_{rm+1}, \omega_{rm+2}, \ldots, \omega_{(r+1)m}) \neq a\}.$$

Silloin ehdon (4.58) mukaan tapahtumat B_r, $r = 1, 2, \ldots$, ovat "riippumattomia", eli pätee

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(B_1 \cap B_2 \cap \cdots \cap B_r) &= \mathbb{P}(B_1)\mathbb{P}(B_2) \cdots \mathbb{P}(B_r) \\ &= (1-s)^r,\end{aligned}$$

missä

$$s = p_{a_1} p_{a_2} \cdots p_{a_m} \in (0,1).$$

Koska $A_a^c \subset B_1 \cap \cdots \cap B_r$ kaikilla $r \geq 1$, niin

$$\mathbb{P}(A_a^c) \leq \mathbb{P}(B_1 \cap \cdots \cap B_r) = (1-s)^r \to 0,$$

kun $r \to \infty$. □

Saamme tästä helposti seuraavan vahvemman tuloksen:

Korollari 4.63. *Olkoon* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ *kuten Lemmassa 4.57. Silloin melkein varmasti jono* $\omega \in \Omega$ *sisältää jokaisen äärellisen jonon* $a \in \{1, 2, \ldots, k\}^m,\ m = 1, 2, \ldots,$ *segmenttinään. Toisin sanoen,*

$$\mathbb{P}(\{\omega \in \Omega \colon \omega = (\omega_j)_{j=1}^{\infty} \textit{ sisältää segmenttinään jokaisen}$$
$$\textit{äärellisen jonon } a \in \{1, \ldots, k\}^m,\ \forall m \in \mathbb{N}\}) = 1.$$

Todistus. Äärellisiä jonoja $a \in \{1, 2, \ldots, k\}^m,\ m \in \mathbb{N}$, on vain numeroituva määrä. Näin ollen, jos A_a on kuten edellä, niin

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\left(\bigcap_a A_a\right) &= \mathbb{P}(\Omega) - \mathbb{P}\left(\Omega \setminus \bigcap_a A_a\right) \\ &= 1 - \mathbb{P}\left(\bigcup_a A_a^c\right) \\ &\geq 1 - \sum_a \mathbb{P}(A_a^c) = 1, \end{aligned}$$

koska Lemman 4.62 nojalla $\mathbb{P}(A_a^c) = 0$ jokaisella äärellisellä jonolla $a \in \{1, \ldots, k\}^m,\ m \in \mathbb{N}$. □

Nyt voimme osoittaa, että tämän kappaleen alussa kuvattu algoritmi tuottaa fraktaalin F.

Lause 4.64. *Satunnaisalgoritmi 4.55 konvergoi m.v. kohti itsesimilaaria joukkoa* F*, ts.* (4.56) *pätee.*

Tarkemmin ilmaistuna: Kutakin jonoa $\omega = (\omega_\ell)_{\ell=1}^{\infty}$ vastaa jono similariteetteja $(\psi_{j_\ell})_{\ell=1}^{\infty}$ sekä joukko $\{x_\ell \colon \ell \in \mathbb{N}\} \subset F$,

$$x_\ell = x_\ell^\omega = \psi_{\omega_\ell}(x_{\ell-1}^\omega),\ \ell \geq 1,\ x_0^\omega \equiv x_0.$$

Tällöin

$$\mathbb{P}(\{\omega \in \Omega \colon d_H(\{x_0, x_1^\omega, x_2^\omega, \ldots, x_\ell^\omega\}, F) \xrightarrow{\ell \to \infty} 0\}) = 1.$$

Todistus. Koska $x_0 \in F$ ja $\psi_j(y) \in F$, jos $y \in F$, niin $\{x_\ell^\omega \colon \ell \in \mathbb{N}\} \subset F$ kaikilla $\omega \in \Omega$. Siten riittää osoittaa, että

$$\mathbb{P}(\{\omega \in \Omega \colon \{x_\ell^\omega \colon \ell \in \mathbb{N}\} \subset F \text{ tiheä}\}) = 1. \tag{4.65}$$

Korollari 4.63 nojalla voimme tarkastella vain sellaisia jonoja $\omega \in \Omega$, jotka sisältävät segmenttinään kaikki äärelliset jonot. Olkoon jatkossa ω tällainen jono.

Olkoon $x \in F$ ja $\varepsilon > 0$. Tällöin

$$|x - \psi_{j_\ell} \circ \psi_{j_{\ell-1}} \circ \cdots \circ \psi_{j_2} \circ \psi_{j_1}(x_0)| < \varepsilon/2$$

sopivalla indeksijonolla $(j_1, j_2, \ldots, j_\ell)$ (HT). Koska ω sisältää segmenttinään tämänkin jonon, niin on olemassa $m \in \mathbb{N}$ s.e.

$$(\omega_{m+1}, \omega_{m+2}, \ldots, \omega_{m+\ell}) = (j_1, j_2, \ldots, j_\ell),$$

jolloin

$$x_{m+\ell}^\omega = \psi_{j_\ell} \circ \cdots \circ \psi_{j_1}(x_m^\omega), \quad x_m^\omega \in F.$$

Nyt

$$\begin{aligned} |x - x_{m+\ell}^\omega| &\leq |x - \psi_{j_\ell} \circ \cdots \circ \psi_{j_1}(x_0)| + |\psi_{j_\ell} \circ \cdots \circ \psi_{j_1}(x_0) - \psi_{j_\ell} \circ \cdots \circ \psi_{j_1}(x_m^\omega)| \\ &\leq \varepsilon/2 + d(\psi_{j_\ell} \circ \cdots \circ \psi_{j_1}(F)) \\ &\leq \varepsilon/2 + (r_{\max})^\ell d(F) \\ &< \varepsilon, \end{aligned}$$

kun ℓ on riittävän suuri (ja riippumaton ω:sta tai m:stä). □

Huomautus 4.66. (a) Lauseen 4.64 todistuksessa *ei* vaadittu, että todennäköisyys valita similariteetti ψ_j olisi sama kaikilla $j = 1, \dots, k$ (eli $p_j \equiv 1/k$). Lause 4.64 siis osoittaa, että algoritmi tuottaa fraktaalin F, ovatpa nämä (kiinteät) todennäköisyydet valittu miten tahansa, kunhan $p_j > 0$ ja $\sum_{j=1}^k p_j = 1$.

Toisaalta p_j:den valinta vaikuttaa siihen kuinka nopeasti satunnaisalgoritmi konvergoi kohti F:ää. Voidaan osoittaa, että paras suppenemisvauhti saadaan, kun valitaan

$$p_j = r_j^s, \quad \text{missä } \sum_{j=1}^k r_j^s = 1 \text{ ja } r_j \text{ on } \psi_j\text{:n skaalaustekijä.} \tag{4.67}$$

(b) Algoritmissa ei ole tärkeää, että $x_0 \in F$, sillä ψ_j:den aidon kontraktisuuden takia alkupisteen vaikutus vähenee nopeasti. Tällöin siis $d_H(\{x_m, x_{m+1}, x_{m+2}, \dots, x_{m+\ell}\}, F)$ saadaan melkein varmasti niin pieneksi kuin halutaan valitsemalla $m, \ell \in \mathbb{N}$ sopivasti.

(c) Lause 4.64 pätee selvästi kaikille aidoille kontraktioille, ei siis pelkästään similariteeteille. Yleisessä tapauksessa optimaalisten todennäköisyyksien valinta (vrt. (4.67)) ei kuitenkaan ole ilmeistä.

4.68 Rieszin kapasiteetti

Tässä kappaleessa tutustumme toiseen tapaan mitata joukkojen kokoa, ns. *Rieszin kapasiteettiin.*

Olkoon $s > 0$ ja μ ei-triviaali Radon-mitta $\mathbb{R}^n$:ssä. Mitan μ *s-energia* on

$$I_s(\mu) = \int_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n} \frac{d(\mu \times \mu)(x,y)}{|x-y|^s}. \tag{4.69}$$

Lause 4.70. *Olkoon $A \subset \mathbb{R}^n$ kompakti ja $s > 0$.*

(a) Jos on olemassa äärellinen ei-triviaali Radon-mitta μ s.e. $\operatorname{supp}(\mu) \subset A$ *ja $I_s(\mu) < \infty$, niin silloin $\mathcal{H}^s(A) = \infty$.*

(b) Jos $\mathcal{H}^t(A) > 0$, niin on olemassa Radon-mitta μ, jolle $\operatorname{supp}(\mu) \subset A$, $\mu(\mathbb{R}^n) = 1$ *ja $I_s(\mu) < \infty$ kaikilla* $0 < s < t$.

(c) $\dim_{\mathcal{H}} A = \sup\{s \colon \exists$ *Radon-mitta* $\mu,\ \mu(\mathbb{R}^n) = 1,\ \operatorname{supp}(\mu) \subset A$ *ja* $I_s(\mu) < \infty\}$ *(tulkinnalla* $\sup \emptyset = 0$*).*

Todistus. Havaitaan aluksi, että (c)-kohta seuraa (a):sta ja (b):stä.

(a) Voidaan olettaa, että $\mu(\mathbb{R}^n) = \mu(A) = 1$. Oletuksesta ja Fubinin lauseesta seuraa, että

$$\int_{\mathbb{R}^n} \frac{d\mu(y)}{|x-y|^s} < \infty \quad \mu\text{-m.k. } x \in A.$$

Dominoidun konvergenssin lauseesta sovellettuna esim. funktiojonoon

$$y \mapsto \frac{\chi_{B(x,1/k)}(y)}{|x-y|^s}, \ k \in \mathbb{N}$$

seuraa, että tällaisilla $x \in A$ pätee

$$\lim_{r \to 0} \int_{B(x,r)} \frac{d\mu(y)}{|x-y|^s} = 0. \tag{4.71}$$

Olkoon $\varepsilon > 0$. Kun r on riittävän pieni, niin (4.71):n nojalla

$$\int_{B(x,r)} \frac{d\mu(y)}{|x-y|^s} \leq \varepsilon.$$

Tästä saamme arvion

$$\frac{1}{r^s}\mu\big(B(x,r)\big) \leq \int_{B(x,r)} \frac{d\mu(y)}{|x-y|^s} \leq \varepsilon,$$

eli

$$\mu\big(B(x,r)\big) \leq \varepsilon r^s \quad \forall r < \delta_x.$$

Siten on olemassa $\delta > 0$ ja osajoukko $B \subset A$, jolle $\mu(B) \geq 1/2$ ja

$$\mu\big(B(x,r)\big) \leq \varepsilon r^s, \quad \text{kun } r < \delta \text{ ja } x \in B. \tag{4.72}$$

Joukot $B_m = \{x \in A \colon \mu\big(B(x,r)\big) \leq \varepsilon r^s \ \forall r < 1/m\}$ ovat nimittäin suljettuja (ylim. HT), erityisesti siis Borel-joukkoja: Lisäksi $B_m \subset B_{m+1}$, joten

$$\lim_{m\to\infty} \mu(B_m) = \mu\big(\bigcup_m B_m\big) = 1.$$

Valitaan sitten B:lle $\delta/3$-peite $\{E_i\}$ s.e. $B \cap E_i \neq \emptyset$ $\forall i$ ja

$$\sum_{i=1}^{\infty} d(E_i)^s \leq \mathcal{H}^s_{\delta/3}(B) + 1.$$

Jokaisella i valitaan piste $x_i \in B \cap E_i$ ja merkitään $r_i = d(E_i)$. Silloin

$$\begin{aligned}\frac{1}{2} \leq \mu(B) &\leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu\big(B(x_i, 2r_i)\big) \overset{(4.72)}{\leq} \varepsilon \sum_{i=1}^{\infty} (2r_i)^s \\ &\leq \varepsilon 2^s \big(\mathcal{H}^s_{\delta/3}(B) + 1\big) \\ &\leq \varepsilon 2^s \big(\mathcal{H}^s(A) + 1\big).\end{aligned}$$

Antamalla $\varepsilon \to 0$ nähdään, että $\mathcal{H}^s(A) = \infty$.

(b) Jos $\mathcal{H}^t(A) > 0$, niin Frostmanin lemman nojalla on olemassa $\mathbb{R}^n$:n Radon-mitta μ s.e. $\mu(\mathbb{R}^n) = 1$, $\operatorname{supp}(\mu) \subset A$ ja

$$\mu\big(B(x,r)\big) \leq c_0 r^t \tag{4.73}$$

kaikilla $x \in \mathbb{R}^n$ ja kaikilla $r > 0$. Käytetään seuraavaksi Reaalianalyysi I:stä tuttua kaavaa ([Ho2, Lemma 3.15]):

$$\int_{\mathbb{R}^n} f \, d\mu = \int_0^{\infty} \mu\big(\{y \in \mathbb{R}^n \colon f(y) > \lambda\}\big) \, d\lambda, \tag{4.74}$$

missä $f \geq 0$ on μ-mitallinen. Soveltamalla kaavaa (4.74) funktioon $f(y) = |x-y|^{-s}$ saadaan

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n} |x-y|^{-s}\, d\mu(y) &= \int_0^\infty \mu\big(\{y \in \mathbb{R}^n \colon |x-y|^{-s} > \lambda\}\big)\, d\lambda \\
&= \int_0^\infty \mu\big(B(x, \lambda^{-1/s})\big)\, d\lambda \quad (r = \lambda^{-1/s},\ r^{-s} = \lambda) \\
&= s \int_0^\infty \mu\big(B(x,r)\big) r^{-s-1}\, dr \\
&\leq c_0 s \int_0^1 r^{t-s-1}\, dr + s \int_1^\infty \mu(\mathbb{R}^n) r^{-s-1}\, dr \\
&= \frac{c_0 s}{t-s} + 1 < \infty.
\end{aligned}$$

Integroimalla lopuksi vielä x:n suhteen saadaan

$$I_s(\mu) \leq \frac{c_0 s}{t-s} + 1 < \infty.$$

□

Kun $A \subset \mathbb{R}^n$, niin merkitään

$$\mathcal{M}_1(A) = \{\mu \colon \mu \text{ Radon-mitta } \mathbb{R}^n\text{:ssä, } \operatorname{supp}(\mu) \subset A \text{ kompakti, } \mu(\mathbb{R}^n) = 1\}.$$

Määritelmä 4.75. Olkoon $A \subset \mathbb{R}^n$ ja $s > 0$. Joukon A *(Rieszin) s-kapasiteetti* on

$$C_s(A) = \sup\big\{\frac{1}{I_s(\mu)} \colon \mu \in \mathcal{M}_1(A)\big\}.$$

Huomautus 4.76.

1. Yksiön $\{x_0\}$ s-kapasiteetti on nolla kaikilla $s > 0$ (HT).
2. Jokaisen rajoitetun joukon s-kapasiteetti on äärellinen.
3. $$C_s(A) > 0 \iff \exists \mu \in \mathcal{M}_1(A) \text{ s.e. } I_s(\mu) < \infty.$$

Esimerkki 4.77. Olkoon $A = [0,1]$ ja $s \in (0,1)$. Silloin

$$\int_0^1 \frac{dm(y)}{|x-y|^s} \leq K_s < \infty$$

kaikilla $x \in A$. Siten $I_s(m\llcorner A) < \infty$ ja $C_s(A) > 0$, jos $0 < s < 1$. Toisaalta $I_1(\mu) = \infty$ kaikilla $\mu \in \mathcal{M}_1(A)$, joten $C_1(A) = 0$ (HT).

Tärkeää ei useinkaan ole $C_s(A)$:n suuruus, vaan se, onko $C_s(A)$ nolla vai ei. Voimme nyt muotoilla uudelleen Lauseen 4.70.

Lause 4.78. *Olkoon $A \subset \mathbb{R}^n$ kompakti ja $s > 0$.*

(a) *Jos $\mathcal{H}^s(A) < \infty$, niin $C_s(A) = 0$.*

(b) *Jos $C_s(A) = 0$, niin $\mathcal{H}^t(A) = 0$ kaikilla $t > s$.*

(c) $\dim_{\mathcal{H}} A = \inf\{s \colon C_s(A) = 0\}$.

5 Derivointi

Tässä luvussa täydennämme Reaalianalyysi I:n (Luku 3) derivointiteoriaa.

5.1 Besicovitchin peitelause ja Vitalin peitelause $\mathbb{R}^n$:n Radon-mitoille

Yleistämme aluksi Vitalin peitelauseen koskemaan kaikkia $\mathbb{R}^n$:n Radon-mittoja. Tähän tarvitsemme seuraavan *Besicovitchin peitelauseen*. Se poikkeaa ns. peruspeitelauseesta (Reaalianalyysi I, [Ho2, Lause 3.3]) siinä, etteivät kuulat ole erillisiä. Kuulien päällekkäisyys on kuitenkin rajoitettua.

Lause 5.2 (Besicovitchin peitelause)**.** *On olemassa dimensiosta n riippuvat luonnolliset luvut $P(n)$ ja $Q(n)$ niin, että seuraava pätee: Olkoon $A \subset \mathbb{R}^n$ rajoitettu ja $\mathcal{B}$ perhe $\mathbb{R}^n$:n* suljettuja *kuulia s.e. jokaista $x \in A$ kohti on olemassa $\bar{B}(x,r) \in \mathcal{B}$. Tällöin:*

(i) On olemassa numeroituva (mahd. äärellinen) kokoelma kuulia $B_i \in \mathcal{B}$, jotka peittävät A:n ja jokainen $\mathbb{R}^n$ piste kuuluu korkeintaan $P(n)$:ään kuulaan B_i, ts.

$$\chi_A \leq \sum_i \chi_{B_i} \leq P(n).$$

(ii) On olemassa numeroituvat perheet $\mathcal{B}_1, \ldots, \mathcal{B}_{Q(n)} \subset \mathcal{B}$ s.e.

$$A \subset \bigcup_{i=1}^{Q(n)} \Big(\bigcup_{B \in \mathcal{B}_i} B \Big)$$

ja jokaisen perheen $\mathcal{B}_i, i = 1, \ldots, Q(n)$, kuulat ovat erilliset eli

$$B \cap B' = \emptyset, \quad \text{jos } B, B' \in \mathcal{B}_i,\ B \neq B'.$$

Todistus perustuu $\mathbb{R}^n$ geometrisiin ominaisuuksiin. Seuraamme Mattilan kirjan [Mat] esitystä.

Lemma 5.3. *Olkoot $x, y \in \mathbb{R}^n$ pisteitä, joille $0 < |x| < |x - y|$ ja $0 < |y| < |x - y|$. Silloin*

$$\left| \frac{y}{|y|} - \frac{x}{|x|} \right| \geq 1,$$

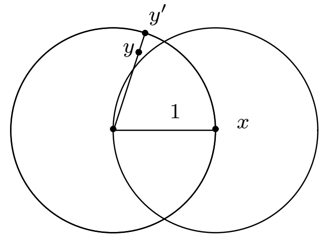
ts. vektoreiden x ja y välinen kulma on vähintään $\pi/3$.

Todistus. Soveltamalla kiertoa ja skaalausta voimme olettaa, että $n = 2,\ x = (1,0)$ ja $|y| \leq 1$. Silloin $|y - x| > |x| = 1$ ja (ks. kuvio)

$$y' = \frac{y}{|y|} \notin B(x,1),$$

koska $y \notin B(x,1)$. Siten

$$\left| \frac{y}{|y|} - \frac{x}{|x|} \right| = |y' - x| \geq 1.$$



□

Lemma 5.4. *On olemassa vain dimensiosta n riippuva vakio $N(n)$, jolle pätee: jos $r_1, \dots, r_k > 0$ ja $x_1, \dots, x_k \in \mathbb{R}^n$ toteuttavat ehdot*

(a) $x_j \notin \bar{B}(x_i, r_i)$, *kun* $j \neq i$ *ja*

(b) $\bigcap_{i=1}^k \bar{B}(x_i, r_i) \neq \emptyset$,

niin $k \leq N(n)$.

Todistus. Voimme olettaa, että $0 \in \cap_{i=1}^k \bar{B}(x_i, r_i)$, jolloin $|x_i| \leq r_i$ ja (ehdon (a) nojalla) $x_i \neq 0$ kaikilla $1 \leq i \leq k$. Siis

$$|x_i| \leq r_i < |x_i - x_j|,$$

jos $i \neq j$, ja Lemman 5.3 mukaan

$$\Big| \frac{x_i}{|x_i|} - \frac{x_j}{|x_j|} \Big| \geq 1, \tag{5.5}$$

kun $i \neq j$. Joukko $\partial B(0,1) \subset \mathbb{R}^n$ on kompakti, joten se voidaan peittää $N(n)$:llä suljetulla 1/2-säteisellä kuulalla $\bar{B}(y_\ell, 1/2), \ell = 1, \dots, N(n)$. Nyt on oltava $k \leq N(n)$, sillä muuten joillakin indekseillä $1 \leq i, j \leq k, i \neq k$, pisteet $x_i/|x_i|$ ja $x_j/|x_j|$ kuuluisivat samaan kuulaan $\bar{B}(y_\ell, 1/2)$, mikä olisi ristiriidassa (5.5):n kanssa. □

Besicovitchin peitelauseen todistus.

(i) Valitaan jokaisella $x \in A$ kuula $\bar{B}(x, r(x)) \in \mathcal{B}$ ja merkitään

$$M_1 = \sup_{x \in A} r(x).$$

Koska A on rajoitettu, voidaan olettaa, että $M_1 < \infty$. (Muussa tapauksessa riittää valita yksi ainoa riittävän iso kuula $B \in \mathcal{B}$.) Valitaan $x_1 \in A$ s.e. $r_1 \geq M_1/2$ ja tämän jälkeen induktiivisesti

$$x_{j+1} \in A \setminus \bigcup_{i=1}^{j} \bar{B}(x_i, r(x_i)) \quad \text{s.e. } r(x_{j+1}) \geq M_1/2$$

niin kauan kuin mahdollista. Koska A on rajoitettu ja $|x_i - x_j| \geq M_1/2$, kun $i \neq j$, niin prosessi päättyy ja saamme pisteet x_i ja kuulat $B_i = \bar{B}(x_i, r(x_i)),\ i = 1, \dots, k_1$.

Merkitään sitten

$$M_2 = \sup\{r(x) \colon x \in A \setminus \cup_{i=1}^{k_1} B_i\}.$$

Selvästi $M_2 \leq M_1/2$. Valitaan

$$x_{k_1+1} \in A \setminus \bigcup_{i=1}^{k_1} \bar{B}(x_i, r(x_i)) \quad \text{s.e. } r(x_{k_1+1}) \geq M_2/2$$

ja jälleen induktiivisesti

$$x_{j+1} \in A \setminus \bigcup_{i=1}^{j} \bar{B}(x_i, r(x_i)) \quad \text{s.e. } r(x_{j+1}) \geq M_2/2$$

kunnes prosessi päättyy samasta syystä kuin aiemmin. Näin saamme

- indeksit $0 = k_0 < k_1 < k_2 < \cdots$,
- luvut $M_1 > M_2 > \cdots$ s.e. $M_{i+1} \le M_i/2$,
- kuulat $B_i = \bar{B}(x_i, r(x_i)) \in \mathcal{B}$ ja
- indeksijoukot $I_j = \{k_{j-1}+1, \ldots, k_j\},\ j = 1, 2, \ldots$.

Osoitetaan, että $\{B_i\}$ toteuttaa vaaditut ehdot. Tätä varten todetaan, että

$$M_j/2 \le r(x_i) \le M_j \le M_{j-1}/2 \quad \forall i \in I_j, \tag{5.6}$$

$$x_{j+1} \in A \setminus \bigcup_{i=1}^{j} B_i \quad \forall j = 1, 2, \ldots, \tag{5.7}$$

$$x_i \in A \setminus \bigcup_{m \ne k} \bigcup_{j \in I_m} B_j, \quad \forall i \in I_k, k = 1, 2, \ldots. \tag{5.8}$$

Ominaisuudet (5.6) ja (5.7) seuraavat suoraan valintaprosessista. Ehdon (5.8):n todistamiseksi olkoon $i \in I_k, m \ne k$ ja $j \in I_m$. Jos $m < k$, niin ehdosta (5.7) seuraa, että $x_i \notin B_j$. Jos $m > k$, niin ehdon (5.6) nojalla

$$r(x_j) \le M_j \le M_{j-1}/2 \le M_k/2 \le r(x_i).$$

Koska (5.7):n mukaan $x_j \notin B_i$, niin on oltava $x_i \notin B_j$, ja siten (5.8) pätee. Ehdoista (5.6) seuraa, että

$$M_i \to 0 \quad \text{ja} \quad r(x_i) \to 0, \tag{5.9}$$

kun $i \to \infty$. Tästä seuraa, että

$$A \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} B_i.$$

Jos nimittäin olisi olemassa piste

$$x \in A \setminus \bigcup_{i=1}^{\infty} B_i$$

s.e. $M_j/2 \le r(x) < M_j$, niin olisimme valinneet x:n pisteeksi x_i jollakin $i \in I_j$, jolloin $x \in \cup_{i \in I_j} B_i$.

Osoitamme seuraavaksi, että luvuksi $P(n)$ voidaan valita $P(n) = 16^n N(n)$, missä $N(n)$ on kuten Lemmassa 5.4. Oletetaan, että

$$x \in \bigcap_{i=1}^{p} B_{m_i}.$$

Havaitaan ensin, että ehdon (5.8) ja Lemman 5.4 nojalla indeksit m_i voivat kuulua korkeintaan $N(n)$:ään eri indeksijoukkoon I_j, ts.

$$\operatorname{card}\{j \colon I_j \cap \{m_i \colon i = 1, \ldots, p\} \ne \emptyset\} \le N(n).$$

Riittää siis näyttää, että

$$\operatorname{card}\{I_j \cap \{m_i \colon i = 1, \ldots, p\}\} \le 16^n \ \forall j = 1, 2, \ldots. \tag{5.10}$$

Kiinnitetään j ja merkitään

$$I_j \cap \{m_i \colon i = 1, \dots, p\} = \{\ell_1, \dots, \ell_q\}.$$

Ehtojen (5.6) ja(5.7) nojalla kuulat

$$B(x_{\ell_i}, \frac{1}{4} r(x_{\ell_i})),\ i = 1, \dots, q,$$

ovat erillisiä ja ne kaikki sisältyvät kuulaan $B(x, 2M_j)$. Ehdon (5.6):n mukaan $r(x_{\ell_i}) \geq M_j/2$, joten merkitsemällä $A_n = m_n(B(0,1))$ saadaan

$$\begin{aligned} qA_n(M_j/8)^n &\leq \sum_{i=1}^{q} m_n(B(x_{\ell_i}, \frac{1}{4} r(x_{\ell_i})) \\ &\leq m_n(B(x, 2M_j) \\ &= A_n(2M_j)^n, \end{aligned}$$

josta saadaan haluttu arvio $q \leq 16^n$.

(ii) Olkoot $B_1, B_2, \dots$ (i)-kohdassa löydetyt kuulat. Ehdon (5.9) nojalla voimme olettaa, että $r_1 \geq r_2 \geq \cdots$, missä $r_i = r(x_i)$. Merkitään

$$B_{1,1} = B_1$$

ja induktiivisesti

$$B_{1,j+1} = B_k,$$

missä k on pienin indeksi, jolla

$$B_k \cap \bigcup_{i=1}^{j} B_{1,i} = \emptyset.$$

Näin saadaan perhe

$$\mathcal{B}_1 = \{B_{1,i} \colon i = 1, 2, \dots\}.$$

Jos yhdiste

$$\bigcup_{B \in \mathcal{B}_1} B \neq \emptyset$$

ei peitä joukkoa A, niin merkitään

$$B_{2,1} = B_k,$$

missä k on pienin indeksi, jolla $B_k \notin \mathcal{B}_1$. Merkitään jälleen induktiivisesti

$$B_{2,j+1} = B_k,$$

missä k on pienin indeksi, jolla

$$B_k \cap \bigcup_{i=1}^{j} B_{2,i} = \emptyset.$$

Näin jatkamalla saadaan osaperheet $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2, \dots \subset \{B_i \colon i = 1, 2, \dots\}$ niin, että kukin $\mathcal{B}_i$ koostuu erillisistä kuulista.

Osoitetaan lopuksi, että

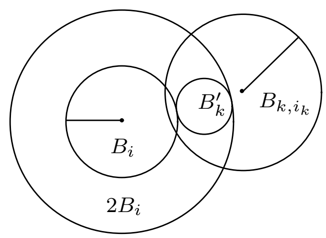
$$A \subset \bigcup_{k=1}^{m} \bigcup_{B \in \mathcal{B}_k} B, \tag{5.11}$$

jollain $m \leq 4^n P(n) + 1$, jolloin valitsemalla $Q(n) = 4^n P(n) + 1$ lause tulee todistettua. Tätä varten oletetaan, että on olemassa piste

$$x \in A \setminus \bigcup_{k=1}^{m} \bigcup_{B \in \mathcal{B}_k} B$$

ja osoitetaan, että silloin välttämättä $m \leq 4^n P(n)$. Koska $A \subset \cup_i B_i$, niin $x \in B_i$ jollakin i. Silloin kaikilla $k = 1, \dots, m$ $B_i \notin \mathcal{B}_k$, joten perheiden $\mathcal{B}_k$ konstruktion nojalla on olemassa i_k s.e. $B_i \cap B_{k,i_k} \neq \emptyset$ ja $r_i \leq r_{k,i_k}$, missä r_i on B_i:n ja r_{k,i_k} on B_{k,i_k}:n säde. Tällöin jokaisella $k = 1, \dots, m$ on olemassa $r_i/2$-säteiset kuulat

$$B'_k \subset 2B_i \cap B_{k,i_k}.$$



Jokainen $\mathbb{R}^n$:n piste sisältyy (i)-kohdan nojalla korkeintaan $P(n)$:ään kuulaan $B_{k,i_k}, k = 1, \dots, m$, joten sama pätee myös pienemmille kuulille B'_k, ts.

$$\sum_{k=1}^{m} \chi_{B'_k} \leq P(n) \chi_{\cup_{k=1}^m B'_k}.$$

Toisaalta $B'_k \subset 2B_i$, joten

$$\begin{aligned}
2^n A_n r_i^n &= m_n(2B_i) \\
&\geq m_n\Big(\bigcup_{k=1}^{m} B'_k\Big) \\
&= \int \chi_{\cup_{k=1}^m B'_k} \, dm_n \\
&\geq \frac{1}{P(n)} \int \sum_{k=1}^{m} \chi_{B'_k} \\
&= \frac{1}{P(n)} \sum_{k=1}^{m} m_n(B'_k) \\
&= \frac{1}{P(n)} m A_n (r_i/2)^n,
\end{aligned}$$

josta saadaan $m \leq 4^n P(n)$.

$\square$

Lause 5.12 (Vitalin peitelause $\mathbb{R}^n$:n Radon-mitoille)**.** *Olkoon μ Radon-mitta $\mathbb{R}^n$:ssä, $A \subset \mathbb{R}^n$ Borel-joukko ja $\mathcal{B}$ perhe suljettuja kuulia s.e.*

$$\inf\{r\colon \bar{B}(x,r) \in \mathcal{B}\} = 0 \quad \forall x \in A. \tag{5.13}$$

Silloin voidaan valita erilliset kuulat $B_1, B_2, \ldots \in \mathcal{B}$, joilla

$$\mu\big(A \setminus \bigcup_{i=1} B_i\big) = 0.$$

Todistus. Oletetaan ensin, että A on rajoitettu. Besicovitchin peitelauseen 5.2 mukaan

$$A \subset \bigcup_{i=1}^{Q(n)} \bigcup_{B \in \mathcal{B}_i} B,$$

missä $\mathcal{B}_i \subset \mathcal{B},\ i = 1, \ldots, Q(n)$, ja jokaisen $\mathcal{B}_i$:n kuulat ovat erillisiä. Silloin

$$\mu(A) \le \sum_{i=1}^{Q(n)} \mu\big(\bigcup_{B \in \mathcal{B}_i} B\big),$$

joten on oltava

$$\mu\big(\bigcup_{B \in \mathcal{B}_i} B\big) \ge \frac{1}{Q(n)} \mu(A)$$

jollakin i. Siten voimme valita äärellisen osaperheen $\mathcal{D}_1 \subset \mathcal{B}_i$, jolle pätee

$$\mu\big(\bigcup_{B \in \mathcal{D}_1} B\big) \ge \frac{1}{2Q(n)} \mu(A).$$

Merkitsemällä

$$A_1 = A \setminus \bigcup_{B \in \mathcal{D}_1} B$$

pätee siis

$$\mu(A_1) \le \Big(1 - \frac{1}{2Q(n)}\Big)\mu(A) < \infty.$$

Sovelletaan sitten samaa päättelyä joukkoon A_1 ja kuulaperheeseen

$$\mathcal{B}^1 = \{B \in \mathcal{B}\colon B \cap \bigcup_{B \in \mathcal{D}_1} B = \emptyset\}.$$

Havaitaan, että ehto (5.13) pätee $\mathcal{B}^1$:lle jokaisessa A_1:n pisteessä, sillä $\cup_{B \in \mathcal{D}_1} B$ on suljettu. Näin saadaan äärellinen perhe $\mathcal{D}_2 \subset \mathcal{B}^1$ erillisiä suljettuja kuulia. Lisäksi

$$\big(\bigcup_{B \in \mathcal{D}_2} B\big) \cap \big(\bigcup_{B \in \mathcal{D}_1} B\big) = \emptyset$$

ja

$$\mu(A_2) \le \Big(1 - \frac{1}{2Q(n)}\Big)\mu(A_1),$$

missä

$$A_2 = A_1 \setminus \bigcup_{B \in \mathcal{D}_2} B.$$

Toistamalla samaa päättelyä saadaan

$$\mu\big(A \setminus \bigcup_{B \in \mathcal{D}_1 \cup \cdots \cup \mathcal{D}_k} B\big) \le \Big(1 - \frac{1}{2Q(n)}\Big)^k \mu(A).$$

Antamalla $k \to \infty$ nähdään, että

$$\bigcup_{k=1}^{\infty} \mathcal{D}_k$$

on etsitty joukko erillisiä suljettuja kuulia.

Luovutaan sitten oletuksesta, että A on rajoitettu. Koska μ on Radon-mitta, niin

$$\mu\big(\partial B(0,r)\big) > 0$$

korkeintaan *numeroituvan* monella $r > 0$. Siten on olemassa säteet $0 < r_1 < r_2 < \cdots < r_k \xrightarrow{k \to \infty} \infty$, joilla

$$\mu\big(\partial B(0,r_k)\big) = 0 \quad k \ge 1.$$

Merkitään

$$\begin{aligned}
A_k &= A \cap \{x \in \mathbb{R}^n \colon r_{k-1} < |x| < r_k\}, \quad k \ge 2,\\
A_1 &= A \cap B(0,r_1),\\
\mathcal{B}^1 &= \{B \in \mathcal{B} \colon B \subset B(0,r_1)\},\\
\mathcal{B}^k &= \{B \in \mathcal{B} \colon B \subset B(0,r_k) \setminus \bar{B}(0,r_{k-1})\}, \quad k \ge 1.
\end{aligned}$$

Vaadittu perhe erillisiä kuulia saadaan nyt soveltamalla edellä todistettua rajoitettuihin joukkoihin A_k ja peitteisiin $\mathcal{B}^k$ erikseen jokaisella $k \ge 1$. □

Lause 5.14. *Olkoon μ Radon-mitta $\mathbb{R}^n$:ssä ja $A \subset \mathbb{R}^n$ μ-mitallinen. Silloin*

$$\lim_{r \to 0+} \frac{\mu(A \cap \bar{B}(x,r))}{\mu(\bar{B}(x,r))} = 1 \ \mu\text{-m.k. } x \in A \tag{5.15}$$

ja

$$\lim_{r \to 0+} \frac{\mu(A \cap \bar{B}(x,r))}{\mu(\bar{B}(x,r))} = 0 \ \mu\text{-m.k. } x \in \mathbb{R}^n \setminus A. \tag{5.16}$$

Todistus. Koska

$$\frac{\mu(A \cap \bar{B}(x,r))}{\mu(\bar{B}(x,r))} \le 1,$$

niin

$$\lim_{r \to 0+} \frac{\mu(A \cap \bar{B}(x,r))}{\mu(\bar{B}(x,r))} = 1 \iff \liminf_{r \to 0+} \frac{\mu(A \cap \bar{B}(x,r))}{\mu(\bar{B}(x,r))} = 1.$$

Toisaalta

$$\Big\{x \in A \colon \liminf_{r \to 0+} \frac{\mu(A \cap \bar{B}(x,r))}{\mu(\bar{B}(x,r))} < 1\Big\} = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k,$$

missä

$$A_k = \big\{x \in A\colon \liminf_{r\to 0+} \frac{\mu(A \cap \bar B(x,r))}{\mu(\bar B(x,r))} < 1 - \frac{1}{k}, |x| < k\big\},$$

joten (5.15):n todistamiseen riittää näyttää, että A_k on μ-mitallinen ja $\mu(A_k) = 0$ kaikilla $k \in \mathbb{N}$.

Mitallisuuden osoittamiseksi havaitaan, että kiinteällä x funktiot $r \mapsto \mu(A \cap \bar B(x,r))$ ja $r \mapsto \mu(\bar B(x,r))$ ovat oikealta jatkuvia (sillä $\bar B(x,r) = \cap_j \bar B(x, r + h_j)$, jos $h_j \searrow 0$). Siten joukon A_k määrittelevässä ehdossa voidaan $\liminf$ korvata $\liminf$:llä yli numeroituvan jonon $r_i \searrow 0$. Toisaalta kiinteällä r funktiot

$$x \mapsto \mu(A \cap \bar B(x,r)) \quad \text{ja} \quad x \mapsto \mu(\bar B(x,r))$$

ovat Borel-funktioita (HT 7/1). Siten funktio

$$x \mapsto \liminf_{r\to 0+} \frac{\mu(A \cap \bar B(x,r))}{\mu(\bar B(x,r))}$$

on Borel-funktioiden numeroituvana $\liminf$:nä itsekin Borel-funktio ja näin ollen A_k on Borel-joukko.

Kiinnitetään sitten k ja merkitään $\lambda = 1 - 1/k$. Olkoon $\varepsilon > 0$ ja $U \subset \mathbb{R}^n$ avoin s.e. $A_k \subset U$ ja $\mu(U) \le \mu(A_k) + \varepsilon$. Kuulaperhe

$$\mathcal{B} = \{\bar B(x,r)\colon x \in A_k, \mu(A \cap \bar B(x,r)) < \lambda\mu(\bar B(x,r)), \bar B(x,r) \subset U\}$$

toteuttaa Vitalin peitelauseen 5.12 oletukset, kun A:n paikalla on (rajoitettu joukko) A_k. Siten on olemassa erilliset kuulat $B_1, B_2, \ldots \in \mathcal{B}$ s.e.

$$\mu\big(A_k \setminus \cup_i B_i\big) = 0.$$

Nyt

$$\begin{aligned}\mu(A_k) &= \mu\big(A_k \cap \cup_i B_i\big) + \mu\big(A_k \setminus \cup_i B_i\big)\\ &\le \sum_i \mu(A_k \cap B_i) \le \lambda \sum_i \mu(B_i)\\ &= \lambda\mu\big(\cup_i B_i\big) \le \lambda\mu(U)\\ &\le \lambda(\mu(A_k) + \varepsilon).\end{aligned}$$

Antamalla $\varepsilon \to 0$ saadaan

$$\mu(A_k) \le \lambda\mu(A_k) < \infty,$$

(sillä A_k on rajoitettu). Koska $\lambda < 1$, seuraa tästä, että $\mu(A_k) = 0$ ja (5.15) on siten todistettu. Ehto (5.16) saadaan soveltamalla (5.15):tä joukkoon $\mathbb{R}^n \setminus A$. □

5.17 $\mathbb{R}^n$:n Radon-mittojen derivointi

Oletetaan, että μ ja ν ovat Radon-mittoja $\mathbb{R}^n$:ssä.

Määritelmä 5.18. Mitan μ *ylä- ja aladerivaatat* ν:n suhteen pisteessä $x \in \mathbb{R}^n$ ovat

$$\overline{D}_\nu\mu(x) = \begin{cases} \limsup_{r\to 0+} \dfrac{\mu(\bar B(x,r))}{\nu(\bar B(x,r))}, & \text{jos } \nu(\bar B(x,r)) > 0 \text{ kaikilla } r > 0;\\ +\infty, & \text{jos } \nu(\bar B(x,r)) = 0 \text{ jollakin } r > 0\end{cases} \tag{5.19}$$

$$\underline{D}_\nu\mu(x) = \begin{cases} \liminf_{r\to 0+} \dfrac{\mu(\bar B(x,r))}{\nu(\bar B(x,r))} & \text{jos } \nu(\bar B(x,r)) > 0 \text{ kaikilla } r > 0;\\ +\infty, & \text{jos } \nu(\bar B(x,r)) = 0 \text{ jollakin } r > 0.\end{cases} \tag{5.20}$$

Mitan μ *derivaatta* ν:n suhteen x:ssä on

$$D_\nu\mu(x) = \lim_{r\to 0+} \frac{\mu(\bar{B}(x,r))}{\nu(\bar{B}(x,r))} = \overline{D}_\nu\mu(x) = \underline{D}_\nu\mu(x), \tag{5.21}$$

jos raja-arvo on olemassa (voi olla $= \infty$).

Lemma 5.22. *Funktiot $x \mapsto \underline{D}_\nu\mu(x)$ ja $x \mapsto \overline{D}_\nu\mu(x)$ ovat Borel-mitallisia.*

Todistus. Katso Lauseen 5.14 todistusta.

Lemma 5.23. *Olkoon $A \subset \mathbb{R}^n$ Borel-joukko ja $0 < t < \infty$.*

(a) Jos $\underline{D}_\nu\mu(x) \le t$ kaikilla $x \in A$, niin $\mu(A) \le t\nu(A)$.

(b) Jos $\overline{D}_\nu\mu(x) \ge t$ kaikilla $x \in A$, niin $\mu(A) \ge t\nu(A)$.

Todistus.

(a) Voidaan olettaa, että $\nu(A) < \infty$. Olkoon $\varepsilon > 0$ ja $U \subset \mathbb{R}^n$ avoin s.e. $A \subset U$ ja $\nu(U) \le \nu(A)+\varepsilon$. Jokaisella $x \in A$ on olemassa jono $r_{x,i} \xrightarrow{i\to\infty} 0$ s.e.

$$\mu(\bar{B}(x,r_{x,i})) \le (t+\varepsilon)\nu(\bar{B}(x,r_{x,i})) \quad \text{ja} \quad \bar{B}(x,r_{x,i}) \subset U \quad \forall i \in \mathbb{N}.$$

Soveltamalla Vitalin peitelausetta saadaan erilliset kuulat $\bar{B}(x_j,r_j) \subset U$ s.e.

$$\mu\big(A \setminus \bigcup_j \bar{B}(x_j,r_j)\big) = 0.$$

Tällöin

$$\begin{aligned}
\mu(A) &\le \mu\big(A \setminus \bigcup_j \bar{B}(x_j,r_j)\big) + \mu\big(\bigcup_j \bar{B}(x_j,r_j)\big) \\
&\le (t+\varepsilon)\sum_j \nu(\bar{B}(x_j,r_j)) \\
&\le (t+\varepsilon)\nu(U) \\
&\le (t+\varepsilon)\big(\nu(A)+\varepsilon\big).
\end{aligned}$$

Väite seuraa antamalla $\varepsilon \to 0$.

(b) Todistetaan samoin.

$\square$

Lause 5.24. *Jos μ ja ν ovat Radon-mittoja $\mathbb{R}^n$:ssä, niin ν-m.k. $x \in \mathbb{R}^n$ on olemassa $D_\nu\mu(x) < \infty$.*

Todistus. Kun $m,k \in \mathbb{N}$ ja $p,q \in \mathbb{Q},\ 0 < p < q$, niin merkitään

$$\begin{aligned}
A_{m,p,q} &= \{x \in \bar{B}(0,m) \colon \underline{D}_\nu\mu(x) \le p < q \le \overline{D}_\nu\mu(x)\}, \\
A_{m,k} &= \{x \in \bar{B}(0,m) \colon \overline{D}_\nu\mu(x) \ge k\}.
\end{aligned}$$

Lemman 5.22 nojalla $A_{m,p,q}$ ja $A_{m,k}$ ovat Borel-joukkoja. Lemmasta 5.23 seuraa, että

$$q\,\nu(A_{m,p,q}) \le \mu(A_{m,p,q}) \le p\,\nu(A_{m,p,q}).$$

Koska $\mu(A_{m,p,q}) \le \mu(\bar{B}(0,m)) < \infty$ ja $p < q$, niin on oltava

$$\nu(A_{m,p,q}) = 0.$$

Toisaalta

$$\{x \in \mathbb{R}^n \colon \overline{D}_\nu \mu(x) > \underline{D}_\nu \mu(x)\} = \bigcup_{\substack{p,q \in \mathbb{Q},\, p<q \\ m \in \mathbb{N}}} A_{m,p,q},$$

joten

$$\nu\big(\{x \in \mathbb{R}^n \colon \overline{D}_\nu \mu(x) > \underline{D}_\nu \mu(x)\}\big) = 0$$

ja $D_\nu \mu(x)$ on olemassa ν-m.k. $x \in \mathbb{R}^n$. Lemman 5.23 nojalla

$$\nu(A_{m,k}) \le \frac{1}{k} \mu(\bar{B}(0,m)),$$

joten

$$\nu\big(\{x \in \bar{B}(0,m) \colon \overline{D}_\nu \mu(x) = \infty\}\big) \le \nu(A_{m,k}) \le \frac{1}{k} \mu(\bar{B}(0,m)) \ \forall k \in \mathbb{N}.$$

Antamalla $k \to \infty$ (ja sitten $m \to \infty$) saadaan, että $D_\nu \mu(x) < \infty$ ν-m.k. $x \in \mathbb{R}^n$. □

Palautetaan seuraavaksi Reaalianalyysi I:stä mieliin mittojen absoluuttinen jatkuvuus. Olkoon $(X, \mathcal{M}, \mu)$ mitta-avaruus ja $\nu \colon \mathcal{M} \to [0, +\infty]$ toinen mitta. Mitta μ on *absoluuttisesti jatkuva* ν:n suhteen (merk. $\mu \ll \nu$), jos $\mu(E) = 0$ aina kun $E \in \mathcal{M}$ ja $\nu(E) = 0$.

Lause 5.25 (Radon-Nikodym)**.** *Olkoot μ ja ν Radon-mittoja $\mathbb{R}^n$:ssä ja olkoon $\mu \ll \nu$. Silloin*

$$\mu(A) = \int_A D_\nu \mu(x)\, d\nu(x)$$

kaikilla Borel-joukoilla $A \subset \mathbb{R}^n$.

Todistus. Olkoon $A \subset \mathbb{R}^n$ Borel ja merkitään

$$A_k = \{x \in A \colon t^k \le D_\nu \mu(x) < t^{k+1}\},$$

kun $t \in (1,2)$ ja $k \in \mathbb{Z}$. Lemman 5.23 (b)-kohdan nojalla

$$\begin{aligned}
\int_A D_\nu \mu(x)\, d\nu(x) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \int_{A_k} D_\nu \mu(x)\, d\nu(x) \\
&\le \sum_{k=-\infty}^{\infty} t^{k+1} \nu(A_k) \le \sum_{k=-\infty}^{\infty} t\, \mu(A_k) \\
&\le t\, \mu(A).
\end{aligned}$$

Antamalla $t \to 1$ saadaan arvio

$$\int_A D_\nu \mu(x)\, d\nu(x) \le \mu(A), \tag{5.26}$$

jonka todistamiseen ei käytetty oletusta $\mu \ll \nu$.

Merkitään

$$\begin{aligned}
A_0 &= \{x \in A \colon D_\nu \mu(x) = 0\}, \\
A_\infty &= \{x \in A \colon D_\nu \mu(x) = \infty\} \quad \text{ja} \\
A_N &= \{x \in A \colon D_\nu \mu(x) \text{ ei ole olemassa}\}.
\end{aligned}$$

Lauseen 5.24 mukaan $\nu(A_\infty) = 0 = \nu(A_N)$, josta saadaan oletuksen $\mu \ll \nu$ nojalla

$$\mu(A_\infty) = 0 = \mu(A_N).$$

Lemman 5.23 (a)-kohdasta seuraa, että $\mu(A_0 \cap \bar{B}(0,i)) \le t\,\nu(A_0 \cap \bar{B}(0,i))$ kaikilla $t > 0$ ja $i \in \mathbb{N}$, joten $\mu(A_0 \cap \bar{B}(0,i)) = 0$ $\forall i \in \mathbb{N}$ ja siten $\mu(A_0) = 0$. Käyttämällä edelleen Lemman 5.23 (a)-kohtaa saadaan nyt arvio toiseen suuntaan

$$\begin{aligned}\int_A D_\nu\mu(x)\,d\nu(x) &\ge \sum_{k\in\mathbb{Z}} \int_{A_k} D_\nu\mu(x)\,d\nu(x)\\ &\ge \sum_{k\in\mathbb{Z}} t^k \nu(A_k) \ge \sum_{k\in\mathbb{Z}} t^{-1}\mu(A_k)\\ &\ge t^{-1}\,\mu(A),\end{aligned}$$

sillä

$$\begin{aligned}\mu(A) &\le \mu\big(A \setminus \cup_{k\in\mathbb{Z}} A_k\big) + \sum_{k\in\mathbb{Z}} \mu(A_k)\\ &\le \mu(A_0 \cup A_\infty \cup A_N) + \sum_{k\in\mathbb{Z}} \mu(A_k)\\ &= \sum_{k\in\mathbb{Z}} \mu(A_k).\end{aligned}$$

Väite seuraa nyt antamalla $t \to 1$. □

Korollari 5.27. *Jos $f\colon \mathbb{R}^n \to \dot{\mathbb{R}}$ on lokaalisti μ-integroituva, niin*

$$\lim_{r\to 0+} \frac{1}{\mu(\bar{B}(x,r))} \int_{\bar{B}(x,r)} f\,d\mu = f(x) \quad \mu\text{-m.k. } x \in \mathbb{R}^n.$$

Todistus. Voi olettaa, että $f \ge 0$. Määritellään

$$\nu(A) = \int_A f\,d\mu, \quad A \in \mathrm{Bor}(\mathbb{R}^n),$$

jolloin ν on Radon-mitta ja $\nu \ll \mu$. Lauseen 5.25 nojalla

$$\int_A f(x)\,d\mu(x) = \nu(A) = \int_A D_\mu\nu(x)\,d\mu(x)$$

kaikilla $A \in \mathrm{Bor}(\mathbb{R}^n)$, joten

$$f(x) = D_\mu\nu(x) = \lim_{r\to 0+} \frac{1}{\mu(\bar{B}(x,r))} \int_{\bar{B}(x,r)} f\,d\mu$$

μ-m.k. $x \in \mathbb{R}^n$. □

Määritelmä 5.28. Mitallisen avaruuden $(X, \mathcal{M})$ mitat μ ja ν ovat keskenään *singulaariset*, jos on olemassa $A \in \mathcal{M}$ s.e.

$$\mu(A) = 0 = \nu(X \setminus A).$$

Tällöin merkitään $\mu \perp \nu$.

Selvästi pätee: $\mu \perp \nu \iff \nu \perp \mu$.

Esimerkki 5.29. Mitat δ_0 ja m_n ovat keskenään singulaariset (esimerkiksi $(\mathbb{R}^n, \operatorname{Bor}\mathbb{R}^n)$:ssä).

Lause 5.30. *Olkoot μ ja ν Radon-mittoja $\mathbb{R}^n$:ssä s.e. $\mu \perp \nu$. Silloin*

(a) $D_\nu\mu(x) = +\infty$ μ-m.k. $x \in \mathbb{R}^n$ ja

(b) $D_\nu\mu(x) = 0$ ν-m.k. $x \in \mathbb{R}^n$.

Todistus. Koska $\mu \perp \nu$, niin on olemassa mitallinen joukko A s.e. $\nu(A) = 0 = \mu(A^c)$.

(a) Tehdään vastaoletus, että $\mu(\{x \in \mathbb{R}^n \colon \underline{D}_\nu\mu(x) < \infty\}) > 0$. Silloin $\mu(A_k) > 0$ jollakin $k \in \mathbb{N}$, missä
$$A_k = \{x \in \mathbb{R}^n \colon \underline{D}_\nu\mu(x) \le k\}.$$
Lemman 5.23 (a)-kohdasta saadaan ristiriita
$$0 < \mu(A_k) = \mu(A_k \cap A) \le k\,\nu(A_k \cap A) \le k\,\nu(A) = 0.$$

(b) Tehdään vastaoletus, että $\nu(\{x \in \mathbb{R}^n \colon \overline{D}_\nu\mu(x) > 0\}) > 0$. Silloin $\nu(B_k) > 0$ jollakin $k \in \mathbb{N}$, missä $B_k = \{x \in \mathbb{R}^n \colon \overline{D}_\nu\mu(x) \ge 1/k\}$. Lemman 5.23 (b)-kohdasta saadaan nyt ristiriita
$$0 < \nu(B_k) = \nu(B_k \cap A^c) \le k\,\mu(B_k \cap A^c) \le k\,\mu(A^c) = 0.$$

$\square$

Lause 5.31 (Radon-Nikodym ja Lebesguen jako)**.** *Olkoot μ ja ν Radon-mittoja $\mathbb{R}^n$:ssä. Silloin $\mu = \mu_a + \mu_s$, missä μ_a ja μ_s ovat Radon-mittoja $\mathbb{R}^n$:ssä s.e.*
$$\mu_a \ll \nu \quad \text{ja} \quad \mu_s \perp \nu.$$
Lisäksi
$$D_\nu\mu = D_\nu\mu_a \quad \text{ja} \quad D_\nu\mu_s = 0$$
ν-m.k. $x \in \mathbb{R}^n$. Erityisesti
$$\mu(B) = \int_B D_\nu\mu(x)\,d\nu(x) + \mu_s(B)$$
kaikilla $B \in \operatorname{Bor}\mathbb{R}^n$ ja
$$\mu \ll \nu \iff \mu_s \equiv 0.$$

Todistus. Olkoot
$$\begin{aligned} A &= \{x \in \mathbb{R}^n \colon \underline{D}_\nu\mu(x) < \infty\}, \\ \mu_a &= \mu \llcorner A \quad \text{ja} \\ \mu_s &= \mu \llcorner (\mathbb{R}^n \setminus A). \end{aligned}$$

Tällöin μ_a ja μ_s ovat Radon-mittoja $\mathbb{R}^n$:ssä, $\mu = \mu_a + \mu_s$ ja Lauseen 5.24 nojalla $\nu(\mathbb{R}^n \setminus A) = 0$, joten $\mu_s \perp \nu$. Merkitään $A_k = \{x \in \mathbb{R}^n \colon \underline{D}_\nu\mu(x) \le k\}$, kun $k \in \mathbb{N}$. Lemman 5.23 (a)-kohdasta seuraa, että $\mu_a \ll \nu$. Jos nimittäin $\nu(E) = 0$, niin
$$\mu_a(E) = \mu(E \cap A) \le \sum_{k=1}^{\infty} \mu(E \cap A_k) \le \sum_{k=1}^{\infty} k\,\nu(E) = 0.$$

Koska $\mu_s \perp \nu$, seuraa Lauseen 5.30 (b)-kohdasta, että $D_\nu \mu_s(x) = 0$ ν-m.k. x, joten

$$D_\nu \mu(x) = D_\nu \mu_a(x) \quad \nu\text{-m.k. } x.$$

Kun $B \in \operatorname{Bor} \mathbb{R}^n$, niin Lauseen 5.25 nojalla

$$\begin{aligned}\mu(B) &= \mu_a(B) + \mu_s(B)\\ &= \int_B D_\nu \mu_a(x)\, d\nu(x) + \mu_s(B)\\ &= \int_B D_\nu \mu(x)\, d\nu(x) + \mu_s(B).\end{aligned}$$

Viimeinen väite on tämän jälkeen ilmeinen. □

5.32 Merkkimitat

Jos $a_i \in \dot{\mathbb{R}}$, $i \in \mathbb{N}$, niin olkoot $a_{i_1}, a_{i_2}, \dots$ jonon (a_i) positiiviset termit ja $a_{j_1}, a_{j_2}, \dots$ vastaavasti negatiiviset termit. Tällöin sanomme, että summa

$$\sum_{i=1}^{\infty} a_i$$

on määritelty, jos ainakin toinen summista

$$\sum_k a_{i_k}, \quad \sum_k a_{j_k}$$

on äärellinen, jolloin voimme asettaa

$$\sum_{i=1}^{\infty} a_i = \sum_k a_{i_k} + \sum_k a_{j_k}.$$

Määritelmä 5.33. Olkoon $(X, \mathcal{M})$ mitallinen avaruus. Funktio $\mu \colon \mathcal{M} \to \dot{\mathbb{R}}$ on *merkkimitta* (engl. signed measure), jos se toteuttaa ehdot:

(i) $\mu(\emptyset) = 0$.

(ii) Jos $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{M}$ ovat erillisiä, niin $\sum_i \mu(A_i) \in \dot{\mathbb{R}}$ on määritelty ja

$$\mu\Big(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\Big) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i).$$

Määritelmä 5.34. Joukko $P \in \mathcal{M}$ on *positiivinen* μ:n suhteen, jos $\mu(A) \ge 0$ kaikilla $A \in \mathcal{M},\ A \subset P$. Vastaavasti joukko $N \in \mathcal{M}$ on *negatiivinen* μ:n suhteen, jos $\mu(E) \le 0$ kaikilla $E \in \mathcal{M},\ E \subset N$.

Todistamme seuraavaksi ns. Hahnin hajotelman merkkimitalle μ. Sen mukaan on olemassa positiivinen joukko D niin, että D:n komplementti on negatiivinen. Todistusta varten tarvitsemme lemmoja.

Lemma 5.35. *Olkoon $\mu \colon \mathcal{M} \to \dot{\mathbb{R}}$ merkkimitta.*

(a) Jos $A, B \in \mathcal{M},\ A \subset B$ ja $|\mu(B)| < \infty$, niin $|\mu(A)| < \infty$.

(b) Jos $E_i \in \mathcal{M},\ E_1 \subset E_2 \subset \cdots$, *niin*

$$\mu\big(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\big) = \lim_{i\to\infty} \mu(E_i).$$

(c) Jos $E_i \in \mathcal{M},\ E_1 \supset E_2 \supset \cdots$ *ja* $|\mu(E_1)| < \infty$, *niin*

$$\mu\big(\bigcap_{i=1}^{\infty} E_i\big) = \lim_{i\to\infty} \mu(E_i).$$

Todistus. Todistus jätetään harjoitustehtäväksi (vrt. vastaava todistus mitoille). □

Lemma 5.36. *Olkoon* $\mu\colon \mathcal{M} \to \dot{\mathbb{R}}$ *merkkimitta. Jos joukot* P_i, $i \in \mathbb{N}$, *ovat positiivisia* μ*:n suhteen, niin* $\cup_i P_i$ *on positiivinen.*

Todistus. Olkoon $E \subset \cup_i P_i$, $E \in \mathcal{M}$. Haluamme näyttää, että $\mu(E) \geq 0$. Merkitään $E_1 = E \cap P_1$ ja

$$E_i = E \cap P_i \setminus \bigcup_{j=1}^{i-1} P_j,$$

kun $i \geq 2$. Joukot E_i ovat erillisiä ja $E = \cup_i E_i$. Lisäksi $\mu(E_i) \geq 0$ kaikilla i, koska P_i on positiivinen joukko μ:n suhteen ja $E_i \subset P_i$. Siten $\mu(E) = \sum_i \mu(E_i) \geq 0$. □

Lemma 5.37. *Olkoon* $\mu\colon \mathcal{M} \to \dot{\mathbb{R}}$ *merkkimitta. Oletetaan, että* $A \in \mathcal{M}$ *ja* $0 < \mu(A) < \infty$*. Silloin on olemassa* $\mathcal{M}$*-mitallinen joukko* $P \subset A$*, joka on* μ*:n suhteen positiivinen ja* $\mu(P) > 0$*.*

Todistus. Jos A on positiivinen μ:n suhteen, niin asia on selvä. Muussa tapauksessa on olemassa A:n osajoukko, jonka merkkimitta on negatiivinen, ja siten

$$L_1 = \inf\{\mu(E)\colon E \subset A, E \in \mathcal{M}\} < 0.$$

Olkoon $n_1 \in \mathbb{N}$ pienin luonnollinen luku, jolla $L_1 < -1/n_1$. On siis olemassa $\mathcal{M}$-mitallinen joukko $A_1 \subset A$ s.e. $\mu(A_1) < -1/n_1$. Oletuksesta $0 < \mu(A) < \infty$ ja Lemman 5.35 (a)-kohdasta seuraa, että $\mu(B) \in \mathbb{R}$ kaikilla $B \subset A$, $B \in \mathcal{M}$.

Seuraavaksi havaitaan, että

$$\mu(A) = \mu(A \setminus A_1) + \underbrace{\mu(A_1)}_{\in\mathbb{R}},$$

joten

$$\infty > \mu(A \setminus A_1) = \mu(A) - \mu(A_1) > \mu(A) + \frac{1}{n_1} > 0.$$

Jos $A \setminus A_1$ on positiivinen μ:n suhteen, niin väite on todistettu. Muussa tapauksessa on olemassa $A \setminus A_1$:n osajoukko, jonka merkkimitta on negatiivinen. Tällöin

$$L_2 = \inf\{\mu(E)\colon E \subset A \setminus A_1, E \in \mathcal{M}\} < 0.$$

Olkoon $n_2 \in \mathbb{N}$ pienin luonnollinen luku, jolla $L_2 < -1/n_2$. Jälleen on olemassa $\mathcal{M}$-mitallinen joukko $A_2 \in A \setminus A_1$ s.e. $\mu(A_2) < -1/n_2$. Lisäksi

$$\infty > \mu\big(A \setminus (A_1 \cup A_2)\big) > \mu(A) + \frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} > 0.$$

Jos tämä prosessi päättyy äärellisen monen askeleen jälkeen, väite on todistettu. Muussa tapauksessa saamme jonot erillisiä A:n osajoukkoja $A_i \in \mathcal{M}, i \in \mathbb{N}$, ja luonnollisia lukuja n_i s.e. jokaisella $i \in \mathbb{N}$

$$A_i \subset A \setminus \bigcup_{j=1}^{i-1} A_j \quad \text{ja} \quad \mu(A_i) < -1/n_i,$$

missä $n_i \in \mathbb{N}$ on pienin luonnollinen luku, jota kohti on olemassa $\mathcal{M}$-mitallinen $A \setminus \cup_{j=1}^{i-1} A_j$:n osajoukko, jonka merkkimitta on pienempi kuin $-1/n_i$. Olkoon

$$P = A \setminus \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i,$$

jolloin

$$\infty > \mu(P) = \mu(A) - \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i) > \mu(A) + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{n_i} > 0.$$

Erityisesti $\sum_i 1/n_i < \infty$, joten $n_i \to \infty$. Osoitetaan, että P on positiivinen μ:n suhteen. Tehdään vastaoletus, että on olemassa $B \subset P, B \in \mathcal{M}$, jolla $\mu(B) < 0$. Koska $n_i \to \infty$, on olemassa $i_0 \in \mathbb{N}$ s.e.

$$\frac{1}{n_{i_0} - 1} < -\mu(B)$$

eli

$$\mu(B) < -(n_{i_0} - 1)^{-1}.$$

Koska $B \subset P$, niin erityisesti

$$B \subset A \setminus \bigcup_{i=1}^{i_0 - 1} A_i,$$

joka johtaa ristiriitaan n_{i_0}:n määritelmän kanssa. Näin ollen P on positiivinen μ:n suhteen. □

Lause 5.38 (Hahnin hajotelma)**.** *Olkoon $\mu\colon \mathcal{M} \to \dot{\mathbb{R}}$ merkkimitta. Silloin on olemassa μ:n suhteen positiivinen joukko $P \in \mathcal{M}$, jonka komplementti $X \setminus P$ on negatiivinen μ:n suhteen.*

Todistus. Voidaan olettaa, että $\mu(E) < \infty$ kaikilla $E \in \mathcal{M}$. (Jos tämä ei päde alunperin μ:lle, niin tutkitaan merkkimittaa $-\mu$.)

Merkitään

$$p = \sup\{\mu(A)\colon A \in \mathcal{M} \text{ positiivinen } \mu\text{:n suhteen}\}.$$

Koska $\emptyset$ on positiivinen (ja negatiivinen), niin p on määritelty. Valitaan jono positiivisia joukkoja $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{M}$ s.e. $\mu(A_i) \to p$.

Osoitetaan, että

$$P = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$$

on etsitty positiivinen joukko. Lemman 5.36 mukaan P on positiivinen, joten $\mu(P \setminus A_i) \geq 0$ ja

$$p \geq \mu(P) = \mu(A_i) + \mu(P \setminus A_i) \geq \mu(A_i) \to p.$$

Siten $\mu(P) = p$.

Osoitetaan, että $X \setminus P$ on negatiivinen μ:n suhteen. Tehdään vastaoletus, että on olemassa $E \in \mathcal{M}$, $E \subset X \setminus P$ s.e. $\mu(E) > 0$. Lemman 5.37 mukaan on olemassa positiivinen joukko $S \subset E, S \in \mathcal{M}$ s.e. $\mu(S) > 0$. Nyt $P \cup S$ on positiivinen ja

$$\mu(P \cup S) = \mu(P) + \mu(S) > p$$

vastoin p:n määritelmää. □

Paria (P, P^c), missä P on positiivinen ja P^c negatiivinen μ:n suhteen, sanotaan μ:n *Hahnin hajotelmaksi*.

Lause 5.39 (Jordanin hajotelma)**.** *Jokainen merkkimitta $\mu\colon \mathcal{M} \to \dot{\mathbb{R}}$ voidaan esittää yksikäsitteisesti kahden keskenään singulaarisen mitan erotuksena $\mu = \mu^+ - \mu^-$, joista (ainakin) toinen on äärellinen.*

Todistus. Samoin kuin edellä voidaan olettaa, että $\mu(E) < \infty$ kaikilla $E \in \mathcal{M}$. Hahnin hajotelman mukaan $X = P \cup (X \setminus P)$, missä P on positiivinen ja P^c on negatiivinen μ:n suhteen. Määritellään mitat $\mu^+, \mu^- \colon \mathcal{M} \to [0, +\infty]$ asettamalla

$$\mu^+(E) = \mu(E \cap P) \tag{5.40}$$
$$\mu^-(E) = -\mu(E \cap P^c). \tag{5.41}$$

Tällöin μ^+ ja μ^- ovat selvästi mittoja ja jokaisella $E \in \mathcal{M}$

$$\mu(E) = \mu(E \cap P) + \mu(E \cap P^c) = \mu^+(E) - \mu^-(E).$$

Lisäksi $\mu^+(E) \le \mu(P) < \infty$ kaikilla $E \in \mathcal{M}$. Väite $\mu^+ \perp \mu^-$ pätee, sillä

$$\mu^-(P) = 0 = \mu^+(P^c). \quad \square$$

Yksikäsitteisyyden todistaminen jätetään harjoitustehtäväksi. □

Korollari 5.42. *Jokainen merkkimitta $\mu\colon \mathcal{M} \to \dot{\mathbb{R}}$ on joko alhaalta tai ylhäältä rajoitettu.*

Todistus. Olkoon $\mu = \mu^+ - \mu^-$, jolloin kaikilla $E \in \mathcal{M}$

$$-\mu^-(X) \le -\mu^-(E) \le \underbrace{\mu^+(E) - \mu^-(E)}_{=\mu(E)} \le \mu^+(E) \le \mu^+(X). \quad \square$$

Merkkimitan $\mu\colon \mathcal{M} \to \dot{\mathbb{R}}$ *kokonaisheilahtelu* joukossa $A \subset X$ on

$$V(\mu, A) = \sup_{\mathcal{D}} \sum_{i=1}^{k} |\mu(A_i)|,$$

missä supremum otetaan yli kaikkien äärellisten kokoelmien $\mathcal{D} = \{A_1, \ldots, A_k\}$, jossa joukot $A_i \in \mathcal{M}, A_i \subset A$ ovat erillisiä. (Jos ei ole olemassa tällaisia kokoelmia $\mathcal{D}$, niin asetetaan $V(\mu, A) = 0$.)

Lause 5.43. *Olkoon $\mu\colon \mathcal{M} \to \dot{\mathbb{R}}$ merkkimitta sekä μ^+ ja μ^- kuten μ:n Jordanin hajotelmassa. Tällöin jokaisella $A \in \mathcal{M}$*

(a) $\mu^+(A) = \sup\{\mu(E)\colon E \subset A, E \in \mathcal{M}\}$ *(= μ:n* yläheilahtelu*),*

(b) $\mu^-(A) = -\inf\{\mu(E)\colon E \subset A, E \in \mathcal{M}\}$ *(= μ:n* alaheilahtelu*),*

(c) $V(\mu, A) = \mu^+(A) + \mu^-(A)$*. Erityisesti $V(\mu, \cdot)$ on mitta $\mathcal{M}$:ssä.*

Todistus. Olkoon $X = P \cup P^c$, missä $P \in \mathcal{M}$ on positiivinen ja P^c negatiivinen μ:n suhteen.

(a) Olkoon $A \in \mathcal{M}$, jolloin $\mu^+(A) = \mu(A \cap P)$. Merkitään $\alpha = \sup\{\mu(E) \colon E \subset A, E \in \mathcal{M}\}$. Koska $A \cap P \subset A$ ja $A \cap P \in \mathcal{M}$, saadaan arvio $\mu^+(A) = \mu(A \cap P) \leq \alpha$. Toista suuntaa varten olkoon $E \subset A, E \in \mathcal{M}$. Tällöin

$$\mu(A \cap P) = \mu(E \cap P) + \underbrace{\mu\big((A \setminus E) \cap P\big)}_{\geq 0} \geq \mu(E \cap P).$$

Toisaalta

$$\mu(E) = \mu(E \cap P) + \underbrace{\mu(E \cap P^c)}_{\leq 0} \leq \mu(E \cap P).$$

Siten $\mu(A \cap P) \geq \mu(E)$, joten $\mu^+(A) = \mu(A \cap P) \geq \alpha$.

(b) Todistetaan kuten (a)-kohta.

(c) Olkoot $E_1, E_2, \ldots, E_k$ erillisiä, $E_i \in \mathcal{M}$ ja $E_i \subset A$. Koska

$$\mu(E_i) = \mu(E_i \cap P) + \mu(E_i \cap P^c) = \mu^+(E_i) - \mu^-(E_i),$$

saadaan arvio

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{k} |\mu(E_i)| &\leq \sum_{i=1}^{k} \big(\mu^+(E_i) + \mu^-(E_i)\big) \\ &= \mu^+\big(\bigcup_{i=1}^{k} E_i\big) + \mu^-\big(\bigcup_{i=1}^{k} E_i\big) \\ &\leq \mu^+(A) + \mu^-(A),\end{aligned}$$

ja siten

$$V(\mu, A) \leq \mu^+(A) + \mu^-(A).$$

Valitaan erillisiksi joukoiksi $E_1 = A \cap P$ ja $E_2 = A \cap P^c$, jolloin

$$\begin{aligned}\mu^+(A) + \mu^-(A) &= \underbrace{\mu(E_1)}_{\geq 0} - \underbrace{\mu(E_2)}_{\leq 0} \\ &= |\mu(E_1)| + |\mu(E_2)| \leq V(\mu, A).\end{aligned}$$

□

5.44 Radon-Nikodymin lause

Olkoon $(X, \mathcal{M}, \nu)$ mitta-avaruus ja $\mu \colon \mathcal{M} \to \dot{\mathbb{R}}$ merkkimitta. Samoin kuin mittojen tapauksessa sanomme, että μ on *absoluuttisesti jatkuva* ν:n suhteen, jos $\mu(A) = 0$ aina, kun $\nu(A) = 0$. Tällöin merkitään $\mu \ll \nu$. Sanomme myös, että μ on σ-äärellinen, jos

$$X = \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j, \quad \text{missä } \; A_j \in \mathcal{M} \; \text{ ja } \; |\mu(A_j)| < \infty \; \forall j.$$

Esimerkki 5.45. Olkoon $f\colon X \to \dot{\mathbb{R}}$ $\mathcal{M}$-mitallinen s.e. ainakin toinen integraaleista

$$\int_X f^+\,d\nu \quad \text{tai} \quad \int_X f^-\,d\nu$$

on äärellinen, jolloin

$$\int_X f\,d\nu = \int_X f^+\,d\nu - \int_X f^-\,d\nu$$

on määritelty. Silloin $\mu\colon \mathcal{M} \to \dot{\mathbb{R}}$,

$$\mu(E) = \int_E f\,d\nu,$$

on merkkimitta, joka on absoluuttisesti jatkuva ν:n suhteen.

Lause 5.46 (Radon-Nikodym)**.** *Olkoon $(X, \mathcal{M}, \nu)$ σ-äärellinen mitta-avaruus ja $\mu\colon \mathcal{M} \to \dot{\mathbb{R}}$ σ-äärellinen merkki-mitta s.e. $\mu \ll \nu$. Tällöin on olemassa $\mathcal{M}$-mitallinen $f\colon X \to \mathbb{R}$ s.e.*

$$\mu(E) = \int_E f\,d\nu \tag{5.47}$$

kaikilla $E \in \mathcal{M}$. Jos g on toinen tällainen funktio, niin $f = g$ ν-melkein kaikkialla.

Funktiota f (5.47):ssä sanotaan μ:n *Radon-Nikodym derivaataksi* ν:n suhteen ja merkitään $f = d\mu/d\nu$.

Ennen lauseen todistusta tutkitaan, miltä funktion f tulisi "näyttää". Oletetaan, että ν on äärellinen mitta ja $\alpha \in \mathbb{R}$. Silloin $\mu - \alpha\nu$ on merkkimitta. Jos f on yhtälön (5.47) toteuttava funktio, niin

$$(\mu - \alpha\nu)(E) = \int_E f\,d\nu - \alpha\nu(E) = \int_E (f - \alpha)\,d\nu.$$

Pari (P_α, P_α^c), missä $P_\alpha = \{x \in X\colon f(x) \geq \alpha\}$, on Hahnin hajotelma $\mu - \alpha\nu$:n suhteen. Kiinnitetään x ja annetaan α:n vaihdella. Silloin $x \in P_\alpha$, jos ja vain jos $\alpha \leq f(x)$, ja siten

$$f(x) = \sup\{\alpha\colon \alpha \leq f(x)\} = \sup\{\alpha\colon x \in P_\alpha\}.$$

Funktio f voidaan siis löytää seuraavasti: Jokaisella $\alpha \in \mathbb{R}$ olkoon (P_α, P_α^c) Hahnin hajotelma merkkimitan $\mu - \alpha\nu$ suhteen. Määritellään $f(x) = \sup\{\alpha\colon x \in P_\alpha\}$. Tämä ajatus ei kuitenkaan käy kovin selkeästi ilmi allaolevasta todistuksesta.

Lauseen täsmällistä todistusta varten tarvitsemme seuraavan lemman.

Lemma 5.48. *Olkoot $\mu, \nu\colon \mathcal{M} \to [0, +\infty)$ äärellisiä mittoja s.e. $\mu(X) > 0$ ja $\mu \ll \nu$. Tällöin on olemassa $\varepsilon > 0$ ja $A \in \mathcal{M}$ s.e.*

(1) $\nu(A) > 0$,

(2) A on positiivinen $\mu - \varepsilon\nu$:n suhteen.

Todistus. Soveltamalla Hahnin hajotelmaa merkkimittaan $\mu - \frac{1}{n}\nu$, $n \in \mathbb{N}$, saadaan $X = A_n \cup B_n$, missä A_n on positiivinen ja $B_n = X \setminus A_n$ negatiivinen $\mu - \frac{1}{n}\nu$:n suhteen. Merkitään

$$A_0 = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n, \quad B_0 = \bigcap_{n=1}^{\infty} B_n = A_0^c.$$

Koska $B_0 \subset B_n$, niin $(\mu - \frac{1}{n}\nu)(B_0) \leq 0$. Näin ollen

$$\mu(B_0) \leq \frac{1}{n}\nu(B_0) \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

josta saadaan $\mu(B_0) = 0$. Siten $\mu(A_0) = \mu(X) > 0$. Koska $\mu \ll \nu$, on oltava myös $\nu(A_0) > 0$. Tästä seuraa, että $\nu(A_n) > 0$ jollakin $n_0 \in \mathbb{N}$. Nyt $A = A_{n_0}$ ja $\varepsilon = 1/n_0$ toteuttavat vaatimukset. □

Lauseen 5.46 todistus.

(i) Oletetaan ensin, että μ ja ν ovat äärellisiä mittoja. Merkitään

$$K = \{f | f \colon X \to [0, +\infty] \text{ } \mathcal{M}\text{-mitallinen } \int_E f \, d\nu \leq \mu(E) \ \forall E \in \mathcal{M}\},$$
$$\alpha = \sup_{f \in K} \int_X f \, d\nu.$$

Valitaan jono $f_n \in K, n \in \mathbb{N}$, s.e.

$$\int_X f_n \, d\nu \to \alpha.$$

Merkitään

$$f_0 = \sup_{n \in \mathbb{N}} f_n \quad \text{ja} \quad g_n = \sup_{1 \leq i \leq n} f_i,$$

jolloin $g_n \nearrow f_0$.

Olkoon $E \in \mathcal{M}$. Määritellään joukot $E_1, E_2, \dots, E_n$ seuraavasti:

$$\begin{aligned}
E_1 &= \{x \in E \colon g_n(x) = f_1(x)\}, \\
E_2 &= \{x \in E \setminus E_1 \colon g_n(x) = f_2(x)\}, \\
&\vdots \\
E_k &= \{x \in E \setminus \bigcup_{i=1}^{k-1} E_i \colon g_n(x) = f_k(x)\}.
\end{aligned}$$

Tällöin E_i:t ovat pistevieraita ja

$$E = \bigcup_{i=1}^{n} E_i.$$

Nyt

$$\int_E g_n \, d\nu = \sum_{i=1}^{n} \int_{E_i} g_n \, d\nu = \sum_{i=1}^{n} \int_{E_i} f_i \, d\nu \overset{f_i \in K}{\leq} \sum_{i=1}^{n} \mu(E_i) = \mu(E).$$

Monotonisen konvergenssin lauseen nojalla

$$\int_E f_0 \, d\nu = \lim_{n \to \infty} \int_E g_n \, d\nu.$$

Siis

$$\int_E f_0 \, d\nu \leq \mu(E),$$

joten $f_0 \in K$ ja näin ollen

$$\int_X f_0 \, d\nu \leq \alpha.$$

Toisaalta $f_n \leq f_0$, joten

$$\int_X f_0 \, d\nu \geq \int_X f_n \, d\nu \to \alpha.$$

Siis

$$\int_X f_0 \, d\nu = \alpha.$$

Koska

$$\int_X f_0 \, d\nu \leq \mu(X) < \infty,$$

on $f_0(x) < \infty$ ν-m.k., joten on olemassa $\mathcal{M}$-mitallinen $f\colon X \to [0,\infty)$ s.e. $f = f_0$ ν-m.k. Tällöin myös $f \in K$.

Määritellään äärellinen mitta $\lambda\colon \mathcal{M} \to [0,\infty)$,

$$\lambda(E) = \mu(E) - \int_E f \, d\nu, \quad E \in \mathcal{M}.$$

Nyt $\lambda \ll \nu$, sillä $\mu \ll \nu$. Osoitetaan, että $\lambda = 0$. Tehdään vastaoletus $\lambda(X) > 0$. Lemman 5.48 mukaan on olemassa $\varepsilon > 0$ ja $A \in \mathcal{M}$ s.e. A on positiivinen $\lambda - \varepsilon\nu$:n suhteen ja $\nu(A) > 0$. Merkitään $g = f + \varepsilon\chi_A$ ja osoitetaan, että $g \in K$. Sitä varten olkoon $E \in \mathcal{M}$. Tällöin

$$\begin{aligned}
\int_E g \, d\nu &= \int_E f \, d\nu + \varepsilon\nu(A \cap E) \\
&\leq \int_E f \, d\nu + \lambda(A \cap E) \\
&= \int_E f \, d\nu + \mu(A \cap E) - \int_{A\cap E} f \, d\nu \\
&= \int_{E\setminus A} f \, d\nu + \mu(A \cap E) \\
&\overset{f\in K}{\leq} \mu(E \setminus A) + \mu(A \cap E) \\
&= \mu(E).
\end{aligned}$$

Siten $g \in K$ ja näin ollen

$$\int_X g \, d\nu \leq \alpha. \tag{5.49}$$

Toisaalta

$$\int_X g \, d\nu = \int_X f \, d\nu + \varepsilon\nu(A) = \alpha + \varepsilon\nu(A) > \alpha,$$

mikä on ristiriidassa (5.49):n kanssa. Siten $\lambda = 0$ ja väite pätee.

(ii) Oletetaan sitten, että $|\mu(X)| < \infty$ ja $\nu(X) < \infty$. Jordanin hajotelmasta saadaan $\mu = \mu^+ - \mu^-$, missä μ^+, μ^- ovat mittoja $\mathcal{M}$:ssä. Lauseen 5.43 nojalla

$$\mu^+(A) = \sup\{\mu(E)\colon E \subset A, E \in \mathcal{M}\}.$$

Tästä seuraa, että $\mu^+ \ll \nu$, sillä $\mu \ll \nu$. Samoin osoitetaan, että $\mu^- \ll \nu$. Soveltamalla (i)-kohtaa saadaan funktiot f^+ ja f^- s.e.

$$\mu^+(E) = \int_E f^+ \, d\nu \quad \text{ja} \quad \mu^-(E) = \int_E f^- \, d\nu \quad \forall E \in \mathcal{M}.$$

Tällöin $f = f^+ - f^-$ on etsitty funktio.

(iii) Oletetaan lopulta, että μ ja ν ovat σ-äärellisiä. Tällöin

$$X = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i,\ \nu(A_i) < \infty,\ A_i \in \mathcal{M} \text{ erillisiä},$$

$$X = \bigcup_{j=1}^{\infty} B_j,\ |\mu(B_j)| < \infty,\ B_j \in \mathcal{M} \text{ erillisiä}.$$

Näin ollen

$$X = \bigcup_{k=1}^{\infty} X_k,$$

missä $X_k = A_i \cap B_j$ joillakin i, j. Nyt X_k:t ovat erillisiä, $\nu(X_k) < \infty$ ja $|\mu(X_k)| < \infty$. Jokaisella $k \in \mathbb{N}$, on (ii)-kohdan mukaan olemassa $\mathcal{M}$-mitallinen funktio $f_k\colon X_k \to \mathbb{R}$ s.e.

$$\int_E f_k \, d\nu = \mu(E),$$

aina kun $E \in \mathcal{M},\ E \subset X_k$. Määritellään $\mathcal{M}$-mitallinen $f\colon X \to \mathbb{R}$ asettamalla

$$f|X_k = f_k.$$

(Huom.: X_k:t erillisiä.) Osoitetaan lopuksi, että (5.47) pätee. Olkoon $E \in \mathcal{M}$. Merkitään $A = \{x \in X\colon f(x) \geq 0\}$. Silloin

$$\begin{aligned}
\mu(E \cap A) &= \sum_{k=1}^{\infty} \mu(E \cap A \cap X_k) \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} \int_{E \cap A \cap X_k} f_k \, d\nu \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} \int_{E \cap X_k} f^+ \, d\nu \\
&= \int_E f^+ \, d\nu.
\end{aligned}$$

Samoin

$$\mu(E \cap A^c) = -\int_E f^- \, d\nu.$$

Ainakin toinen integraaleista on äärellinen, joten $\int_E f \, d\nu$ on olemassa ja

$$\mu(E) = \mu(E \cap A) + \mu(E \cap A^c) = \int_E f^+ \, d\nu - \int_E f^- \, d\nu = \int_E f \, d\nu.$$

(iv) Yksikäsitteisyys saadaan seuraavasta lauseesta.

$\square$

Lause 5.50. *Olkoon $(X, \mathcal{M}, \nu)$ σ-äärellinen mitta-avaruus ja $f\colon X \to \dot{\mathbb{R}}$ sellainen $\mathcal{M}$-mitallinen funktio, että*

$$\int_X f \, d\nu$$

on olemassa. Jos $g\colon X \to \dot{\mathbb{R}}$ on $\mathcal{M}$-mitallinen ja

$$\int_E f \, d\nu = \int_E g \, d\nu \tag{5.51}$$

kaikilla $E \in \mathcal{M}$, niin $f = g$ ν-melkein kaikkialla.

Todistus. Voidaan olettaa, että
$$\int_X f\,d\nu > -\infty,$$
jolloin
$$\int_E f\,d\nu > -\infty \quad \forall E \in \mathcal{M}.$$

(a) Oletetaan ensin, että $\nu(X) < \infty$. Merkitään
$$E = \{x \in X \colon f(x) < g(x)\}.$$
Riittää osoittaa, että $\nu(E) = 0$. Tätä varten merkitään
$$\begin{aligned} E_n &= \{x \in E \colon g(x) < n\}, \\ E_\infty &= \{x \in E \colon g(x) = \infty\}, \\ A_n &= \{x \in E \colon f(x) < n\}. \end{aligned}$$
Silloin
$$E = \Big(\bigcup_{n=1}^\infty E_n\Big) \cup E_\infty = \bigcup_{n=1}^\infty A_n.$$
Koska
$$-\infty < \int_{E_n} f\,d\nu \overset{(5.51)}{=} \int_{E_n} g\,d\nu \le n\,\nu(E_n) < \infty,$$
on $g - f$ integroituva E_n:ssä ja
$$\int_{E_n} \underbrace{(g-f)}_{>0}\,d\nu = 0,$$
joten $\nu(E_n) = 0$. Samoin
$$\infty > \int_{A_n \cap E_\infty} f\,d\nu = \int_{A_n \cap E_\infty} g\,d\nu,$$
joten $\nu(A_n \cap E_\infty) = 0$ kaikilla $n \in \mathbb{N}$ ja siten $\nu(E_\infty) = 0$. Näin ollen $\nu(E) = 0$.

(b) Oletuksen mukaan ν on σ-äärellinen, joten
$$X = \bigcup_{k=1}^\infty X_k, \quad \nu(X_k) < \infty \ \forall k \in \mathbb{N}.$$
Tällöin (a)-kohdan nojalla $f = g$ ν-melkein kaikkialla X_k:ssa, josta välittömästi saadaan, että $f(x) = g(x)$ ν-m.k. $x \in X$:ssä.

$\square$

Sanomme, että merkkimitta μ on *singulaarinen* mitan ν suhteen, merkitään $\mu \perp \nu$, jos on olemassa $A \in \mathcal{M}$ s.e. $\nu(A) = 0$ ja $\mu(E) = 0$ kaikilla $E \in \mathcal{M},\ E \subset X \setminus A$.

Lause 5.52. *Olkoon $(X, \mathcal{M}, \nu)$ σ-äärellinen mitta-avaruus ja $\mu \colon \mathcal{M} \to \dot{\mathbb{R}}$ σ-äärellinen merkkimitta. Tällöin on olemassa yksikäsitteisesti määrätyt merkkimitat $\mu_a, \mu_s \colon \mathcal{M} \to \dot{\mathbb{R}}$ s.e. $\mu = \mu_a + \mu_s$, $\mu_a \ll \nu$ ja $\mu_s \perp \nu$. Lisäksi μ_a ja μ_s ovat σ-äärellisiä.*

Todistus.

(i) Oletetaan ensin, että $\nu(X) < \infty$, $\mu \geq 0$ ja $\mu(X) < \infty$. Tällöin $\mu \ll \mu + \nu$, missä $\mu + \nu$ on myös mitta. Radon-Nikodymin lauseen mukaan on olemassa $\mathcal{M}$-mitallinen $f\colon X \to \mathbb{R}$ s.e.

$$\mu(E) = \int_E f\,d(\mu+\nu) = \int_E f\,d\mu + \int_E f\,d\nu \quad \forall E \in \mathcal{M}.$$

Koska $0 \leq \mu(E) \leq \mu(E) + \nu(E)$, niin

$$\begin{aligned} 0 = \int_E 0\,d(\mu+\nu) \leq \mu(E) = \int_E f\,d(\mu+\nu) &\leq \mu(E) + \nu(E) \\ &= \int_E 1\,d\mu + \int_E 1\,d\nu = \int_E 1\,d(\mu+\nu) \quad \forall E \in \mathcal{M}. \end{aligned}$$

Osoitetaan, että $0 \leq f \leq 1$ $(\mu+\nu)$-m.k. Tätä varten merkitään

$$\begin{aligned} F_n &= \{x \in X\colon f(x) < -\frac{1}{n}\}, \\ F &= \{x \in X\colon f(x) < 0\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n. \end{aligned}$$

Joukot F_n ja F ovat $\mathcal{M}$-mitallisia. Koska

$$0 = \int_{F_n} 0\,d(\mu+\nu) \leq \int_{F_n} f\,d(\mu+\nu) \leq -\int_{F_n} \frac{1}{n}\,d(\mu+\nu) = -\frac{1}{n}(\mu+\nu)(F_n),$$

niin $(\mu+\nu)(F_n) = 0$ ja siten $(\mu+\nu)(F) = 0$. Näin ollen $f \geq 0$ $(\mu+\nu)$-m.k. Samoin todistetaan, että $f \leq 1$ $(\mu+\nu)$-m.k. Siten $0 \leq f \leq 1$ μ-m.k., koska $\mu \ll \mu + \nu$.

Merkitään sitten

$$\begin{aligned} A &= \{x \in X\colon f(x) = 1\}, \\ B &= \{x \in X\colon 0 \leq f(x) < 1\}. \end{aligned}$$

Koska

$$\mu(A) = \int_A f\,d(\mu+\nu) = \int_A f\,d\mu + \int_A f\,d\nu = \mu(A) + \nu(A)$$

ja $\mu(A) < \infty$, on oltava $\nu(A) = 0$.

Asetetaan kaikilla $E \in \mathcal{M}$

$$\begin{aligned} \mu_a(E) &= \mu(E \cap B), \\ \mu_s(E) &= \mu(E \cap A). \end{aligned}$$

Selvästi μ_a ja μ_s ovat σ-äärellisiä mittoja $\mathcal{M}$:ssä. Osoitetaan, että

(1) $\mu = \mu_a + \mu_s$,

(2) $\mu_a \ll \nu$ ja

(3) $\mu_s \perp \nu$.

(1): Kaikilla $E \in \mathcal{M}$

$$\begin{aligned} \mu(E) &= \mu(E \cap B) + \mu(E \cap A) + \mu(E \setminus (A \cup B)) \\ &= \mu_a(E) + \mu_s(E) + 0, \end{aligned}$$

sillä $0 \leq f \leq 1$ μ-m.k. Siten $\mu = \mu_a + \mu_s$.

(2): Oletetaan, että $\nu(E)=0$. Silloin

$$\int_{E\cap B} 1\,d\mu = \mu(E\cap B) = \int_{E\cap B} f\,d\mu + \int_{E\cap B} f\,d\nu \overset{\nu(E)=0}{=} \int_{E\cap B} f\,d\mu,$$

joten

$$\int_{E\cap B} (1-f)\,d\mu = 0.$$

Toisaalta $1-f>0$ $E\cap B$:ssä, joten $\mu_a(E)=\mu(E\cap B)=0$ ja siten $\mu_a \ll \nu$.

(3): Nyt $X = A\cup A^c$, missä $\nu(A)=0$. Jos $E\subset A^c,\ E\in\mathcal{M}$, niin $\mu_s(E)=\mu(E\cap A)=\mu(\emptyset)=0$. Siten $\mu_s\perp\nu$.

(ii) Oletetaan sitten, että $\nu(X)<\infty$ ja $|\mu(X)|<\infty$. Jordanin hajotelmasta saadaan $\mu=\mu^+-\mu^-$, missä μ^+ ja μ^- ovat äärellisiä mittoja $\mathcal{M}$:ssä. Kohdassa (i) osoitettiin, että

$$\mu^+ = \mu_a^+ + \mu_s^+, \quad \mu^- = \mu_a^- + \mu_s^-,$$

missä $\mu_a^\pm \ll \nu$ ja $\mu_s^\pm \perp \nu$. Tällöin

$$\mu = (\mu_a^+ - \mu_a^-) + (\mu_s^+ - \mu_s^-),$$

missä selvästi $(\mu_a^+ - \mu_a^-) \ll \nu$ ja $(\mu_s^+ - \mu_s^-) \perp \nu$.

(iii) Yleisessä tapauksessa

$$X = \bigcup_{k=1}^\infty X_k,$$

missä joukot $X_k\in\mathcal{M}$ ovat erillisiä, $\nu(X_k)<\infty$ ja $|\mu(X_k)|<\infty$. Kohdan (ii) nojalla

$$\mu(E) = \mu_a^k(E) + \mu_s^k(E)$$

kaikilla

$$E\in\mathcal{M}_k = \{A\in\mathcal{M}\colon A\subset X_k\}.$$

Asetetaan

$$\mu_a(E) = \sum_{k=1}^\infty \mu_a^k(E\cap X_k),$$

$$\mu_s(E) = \sum_{k=1}^\infty \mu_s^k(E\cap X_k)$$

kaikilla $E\in\mathcal{M}$. Selvästi μ^a ja μ_s ovat σ-äärellisiä merkkimittoja ja $\mu=\mu_a+\mu_s$.

Osoitetaan, että $\mu_a\ll\nu$. Olkoon $\nu(E)=0$, jolloin $\nu(E\cap X_k)=0$. Koska $\mu_a^k \ll \nu|\mathcal{M}_k$, on $\mu_a^k(E\cap X_k)=0\ \forall k$, joten $\mu_a(E)=0$.

Osoitetaan seuraavaksi, että $\mu_s\perp\nu$. Koska $\mu_s^k\perp\nu|\mathcal{M}_k$, on olemassa $A_k\in\mathcal{M}_k$ s.e. $\nu(A_k)=0$ ja $\mu_s^k(E)=0$, jos $E\in\mathcal{M}_k,\ E\subset X_k\setminus A_k$. Olkoon

$$A = \bigcup_{k=1}^\infty A_k,$$

jolloin $\nu(A) = 0$. Olkoon $E \subset X \setminus A,\ E \in \mathcal{M}$. Silloin

$$E = \bigcup_{k=1}^{\infty} (E \cap X_k),$$

$E \cap X_k \subset X_k \setminus A = X_k \setminus A_k$ ja $E \cap X_k \in \mathcal{M}_k$. Niinpä $\mu_s^k(E \cap X_k) = 0\ \forall k$, joten $\mu_s(E) = 0$. Siten $\mu_s \perp \nu$.

(iv) Todistetaan lopuksi yksikäsitteisyys. Oletetaan, että μ on äärellinen merkkimitta ja

$$\mu = \mu_a + \mu_s = \tilde{\mu}_a + \tilde{\mu}_s.$$

Silloin $\mu_a, \mu_s, \tilde{\mu}_a$ ja $\tilde{\mu}_s$ ovat äärellisiä. Nyt

$$\tau = \mu_a - \tilde{\mu}_a = \mu_s - \tilde{\mu}_s$$

on sekä absoluuttisesti jatkuva että singulaarinen ν:n suhteen. Koska $\tau \perp \nu$, on olemassa $A \in \mathcal{M}$ s.e. $\nu(A) = 0$ ja $\tau(E) = 0$ kaikilla $E \in \mathcal{M},\ E \subset X \setminus A$. Koska $\tau \ll \nu$, niin $\tau(F) = 0$, jos $F \in \mathcal{M}$ ja $F \subset A$. Nyt kaikilla $D \in \mathcal{M}$

$$\tau(D) = \tau(D \cap A) + \tau(D \setminus A) = 0 + 0 = 0,$$

joten $\tau = 0$ ja $\mu_a - \tilde{\mu}_a = 0 = \mu_s - \tilde{\mu}_s$. Yleinen tapaus käsitellään kuten (iii)-kohdassa.

$\square$

5.53 Radon-Nikodym derivaatta ja muuttujan vaihto

Tässä kappaleessa tutkitaan muuttujan vaihtoa Lebesguen integraalissa Radon-Nikodym derivaatan avulla.

Olkoot $(X, \mathcal{M}, \mu)$ ja $(Y, \mathcal{N}, \nu)$ mitta-avaruuksia. Sanomme, että kuvaus $f\colon X \to Y$ toteuttaa *ehdon* (N), eli on N-*kuvaus*, jos $fA \in \mathcal{N}$ ja $\nu(fA) = 0$ aina, kun $A \in \mathcal{M}$ ja $\mu(A) = 0$.

Oletetaan, että $h\colon G \to G'$ on homeomorfismi avointen joukkojen $G, G' \subset \mathbb{R}^n$ välillä. Jos $E \in \operatorname{Bor} G$, niin $hE \in \operatorname{Bor} G'$. (*Huom.:* Jos $E \subset G$ on Lebesgue-mitallinen, niin hE:n ei tarvitse olla Lebesgue-mitallinen.)

Asetetaan

$$\mu_h(E) = m\big(h(E \cap G)\big),$$

kun $E \in \operatorname{Bor} \mathbb{R}^n$. Jos $C \subset G$ on kompakti, niin hC on kompakti ja $m(hC) < \infty$. Siten $\mu_h \llcorner C$ on Radon-mitta jokaisella kompaktilla $C \subset G$ ja äärellinen (Radon-Nikodym) derivaatta $D_m\mu_h(x) < \infty$ on olemassa m.k. $x \in G$. Havaitaan, että

$$\mu_h \ll m \iff h \text{ on } N\text{-kuvaus.}$$

Lause 5.54. *Olkoon $h\colon G \to G'$ homeomorfismi, joka toteuttaa ehdon (N). Jos $E \in \operatorname{Bor} G$, niin*

$$m(hE) = \int_E D_m\mu_h \, dm. \tag{5.55}$$

Jos myös h^{-1} toteuttaa ehdon (N), niin $D_m\mu_h(x) > 0$ m.k.

Todistus. Koska $\mu_h \ll m$, niin (5.55) saadaan Lauseesta 5.25. Joukko

$$E = \{x \in G \colon D_m\mu_h(x) = 0\}$$

on Borel, sillä $D_m\mu_h$ on Borel-funktio. Oletetaan, että h^{-1} toteuttaa ehdn (N) ja tehdään vastaoletus, että $m(E) > 0$. Silloin (5.55):n ja E:n määritelmän mukaan

$$m(hE) = \int_E D_m\mu_h \, dm = 0,$$

josta saadaan ristiriita $m(E) = 0$, sillä h^{-1} toteuttaa ehdon (N). □

Huomautus 5.56. Lause 5.31 sanoo, että

$$m(hE) \geq \int_E D_m\mu_h \, dm \quad \forall E \in \operatorname{Bor} G \tag{5.57}$$

ja yhtäsuuruus pätee $(\forall E)$, jos ja vain jos h toteuttaa ehdon (N).

Lause 5.58. *Oletetaan, että homeomorfismi $h \colon G \to G'$ toteuttaa ehdon (N). Jos $A \subset G$ on Lebesgue-mitallinen, niin hA on Lebesgue-mitallinen ja*

$$m(hA) = \int_A D_m\mu_h \, dm. \tag{5.59}$$

Jos $f \colon G' \to \dot{\mathbb{R}}$ on Lebesgue-mitallinen funktio s.e. integraali

$$\int_{G'} f \, dm$$

on olemassa, niin $(f \circ h) D_m\mu_h$ on Lebesgue-mitallinen ja

$$\int_{hA} f \, dm = \int_A (f \circ h) D_m\mu_h \, dm \tag{5.60}$$

kaikilla mitallisilla $A \subset G$.

Todistus. On olemassa Borel-joukko $E \subset A$ s.e. $m(A \setminus E) = 0$. Silloin $m\big(h(A \setminus E)\big) = 0$, koska h toteuttaa ehdon (N). Nyt

$$hA = \underbrace{hE}_{\in \operatorname{Bor} \mathbb{R}^n} \cup \underbrace{h(A \setminus E)}_{\text{0-joukko}},$$

joten hA on Lebesgue-mitallinen ja $m(hA) = m(hE)$. Siten

$$m(hA) = m(hE) = \int_E D_m\mu_h \, dm = \int_A D_m\mu_h \, dm.$$

Oletetaan, että $f \colon G' \to \dot{\mathbb{R}}$ on mitallinen. Kaavan (5.60) todistamiseksi riittää olettaa, että $f \geq 0$. On olemassa Borel-funktio $g \geq 0$ s.e. $f = g$ m.k. (ks. [Ho2], Lauseen 2.17 todistus). Siis

$$g(x) = f(x), \quad \text{kun } x \in G' \setminus B,\ m(B) = 0.$$

Suurentamalla tarvittaessa B:tä voidaan olettaa, että B on Borel. Korvaamalla f funktiolla $f\chi_{hA}$ voidaan olettaa, että $A = G$. Nyt

$$\int_{G'} f \, dm = \int_{G' \setminus B} f \, dm = \int_{G' \setminus B} g \, dm$$

ja

$$\int_G (f \circ h) D_m\mu_h \, dm = \int_{G\setminus h^{-1}B} (g \circ h) D_m\mu_h \, dm + \underbrace{\int_{h^{-1}B} (f \circ h) D_m\mu_h \, dm}_{=J} . \tag{5.61}$$

Koska

$$0 = m(B) = \int_{h^{-1}B} D_m\mu_h \, dm,$$

niin $D_m\mu_h = 0$ m.k. $h^{-1}B$:ssä, joten $J = 0$. Samalla saatiin, että $(f \circ h)D_m\mu_h = (g \circ h)D_m\mu_h$ joukossa $G \setminus h^{-1}B$ ja $(f \circ h)D_m\mu_h = 0$ m.k. joukossa $h^{-1}B$, joten $(f \circ h)D_m\mu_h$ on mitallinen ja (5.61):n vasen puoli on siten määritelty. Näin ollen riittää osoittaa (5.60) tapauksessa $f \geq 0$ Borel ja $A = G$.

Oletetaan ensin, että $f \geq 0$ on yksinkertainen Borel-funktio,

$$f = \sum_k a_k \chi_{A_k}, \quad A_k \in \operatorname{Bor} \mathbb{R}^n.$$

Silloin

$$\begin{aligned}
\int_{hG} f \, dm &= \sum_k a_k m(A_k \cap hG) \\
&= \sum_k a_k \int_{G\cap h^{-1}A_k} D_m\mu_h \, dm \\
&= \sum_k \int_{G\cap h^{-1}A_k} f\bigl(h(x)\bigr) D_m\mu_h(x) \, dm(x) \\
&= \int_G f\bigl(h(x)\bigr) D_m\mu_h(x) \, dm(x).
\end{aligned}$$

Oletetaan sitten, että $f \geq 0$ on Borel. Silloin on olemassa kasvava jono yksinkertaisia Borel-funktioita $f_j \nearrow f$, $f_j \geq 0$. Nyt

$$(f_j \circ h) D_m\mu_h \nearrow (f \circ h) D_m\mu_h,$$

joten monotonisen konvergenssin lauseen nojalla

$$\begin{aligned}
\int_{hG} f \, dm &= \lim_{j\to\infty} \int_{hG} f_j \, dm \\
&= \lim_{j\to\infty} \int_G (f_j \circ h) D_m\mu_h \, dm \\
&= \int_G (f \circ h) D_m\mu_h \, dm.
\end{aligned}$$

□

Huomautus 5.62. Oletetaan, että $h\colon G \to G'$ on homeomorfismi avoimien joukkojen $G, G' \subset \mathbb{R}^n$ välillä s.e. h on differentioituva pisteessä $x \in G$. Silloin

$$D_m\mu_h(x) = \lim_{r\to 0} \frac{m\bigl(h\bar{B}(x,r)\bigr)}{m\bigl(\bar{B}(x,r)\bigr)} = |J_h(x)|,$$

missä $J_h(x) = \det h'(x)$.

Lause 5.63. *Oletetaan, että h on kuten Lauseessa 5.58 ja lisäksi differentioituva m.k. $x \in G$. Silloin kaavassa* (5.60) *voidaan $D_m\mu_h(x)$ korvata $|J_h(x)|$:llä.*

Esimerkki 5.64. Olkoon $g\colon [0,1] \to [0,1]$ Cantorin 1/3-funktio (ks. Reaalianalyysi I, [Ho2, Esim. 1.21]),

$$G =]0,1[\times]0,1[\quad \text{ja} \quad G' =]0,2[\times]0,1[.$$

Määritellään homeomorfismi $h = (h_1, h_2)\colon G \to G'$ asettamalla pisteessä $x = (x_1, x_2)$

$$\begin{aligned} h_1(x) &= x_1 + g(x_1), \\ h_2(x) &= x_2. \end{aligned}$$

Silloin h on differentioituva jokaisessa pisteessä

$$x \in A = \big(]0,1[\setminus C(1/3)\big)\times]0,1[$$

eli m.k. $x \in G$. Lisäksi

$$J_h(x) = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1, \quad \forall x \in A.$$

Nyt

$$\int_G |J_h|\, dm = 1, \quad \text{mutta} \quad m(hG) = 2,$$

joten (5.59) *ei päde*. Syynä on se, ettei h toteuta ehtoa (N): $m(G\setminus A) = 0$, mutta $m\big(h(G\setminus A)\big) > 0$.

$\boxed{\text{LOPPU}}$

Alla luettelo (eräistä) kirjoista ja luentomuistiinpanoista, joita voi käyttää lisämateriaalina.

Viitteet

[AT] Ambrosio, Luigi ja Tilli, Paolo. *Topics on analysis in metric spaces,* Oxford University Press, 2004.

[Di] DiBenedetto, Emmanuele. *Real Analysis,* Birkhäuser, 2002.

[EG] Evans, Lawrence ja Gariepy, Ronald. *Measure theory and fine properties of functions,* CRC Press, 1992.

[Fa1] Falconer, K. J. *The geometry of fractal sets,* Cambridge University Press, 1985.

[Fa2] Falconer, K. J. *Fractal geometry,* John Wiley & Sons, Inc., 1990.

[Fe] Federer, Herbert. *Geometric measure theory,* Springer-Verlag, 1969.

[Fr] Friedman, Avner. *Foundations of modern analysis,* Dover Publications Inc., 1982.

[GZ] Gariepy, Ronald ja Ziemer, William. *Modern real analysis,* PWS Publishing Company, 1994.

[He] Heinonen, Juha. *Lectures on analysis on metric spaces,* Springer-Verlag, 2001.

[HS] Hewitt, Edwin ja Stromberg, Karl. *Real and abstract analysis,* Springer-Verlag, 1975.

[Ho1] Holopainen, Ilkka. *Mitta ja integraali, Kevätlk. 2002.*
http://www.helsinki.fi/~iholopai/MitInt02.pdf

[Ho2] Holopainen, Ilkka. *Reaalianalyysi I, Kevätlk. 2002.*
http://www.helsinki.fi/~iholopai/ReAn02.pdf

[Ho3] Holopainen, Ilkka. *Metristen avaruuksien differentioituvat struktuurit, syksy 2003.*
http://www.helsinki.fi/~iholopai/MetAv03.pdf

[Ho4] Holopainen, Ilkka. *Johdatus differentiaaligeometriaan, Syksy 2004.*
http://www.helsinki.fi/~iholopai/JohdDG.pdf

[Jo] Jones, Frank. *Lebesgue integration on Euclidean space,* Jones and Bartlett Publishers, 1993.

[Mat] Mattila, Pertti. *Geometry of sets and measures in Euclidean spaces,* Cambridge University Press, 1995.

[MW] McDonald, John N. ja Weiss, Neil A. *A course in real analysis,* Academic Press Inc., 1999.

[Ro] Royden, H. L. *Real analysis,* Macmillan Publishing Company, 1988.

[Ru] Rudin, Walter. *Real and complex analysis,* McGraw-Hill Book Co., 1987.