Mitta ja integraali [1]

Ilkka Holopainen[2]

March 22, 2004

[1]Perustuvat pääosin luentomonisteisiin Tylli: Mitta ja integraali (2000) ja Väisälä: Diff. Int. III (1985)
[2]Ilmoita painovirheistä esim. sähköpostitse osoitteeseen `ilkka.holopainen@helsinki.fi`

0 Taustatietojen kertausta ja täydennystä

0.1 Käytännön joukko-oppia

Olkoon X mikä tahansa joukko. Tällöin *X:n potenssijoukko* on

$$\mathcal{P}(X) = \{A \colon A \subset X\}$$

ja *X:n joukkoperhe* (tai *perhe/kokoelma X:n osajoukkoja*) on mikä tahansa $\mathcal{P}(X)$:n osajoukko

$$\mathcal{F} \subset \mathcal{P}(X).$$

Perheen $\mathcal{F}$ *yhdiste* on

$$\bigcup_{A \in \mathcal{F}} A = \{x \in X : x \in A \ \underline{\text{jollakin}}\ A \in \mathcal{F}\}$$

ja *leikkaus* on

$$\bigcap_{A \in \mathcal{F}} A = \{x \in X : x \in A \ \underline{\text{kaikilla}}\ A \in \mathcal{F}\}.$$

Olkoon $\mathcal{A}$ jokin (indeksi)joukko ja oletetaan, että jokaista $\alpha \in \mathcal{A}$ vastaa yksikäsitteinen X:n osajoukko $V_\alpha \subset X$. (Toisin sanoen, $\alpha \mapsto V_\alpha$ on kuvaus $\mathcal{A} \to \mathcal{P}(X)$.) Tällöin kokoelma

$$\mathcal{F} = \{V_\alpha \colon \alpha \in \mathcal{A}\}$$

on *X:n indeksöity joukkoperhe.*

Indeksöidyn perheen *yhdiste* on

$$\bigcup_{\alpha \in \mathcal{A}} V_\alpha = \{x \in X : x \in V_\alpha \ \underline{\text{jollakin}}\ \alpha \in \mathcal{A}\}$$

ja vastaavasti *leikkaus* on

$$\bigcap_{\alpha \in \mathcal{A}} V_\alpha = \{x \in X : x \in V_\alpha \ \underline{\text{kaikilla}}\ \alpha \in \mathcal{A}\}.$$

Merkitsemme myös

$$\bigcup_{\alpha} V_\alpha \quad \text{ja} \quad \bigcap_{\alpha} V_\alpha, \quad \text{jos } \mathcal{A} \text{ käy selville asiayhteydestä.}$$

Esimerkki 0.2.

1. Olkoon $\mathcal{F} \subset \mathcal{P}(X)$. Voimme tulkita $\mathcal{F}$:n indeksöidyksi perheeksi käyttämällä $\mathcal{F}$:ää itseään indeksijoukkona. Toisin sanoen, jos $\alpha \in \mathcal{F}$ (jolloin α on X:n osajoukko), niin merkitään $V_\alpha = \alpha$. Tällöin $\mathcal{F} = \{V_\alpha \colon \alpha \in \mathcal{F}\}$.

2.
$$X = \bigcup_{x \in X} \{x\}, \qquad \{x\} = \text{ yksiö.}$$

Usein indeksijoukkona on $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$, jolloin merkitään

$$\bigcup_{n \in \mathbb{N}} V_n \quad \text{tai} \quad \bigcup_{n}^{\infty} V_n \quad \text{tai} \quad \bigcup_{n} V_n,$$

ja vastaavasti

$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} V_n \quad \text{tai} \quad \bigcap_{n}^{\infty} V_n \quad \text{tai} \quad \bigcap_{n} V_n.$$

Merkinnät (V_n), $(V_n)_{n=1}^{\infty}$, $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$, ja $V_1, V_2, \ldots$ tarkoittavat (joukkojen) *jonoja*.

Joukkojen $A, B \subset X$ *erotus* on

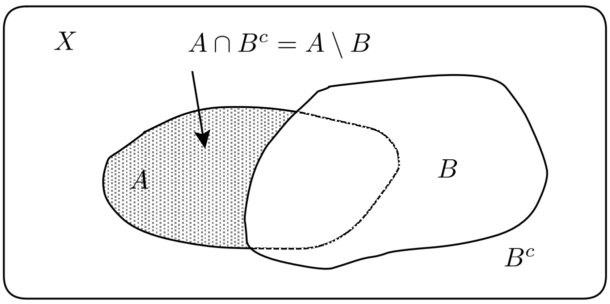
$$A \setminus B = \{x \in X : x \in A \text{ ja } x \notin B\}.$$

Joukon $B \subset X$ *komplementti* (X:n suhteen) on

$$B^c = X \setminus B.$$

Huomautus 0.3.

$$A \setminus B = A \cap B^c.$$



Lause 0.4. *Olkoon* $\{V_\alpha : \alpha \in \mathcal{A}\}$ *jokin* X*:n joukkoperhe. Tällöin pätee ns.* de Morganin lait*:*

$$\Big(\bigcup_{\alpha} V_\alpha\Big)^c = \bigcap_{\alpha} V_\alpha^c \tag{0.5}$$

ja

$$\Big(\bigcap_{\alpha} V_\alpha\Big)^c = \bigcup_{\alpha} V_\alpha^c. \tag{0.6}$$

Olkoon $B \subset X$*. Tällöin pätee ns.* distributiiviset lait yhdisteelle ja leikkaukselle*:*

$$B \cap \Big(\bigcup_{\alpha} V_\alpha\Big) = \bigcup_{\alpha} (B \cap V_\alpha) \tag{0.7}$$

ja

$$B \cup \Big(\bigcap_{\alpha} V_\alpha\Big) = \bigcap_{\alpha} (B \cup V_\alpha). \tag{0.8}$$

Tod. (0.5):

$$x \in \Big(\bigcup_{\alpha} V_\alpha\Big)^c \iff x \notin \bigcup_{\alpha} V_\alpha \iff \forall \alpha : x \notin V_\alpha \iff \forall \alpha : x \in V_\alpha^c \iff x \in \bigcap_{\alpha} V_\alpha^c.$$

(0.6): Samoin.

(0.7):

$$x \in B \cap \big(\bigcup_\alpha V_\alpha\big) \iff x \in B \text{ ja } x \in \bigcup_\alpha V_\alpha \iff x \in B \text{ ja } x \in V_\alpha \text{ jollakin } \alpha \in \mathcal{A}$$
$$\iff x \in B \cap V_\alpha \text{ jollakin } \alpha \in \mathcal{A} \iff x \in \bigcup_\alpha \big(B \cap V_\alpha\big).$$

(0.8): Samoin. □

Joukkoperheen yhdisteen/leikkauksen kuvat ja alkukuvat.
Olkoot X ja Y epätyhjiä joukkoja ja $f\colon X \to Y$ kuvaus.
Joukon $A \subset X$ *kuva* (kuvauksessa f) on

$$f(A) = \{f(x)\colon x \in A\}. \quad (\subset Y)$$

Merkitään myös lyhyemmin fA.
Joukon $B \subset Y$ *alkukuva* (kuvauksessa f) on

$$f^{-1}(B) = \{x \in X\colon f(x) \in B\}.$$

Merkitään myös $f^{-1}B$. Käytämme myös merkintää

$$f^{-1}(y) = f^{-1}(\{y\}),$$

kun $y \in Y$. [Huom.: f:llä ei tarvitse olla käänteiskuvausta.]

Lause 0.9. *Olkoon $f\colon X \to Y$, $\{V_\alpha\colon \alpha \in \mathcal{A}\}$ X:n joukkoperhe ja $\{W_\beta\colon \beta \in \mathcal{B}\}$ Y:n joukkoperhe. Silloin*

$$f\big(\bigcup_\alpha V_\alpha\big) = \bigcup_\alpha fV_\alpha \tag{0.10}$$

$$f^{-1}\big(\bigcup_\beta W_\beta\big) = \bigcup_\beta f^{-1}W_\beta \tag{0.11}$$

$$f^{-1}\big(\bigcap_\beta W_\beta\big) = \bigcap_\beta f^{-1}W_\beta. \tag{0.12}$$

Tod. (0.10):

$$y \in f\big(\bigcup_\alpha V_\alpha\big) \iff y = f(x) \text{ ja } x \in \bigcup_\alpha V_\alpha \iff y = f(x) \text{ ja } x \in V_\alpha \text{ jollakin } \alpha \in \mathcal{A}$$
$$\iff y \in fV_\alpha \text{ jollakin } \alpha \in \mathcal{A} \iff y \in \bigcup_\alpha fV_\alpha.$$

(0.11) ja (0.12): Samoin. □

Huomautus 0.13. Aina pätee

$$f\big(\bigcap_\alpha V_\alpha\big) \subset \bigcap_\alpha fV_\alpha,$$

mutta inkluusio voi olla aito. Yhtäsuuruus $f(\cap_\alpha V_\alpha) = \cap_\alpha fV_\alpha$ pätee esimerkiksi, jos f on injektio.

Numeroituvat ja ylinumeroituvat joukot.
Numeroituvuus on erittäin tärkeä mittateoriassa!

Määritelmä 0.14. Joukko A on *numeroituva*, jos $A = \emptyset$ tai $\exists$ injektio $f\colon A \to \mathbb{N}$ ($\iff$ $\exists$ surjektio $g\colon \mathbb{N} \to A$).

A on *ylinumeroituva*, jos A ei ole numeroituva.

Huomautus 0.15.
1. A numeroituva $\iff$ A äärellinen (mukaanluettuna $\emptyset$) tai *numeroituvasti ääretön* (jolloin $\exists$ bijektio $f\colon A \to \mathbb{N}$).
2. $A \neq \emptyset$ numeroituva $\iff$ $A = \{x_n \colon n \in \mathbb{N}\}$ (toisto sallittu, joten A voi olla äärellinen).
3. A numeroituva, $B \subset A \;\Rightarrow\; B$ numeroituva.

Lause 0.16. *Jos joukot A_n ovat numeroituvia $\forall n \in \mathbb{N}$, niin*

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \text{ on numeroituva.}$$

(Eli "numeroituva yhdiste numeroituvista joukoista on numeroituva".)

Tod. Voi olettaa $A_n \neq \emptyset \;\forall\; n \in \mathbb{N}$. A_n numeroituva $\Rightarrow$ $A_n = \{x_m(n) \colon m \in \mathbb{N}\}$. Määritellään kuvaus

$$g\colon \mathbb{N}\times\mathbb{N} \to \cup_n A_n, \quad g(n,m) = x_m(n).$$

Silloin g on surjektio $\mathbb{N}\times\mathbb{N} \to \cup_n A_n$. Riittää löytää surjektio $h\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}\times\mathbb{N}$, koska silloin

$$g \circ h\colon \mathbb{N} \to \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$$

on surjektio ja siten $\cup_n A_n$ numeroituva. Esimerkki surjektiosta $h\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}\times\mathbb{N}$

$$\begin{array}{cccccccccc}
\underset{=h(1)}{(1,1)} & & \underset{=h(3)}{(1,2)} & & \underset{=h(6)}{(1,3)} & & \underset{=h(10)}{(1,4)} & & \underset{=h(15)}{(1,5)} & \cdots \\
 & \nearrow & & \nearrow & & \nearrow & & \nearrow & & \\
\underset{=h(2)}{(2,1)} & & \underset{=h(5)}{(2,2)} & & \underset{=h(9)}{(2,3)} & & \underset{=h(14)}{(2,4)} & & & \\
 & \nearrow & & \nearrow & & \nearrow & & & & \\
\underset{=h(4)}{(3,1)} & & \underset{=h(8)}{(3,2)} & & \underset{=h(13)}{(3,3)} & & & & & \\
 & \nearrow & & \nearrow & & & & & & \\
\underset{=h(7)}{(4,1)} & & \underset{=h(12)}{(4,2)} & & & & & & & \\
 & \nearrow & & & & & & & & \\
\underset{=h(11)}{(5,1)} & & & & & & & & & \\
\vdots & & & & & & & & &
\end{array}$$

$\square$

Seuraus 0.17. Rationaalilukujen joukko

$$\mathbb{Q} = \{\frac{m}{n} \mid n, m \in \mathbb{Z},\; n \neq 0\}$$

on numeroituva. Syy: Joukko

$$A_k = \{\frac{m}{n} \mid n, m \in \mathbb{Z},\; n \neq 0,\; |m| \leq k, |n| \leq k\}$$

on äärellinen (ja siten numeroituva) $\forall k \in \mathbb{N}$. Lause 0.16 $\Rightarrow$ $\mathbb{Q} = \cup_{k\in\mathbb{N}} A_k$ numeroituva. $\square$

Esimerkki 0.18. (Ylinumeroituva joukko). Väli $[0,1]$ (ja siten myös $\mathbb{R}$) on ylinumeroituva.

Idea: $x \in [0,1] \Rightarrow$ x:llä on desimaalikehitelmä

$$x = 0, a_1 a_2 a_3 \ldots,$$

missä $a_j \in \{0,1,2,\ldots,9\}$.

Vastaoletus: $[0,1]$ numeroituva, jolloin $[0,1] = \{x_n \colon n \in \mathbb{N}\}$. Pisteillä x_n on desimaalikehitelmät

$$\begin{aligned}
x_1 &= 0, a_1^{(1)} a_2^{(1)} a_3^{(1)} \ldots \\
x_2 &= 0, a_1^{(2)} a_2^{(2)} a_3^{(2)} \ldots \\
x_3 &= 0, a_1^{(3)} a_2^{(3)} a_3^{(3)} \ldots \\
&\vdots \\
x_n &= 0, a_1^{(n)} a_2^{(n)} a_3^{(n)} \ldots a_n^{(n)} \ldots \\
&\vdots
\end{aligned}$$

"Lävistäjällä" on lukujono $a_1^{(1)}, a_2^{(2)}, a_3^{(3)}, \ldots, a_n^{(n)}, \ldots$, missä $a_n^{(n)} = x_n$:n n:s desimaali. Määritellään luku $x \in [0,1]$ asettamalla $x = 0, b_1 b_2 b_3 \ldots$, missä

$$b_n = \begin{cases} a_n^{(n)} + 2, & \text{jos } a_n^{(n)} \in \{0,1,2,\ldots,7\}, \\ a_n^{(n)} - 2, & \text{jos } a_n^{(n)} \in \{8,9\}. \end{cases} \tag{0.19}$$

Luvun x n:s desimaali toteuttaa $|b_n - a_n^n| = 2$ $\forall n \in \mathbb{N}$, joten $x \neq x_n$ $\forall n \in \mathbb{N}$. Tämä on ristiriita, sillä $[0,1] = \{x_n \colon n \in \mathbb{N}\}$. Siis $[0,1]$ on ylinumeroituva.
[Huom. Desimaalikehitelmä ei ole 1-käsitteinen: esim. $0,5999\ldots = 0,6000\ldots$ (nähdään esim. geometrisen sarjan avulla). Tämä ei kuitenkaan haittaa, sillä (0.19):ssä $b_n = a_n^{(n)} \pm 2$.]

Summaaminen.

Olkoon $\mathcal{A} \neq \emptyset$ mielivaltainen indeksijoukko ja $a_\alpha \geq 0$ $\forall \alpha \in \mathcal{A}$. Kysymys: Mitä tarkoittaa

$$\sum_{\alpha \in \mathcal{A}} a_\alpha ?$$

Määr.

$$\sum_{\alpha \in \mathcal{A}} a_\alpha = \sup\{ \sum_{\alpha \in \mathcal{A}_0} a_\alpha \mid \mathcal{A}_0 \subset \mathcal{A} \text{ äärellinen}\}.$$

Tähän palataan myöhemmin.

0.20 Euklidinen avaruus $\mathbb{R}^n$

$$\mathbb{R}^n = \overbrace{\mathbb{R} \times \cdots \times \mathbb{R}}^{n \text{ kpl}} \quad \text{karteesinen tulo}$$

Alkoita kutsutaan *pisteiksi* tai *vektoreiksi*.

$$x \in \mathbb{R}^n \iff x = (x_1, \ldots, x_n),\ x_j \in \mathbb{R},\ j = 1, \ldots, n.$$

Algebrallinen rakenne.

Pisteiden $x, y \in \mathbb{R}^n$ *summa* on

$$x + y = (x_1 + y_1, \ldots, x_n + y_x) \in \mathbb{R}^n.$$

Reaaliluvun $\lambda \in \mathbb{R}$ ja pisteen $x \in \mathbb{R}^n$ *tulo* on

$$\lambda x = (\lambda x_1, \ldots, \lambda x_n) \in \mathbb{R}^n.$$

Nollavektori

$$0 = \bar{0} = (0, \ldots, 0).$$

Pisteen $x \in \mathbb{R}^n$ *vastavektori* (vastinpiste)

$$-x = (-1)x = (-x_1, \ldots, -x_n).$$

Pisteiden $x, y \in \mathbb{R}^n$ *erotus* on

$$x - y = x + (-y).$$

$\mathbb{R}^n$:ssä summa ja reaaliluvulla kertominen toteuttavat *vektoriavaruuden* ehdot (Lin.alg.I), esim.

$$\begin{gathered} x + y = y + x, \quad x + 0 = 0 + x = x, \\ \lambda(x + y) = \lambda x + \lambda y, \quad (\lambda + \mu)x = \lambda x + \mu x \quad \text{jne} \\ \forall x, y \in \mathbb{R}^n, \lambda, \mu \in \mathbb{R}. \end{gathered}$$

Pisteiden $x, y \in \mathbb{R}^n$ *sisätulo* on

$$x \cdot y = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \in \mathbb{R}.$$

Merkitään

$$|x| = \sqrt{x \cdot x} = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i x_i \right)^{1/2} \qquad x\text{:n } \textit{normi}.$$

Euklidinen etäisyys $\mathbb{R}^n$:ssä.
Pisteiden $x, y \in \mathbb{R}^n$ *etäisyys* on

$$|x - y| = \left(\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2 \right)^{1/2}.$$

Usein merktään $d(x, y) = |x - y|$. Tällöin d on *metriikka* $\mathbb{R}^n$:ssä, ts. kuvaus $d\colon \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ toteuttaa (metriikan) ehdot:

$$\begin{aligned} &d(x, y) \geq 0 \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^n \\ &d(x, y) = 0 \iff x = y \\ &d(x, y) = d(y, x) \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^n \\ &d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y) \quad \forall x, y, z \in \mathbb{R}^n \quad \text{(kolmioepäyht., $\triangle$-ey).} \end{aligned}$$

Avoimet ja suljetut joukot $\mathbb{R}^n$:ssä. (DII, Topo I)
Euklidinen metriikka d määrää $\mathbb{R}^n$:ään avoimet ja suljetut joukot (ja siten $\mathbb{R}^n$:n topologian) seuraavasti:

Olkoon $x \in \mathbb{R}^n$ ja $r > 0$. Joukko

$$B(x,r) = \{y \in \mathbb{R}^n : |y - x| < r\}$$

on *avoin* (x-keskinen, r-säteinen) *kuula* (engl. "ball") ja

$$S(x,r) = \{y \in \mathbb{R}^n : |y - x| = r\}$$

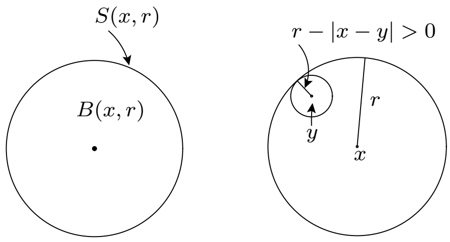
on (x-keskinen, r-säteinen) *pallo* (tai *pallokuori*) (engl. "sphere"). Vastaavasti

$$\bar{B}(x,r) = \{y \in \mathbb{R}^n : |y - x| \le r\}$$

on *suljettu* (x-keskinen, r-säteinen) *kuula*.

Joukko $V \subset \mathbb{R}^n$ on *avoin*, jos $\forall x \in V\ \exists\ r = r(x) > 0$ s.e. $B(x,r) \subset V$.

Joukko $V \subset \mathbb{R}^n$ on *suljettu*, jos $\mathbb{R}^n \setminus V$ on avoin.



Esimerkki 0.21. 1. $B(x,r)$ on avoin $\forall x \in \mathbb{R}^n, r > 0$ ($\triangle$-ey, ks. yo. kuva).

2. Suljettu kuula $\bar{B}(x,r)$ on suljettu joukko.

3. $\mathbb{R}^n$ ja $\emptyset$ ovat sekä avoimia että suljettuja.

4. Puoliavoin väli, esim. $[0,1)$, ei ole avoin eikä suljettu.

Huomautus 0.22. Joukon $A \subset \mathbb{R}^n$ *sulkeuma* on

$$\overline{A} = \{x \in \mathbb{R}^n : x \in A \text{ tai } x \text{ on } A\text{:n kasautumispiste}\}.$$

Piste $x \in \mathbb{R}^n$ on joukon $A \subset \mathbb{R}^n$ kasautumispiste, jos $\forall r > 0\ B(x,r) \cap (A \setminus \{x\}) \neq \emptyset$. $\mathbb{R}^n$:ssä pätee $\bar{B}(x,r) = \overline{B(x,r)}$.

<u>Varoitus.</u> Joskus kuulaa $B(x,r)$ kutsutaan myös palloksi, jolloin $S(x,r)$:ää on kutsuttava pallokuoreksi.

Huomautus 0.23. Jos (X,d) on *metrinen avaruus*, ts. $d\colon X \times X \to \mathbb{R}$ tot. metriikan ehdot, niin voidaan määr. X:n avoimet ja suljetut joukot (metr. d suht.) kuten edellä korvaamalla $|y - x|$ metriikalla $d(x,y)$.

Seuraava tulos pätee yleisesti:

Lause 0.24. *Olkoon $\mathcal{A}$ mikä tahansa indeksijoukko. Silloin*

$$V_\alpha \subset \mathbb{R}^n \text{ avoin } \forall \alpha \in \mathcal{A} \Rightarrow \bigcup_{\alpha \in \mathcal{A}} V_\alpha \text{ avoin;} \tag{0.25}$$

$$V_\alpha \subset \mathbb{R}^n \text{ suljettu } \forall \alpha \in \mathcal{A} \Rightarrow \bigcap_{\alpha \in \mathcal{A}} V_\alpha \text{ suljettu;} \tag{0.26}$$

(0.27)
$$V_1, \ldots, V_k \subset \mathbb{R}^n \textit{ avoin} \Rightarrow \bigcap_{j=1}^{k} V_j \textit{ avoin;}$$

(0.28)
$$V_1, \ldots, V_k \subset \mathbb{R}^n \textit{ suljettu} \Rightarrow \bigcup_{j=1}^{k} V_j \textit{ suljettu.}$$

Tod. (Topo I) (0.25):

$$x \in \bigcup_{\alpha \in \mathcal{A}} V_\alpha \Rightarrow \exists \alpha_0 \in \mathcal{A} \text{ s.e. } x \in V_{\alpha_0},$$
$$V_{\alpha_0} \text{ avoin } \Rightarrow \exists \text{ avoin kuula } B(x,r) \subset V_{\alpha_0} \subset \bigcup_{\alpha \in \mathcal{A}} V_\alpha.$$

(0.26):

$$\begin{aligned} V_\alpha \quad &\text{suljettu } \forall\, \alpha \;\Rightarrow\; V_\alpha^c \quad \text{avoin } \forall\, \alpha \\ \overset{(0.25)}{\Longrightarrow} \quad &\bigcup_\alpha V_\alpha^c \overset{\text{de Morg.}}{=} \Big(\bigcap_\alpha V_\alpha\Big)^c \quad \text{avoin} \\ &\Rightarrow \bigcap_\alpha V_\alpha \quad \text{suljettu.} \end{aligned}$$

(0.27) ja (0.28): (HT). □

Huomautus 0.29.

$$V_j \text{ avoin } \forall j \in \mathbb{N} \not\Rightarrow \bigcap_{j=1}^{\infty} V_j \text{ avoin,}$$
$$V_j \text{ suljettu } \forall j \in \mathbb{N} \not\Rightarrow \bigcup_{j=1}^{\infty} V_j \text{ suljettu.} \quad \text{(HT)}$$

1 Lebesguen mitta $\mathbb{R}^n$:ssä

1.1 Johdanto

Geometrinen lähtökohta: Jos $I = [a, b] \subset \mathbb{R}$ on rajoitettu väli, niin sen pituus on

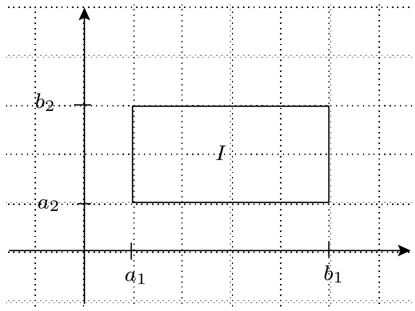
$$\ell(I) = b - a.$$

(Samoin jos I avoin tai puoliavoin.)

Joukko $I \subset \mathbb{R}^n$ on *n-väli*, jos se on muotoa

$$I = I_1 \times \cdots \times I_n,$$

missä kukin $I_j \subset \mathbb{R}$ on väli (joko avoin, suljettu tai puoliavoin).



I on avoin (vastaavasti suljettu) n-väli, jos jokainen I_j on avoin (vastaavasti suljettu).

Olkoot I_j:n päätepisteet a_j, b_j; $a_j < b_j$. Silloin I:n *geometrinen mitta* on

$$\ell(I) = (b_1 - a_1)(b_2 - a_2) \cdots (b_n - a_n) = \prod_{j=1}^{n} (b_j - a_j)$$

($n = 1$ pituus, $n = 2$ pinta-ala, $n = 3$ tilavuus). Merkitään $\ell(\emptyset) = 0$.

<u>Tavoitteena</u> määritellä ”mitta” kuvauksena

$$m_n \colon \mathcal{P}(\mathbb{R}^n) \to [0, +\infty],$$

joka toteuttaisi ehdot:

(1) $m_n(E)$ määritelty $\forall$ osajoukoilla $E \subset \mathbb{R}^n$ ja $m_n(E) \geq 0$.

(2) Jos I on n-väli, niin $m_n(I) = \ell(I)$.

(3) Jos (E_k) on jono *erillisiä* $\mathbb{R}^n$:n osajoukkoja (ts. $E_j \cap E_k = \emptyset$ kun $j \neq k$), niin

$$m_n\big(\cup_{k=1}^{\infty} E_k\big) = \sum_{k=1}^{\infty} m_n(E_k) \qquad \text{”täysadditiivisuus”}.$$

(4) m_n on *siirtoinvariantti*, ts.

$$m_n(E + x) = m_n(E),$$

missä $E \subset \mathbb{R}^n$, $x \in \mathbb{R}^n$, ja $E + x = \{y + x \mid y \in E\}$.

Osoittautuu, <u>ettei</u> kaikkia ehtoja (1) – (4) voida <u>samanaikaisesti</u> toteuttaa. (n-ulotteisen) Lebesguen mitan m_n kohdalla luovutaan ehdosta (1), eli

$$m_n \colon \operatorname{Leb} \mathbb{R}^n \to [0, +\infty],$$

toteuttaa ehdot (2), (3) ja (4), missä

$$\operatorname{Leb} \mathbb{R}^n \subsetneq \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$$

on *Lebesgue-mitallisten* joukkojen perhe. $\operatorname{Leb} \mathbb{R}^n$ sisältää mm. kaikki avoimet ja suljetut joukot.

1.2 Lebesguen ulkomitta $\mathbb{R}^n$:ssä

Sopimus.

$$\begin{aligned}
&a+\infty=\infty+a=\infty, \qquad a\neq-\infty\\
&a-\infty=-\infty+a=-\infty, \qquad a\neq\infty\\
&\infty-\infty, \quad -\infty+\infty \quad \text{ei määr.}\\
&-(\infty)=-\infty, \qquad -(-\infty)=\infty
\end{aligned}$$

$$\infty\cdot a=a\cdot\infty=\begin{cases}\infty, & a>0\\ -\infty, & a<0\\ 0, & a=0\end{cases} \qquad \text{Huom! } 0\cdot\infty=0$$

$$(-\infty)a=a(-\infty)=\begin{cases}-\infty, & a>0\\ +\infty, & a<0\\ 0, & a=0\end{cases}$$

$$\begin{aligned}
\infty\cdot\infty=(-\infty)(-\infty)=\infty\\
(-\infty)\infty=\infty(-\infty)=-\infty
\end{aligned}$$

$$\frac{a}{0}=\begin{cases}\infty, & a>0\\ -\infty, & a<0\\ \text{ei määr.}\ , & a=0\end{cases}$$

$$\frac{a}{\infty}=\frac{a}{-\infty}=0, \quad a\in\mathbb{R}$$

$$\frac{\pm\infty}{\pm\infty} \quad \text{ei määr.}$$

Varoitus: Sopimusta $0\cdot\infty=0$ <u>ei</u> voi käyttää raja-arvojen $\lim_{k\to\infty} x_k y_x$ laskemisessa tapauksissa $\lim_{k\to\infty} x_k = 0$, $\lim_{k\to\infty} y_k = \infty$. Toisin sanoen, <u>ei saa</u> "päätellä", että $\lim_{k\to\infty} x_k y_x = (\lim_{k\to\infty} x_k)(\lim_{k\to\infty} y_k) = 0\cdot\infty = 0$.

Muistutus: Jos $(a_j)_{j\in\mathbb{N}}$ on jono s.e. $a_j\geq 0\ \forall\ j$, niin joko

$$\sum_{j=1}^{\infty} a_j = \lim_{k\to\infty}\sum_{j=1}^{k} a_j \in\mathbb{R} \quad \text{tai} \quad \sum_{j=1}^{\infty} a_j = +\infty.$$

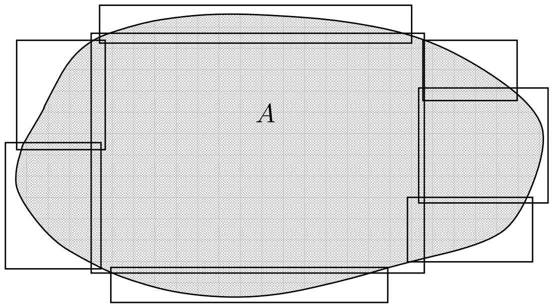
Syy: osasummat $\sum_{j=1}^{k} a_j$ muodostavat kasvavan jonon.

Olkoon $A\subset\mathbb{R}^n$. Tarkastellaan *A:n numeroituvia avoimia peitteitä* (mahd. äärellisiä)

$$\mathcal{F}=\{I_1,I_2,\ldots\},$$

missä kukin $I_k\subset\mathbb{R}^n$ on rajoitettu, avoin n-väli (tai $\emptyset$) ja

$$A\subset\bigcup_{k=1}^{\infty} I_k.$$



Tällöin sanomme, että $\mathcal{F}$ on A:n *Lebesguen peite*. Muodostetaan summa[1]

$$S(\mathcal{F}) = \sum_{k=1}^{\infty} \ell(I_k), \quad 0 \le S(\mathcal{F}) \le +\infty.$$

Määritelmä 1.3. Joukon $A \subset \mathbb{R}^n$ *n-ulotteinen (Lebesguen) ulkomitta* on

$$\boxed{m_n^*(A) = \inf\left\{S(\mathcal{F})\colon\ \mathcal{F} \text{ on } A\text{:n Lebesguen peite}\right\}.}$$

(Myöhemmin osoitetaan, että myös suljetut n-välit kelpaavat.)

Huomautus 1.4. 1. Merkitään $J_k = \{x \in \mathbb{R}^n\colon |x_j| < k\ \forall j\}$ (avoin n-väli). Selvästi

$$\mathbb{R}^n = \bigcup_{k=1}^{\infty} J_k,$$

joten aina $\exists$ avoimia peitteitä $\cup_{k=1}^{\infty} I_k \supset A$ (ja inf on siten olemassa).

2. $I_k \subset \mathbb{R}^n$ avoin n-väli $\Rightarrow$ $0 \le \ell(I_k) < \infty$ $\Rightarrow$ summa on olemassa ja

$$0 \le \sum_{k=1}^{\infty} \ell(I_k) \le +\infty.$$

3. Ulkomitta $m_n(A)$ riippuu (tietenkin) dimensiosta n. Jos n on selvä asiayhteydestä, niin merkitsemme lyhyemmin $m^*(A) = m_n^*(A)$.

4. Suoraan määritelmästä seuraa: $\forall \varepsilon > 0$ $\exists$ A:n Lebesguen peite $\mathcal{F}$, joka yleensä riippuu ε:sta) s.e.

$$S(\mathcal{F}) \le m^*(A) + \varepsilon.$$

(Sallitaan $m^*(A) = +\infty$.) Määritelmä ei tarkoita, että (aina) olisi mahdollista löytää A:n Lebesguen peite $\mathcal{F}$, jolla $m_n^*(A) = S(\mathcal{F})$.

5. Siis: $A \mapsto m^*(A)$ on kuvaus $\mathcal{P}(\mathbb{R}^n) \to [0, \infty]$, erityisesti m^* on määritelty koko $\mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$:ssä.

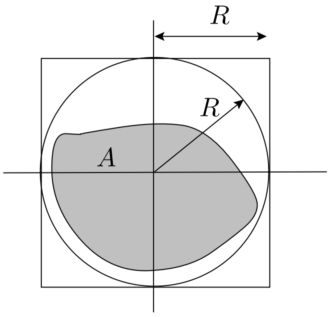
Esimerkki 1.5. 1. Olkoon $n = 2$ ja olkoon $A = \{(x, 0)\colon a \le x \le b\} \subset \mathbb{R}^2$ (jana tasossa).
Väite: $m_2^*(A) = 0$.
Tod. Olkoon $\varepsilon > 0$ ja $I_\varepsilon =]a - \varepsilon, b + \varepsilon[\times] - \varepsilon, \varepsilon[\subset \mathbb{R}^2$ avoin 2-väli.

$$A \subset I_\varepsilon \Rightarrow 0 \le m_2^*(A) \le \ell(I_\varepsilon) = 2\varepsilon(b - a + 2\varepsilon) \xrightarrow{\varepsilon \to 0} 0,$$

joten $m_2^*(A) = 0$.

[1] Itseasiassa $S(\mathcal{F})$ on harhaanjohtava merkintä, koska $\mathcal{F}$ on joukko. Tehdään sopimus: Kukin $\mathcal{F}$:n n-väli indeksöidään vain kerran, jolloin summaan $S(\mathcal{F})$ otetaan mukaan kunkin n-välin geometrinen mitta täsmälleen yhden kerran.

2. Olkoon $n = 1$. Tarkastellaan rationaalilukuja $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$.
   <u>Väite:</u> $m_1^*(\mathbb{Q}) = 0$.
   <u>Tod.</u> $\mathbb{Q}$ numeroituva, joten $\mathbb{Q} = \{q_j : j \in \mathbb{N}\}$. Olkoon $\varepsilon > 0$ mielivaltainen. Jokaisella $j \in \mathbb{N}$, olkoon
   $$I_j = \left]q_j - \frac{\varepsilon}{2^{j+1}}, q_j + \frac{\varepsilon}{2^{j+1}}\right[\subset \mathbb{R}$$
   avoin väli. Sen pituus $\ell(I_j) = 2\varepsilon/2^{j+1} = \varepsilon/2^j$.
   $$q_j \in I_j \quad \forall j \in \mathbb{N} \Rightarrow \mathbb{Q} \subset \bigcup_j I_j \Rightarrow$$
   $$0 \le m_1^*(\mathbb{Q}) \le \sum_{j=1}^{\infty} \ell(I_j) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^j} = \varepsilon \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{2^j} = \varepsilon \xrightarrow{\varepsilon \to 0} 0,$$
   joten $m_1^*(\mathbb{Q}) = 0$.
3. $A \subset \mathbb{R}^n$ numeroituva $\Rightarrow$ $m_n^*(A) = 0$ (Kuten 2.)
4. Olkoon $A \subset \mathbb{R}^n$ *rajoitettu* joukko, ts. $\exists R > 0$ s.e. $A \subset B(0, R)$. Silloin $A \subset I$, missä
   $$I = \overbrace{]-R, R[\times \cdots \times]-R, R[}^{n \text{ kpl}} \quad \text{avoin } n\text{-väli.}$$



   Saadaan arvio
   $$m^*(A) \le \ell(I) = (2R)^n.$$

(Lebesguen) ulkomitan ominaisuuksia.

Lause 1.6. *(1)* $m_n^*(\emptyset) = 0$;

(2) "monotonisuus"*:* $A \subset B \Rightarrow m_n^*(A) \le m_n^*(B)$;

(3) "subadditiivisuus"*:* $A_1, A_2, \ldots \subset \mathbb{R}^n$ *jono joukkoja* $\Rightarrow$
$$m_n^*\Big(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j\Big) \le \sum_{j=1}^{\infty} m_n^*(A_j).$$

Huomautus 1.7. (3) pätee myös äärelliselle yhdisteelle $\cup_{j=1}^k (A_j)$ (valitaan $A_{k+1} = \cdots = \emptyset$).

Tod.

(1): Selvä.

(2): Olkoon $\mathcal{F}$ B:n Lebesguen peite.

$$A \subset B \quad \Rightarrow \quad \mathcal{F} \text{ on myös } A\text{:n Lebesguen peite} \quad \overset{\text{määr.}}{\Longrightarrow} \quad m_n^*(A) \leq S(\mathcal{F}).$$

Otetaan inf yli kaikkien B:n Lebesguen peitteiden $\quad \Rightarrow \quad m_n^*(A) \leq m_n^*(B)$.

(3): Merkitään $A = \cup_j A_j$. Olkoon $\varepsilon > 0$. Jokaisella j valitaan A_j:n Lebesguen peite $\mathcal{F}_j = \{I_{j1}, I_{j2} \ldots\}$ s.e.

$$S(\mathcal{F}_j) \leq m_n^*(A_j) + \varepsilon/2^j.$$

Nyt $\mathcal{F} = \bigcup_j \mathcal{F}_j = \{I_{jk} \colon j \in \mathbb{N}, k \in \mathbb{N}\}$ on A:n Lebesguen peite

$$\overset{\text{määr.}}{\Longrightarrow} \quad m_n^*(A) \leq S(\mathcal{F}) = \sum_{j=1}^{\infty} S(\mathcal{F}_j) \leq \sum_{j=1}^{\infty} m_n^*(A_j) + \sum_{j=1}^{\infty} \varepsilon/2^j = \sum_{j=1}^{\infty} m_n^*(A_j) + \varepsilon.$$

Annetaan $\varepsilon \to 0 \quad \Rightarrow \quad$ väite.

□

Huomautus 1.8. Yllä tarvittiin ”summeerausteoriaa” (yhtälö $S(\mathcal{F}) = \sum_{j=1}^{\infty} S(\mathcal{F}_j)$). Ks. Lemma 1.13 ja 1.14 alla.

Lause 1.9. *Olkoon $A \subset \mathbb{R}^n$. Silloin*

$$m_n^*(A + x) = m_n^*(A) \tag{1.10}$$

kaikilla $x \in \mathbb{R}^n$, missä $A + x = \{y + x \colon y \in A\}$;

$$m_n^*(tA) = t^n m_n^*(A), \tag{1.11}$$

kun $t > 0$, missä $tA = \{ty \colon y \in A\}$.

Tod. (HT) □

Summeerausteoriaa. Olkoon I (indeksi)joukko ja $a_i \geq 0 \ \forall \ i \in I$. Jos $J \subset I$ on äärellinen, niin merkitään

$$S_J = \sum_{i \in J} a_i\,, \qquad S_\emptyset = 0.$$

Määritelmä 1.12.

$$\sum_{i \in I} a_i = \sup\{S_J \colon J \subset I \text{ äärellinen}\}.$$

Lemma 1.13.

$$\sum_{i \in \mathbb{N}} a_i = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} a_i.$$

eli ”uusi” määritelmä yhtäpitävä aiemman (Diff.I) kanssa.

Tod. Merkitään $J_n = \{1, \dots, n\}$, $S = \sum_{i \in \mathbb{N}} a_i$ $(= \sup\{S_J \colon J \subset \mathbb{N} \text{ äärellinen}\})$.

$$\begin{aligned} (S_{J_n}) \quad \text{nouseva jono} \quad &\Rightarrow \quad \exists \lim_{n\to\infty} S_{J_n} = S' \\ S_{J_n} \le S \quad &\Rightarrow \quad S' \le S. \end{aligned}$$

Toisaalta

$$\begin{aligned} J \subset \mathbb{N} \text{ äärellinen} \quad &\Rightarrow \quad \exists\, n \in \mathbb{N} \text{ s.e. } J \subset J_n \\ &\Rightarrow \quad S_J \le S_{J_n} \le S' \\ &\Rightarrow \quad S \le S' \quad (\text{ottamalla sup yli } \forall\, J). \end{aligned}$$

□

Seuraavassa sekä I että J ovat mielivaltaisia indeksijoukkoja. (Lisäksi merkitään lyhyemmin $a_{ij} = a_{(i,j)}$.)

Lemma 1.14.

$$\sum_{(i,j)\in I\times J} a_{ij} = \sum_{i\in I}\sum_{j\in J} a_{ij} = \sum_{j\in J}\sum_{i\in I} a_{ij}.$$

Tod. Merkitään S_{vas} = vasemman puoleisin summa, S_{kes} = keskimmäinen summa, ja S_{oik} = oikean puoleisin summa.

(a): Jos $\mathcal{A} \subset I \times J$ on äärellinen, niin $\exists$ äärelliset $I' \subset I$, $J' \subset J$ s.e. $\mathcal{A} \subset I' \times J'$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \quad S_{\mathcal{A}} \le S_{I'\times J'} &\overset{(*)}{=} \sum_{i\in I'}\sum_{j\in J'} a_{ij} \le \sum_{i\in I'}\sum_{j\in J} a_{ij} \le S_{\text{kes}} \\ \Rightarrow \quad S_{\text{vas}} &\le S_{\text{kes}} \quad (\text{ottamalla sup yli } \forall\, \mathcal{A}). \end{aligned}$$

[(∗): summassa $S_{I'\times J'}$ äärellisen monta termiä, joten voidaan summata missä järjestyksessä tahansa.]

(b): Olkoon $I' \subset I$ äärellinen ja $J'_i \subset J$ äärellinen $\forall\, i \in I'$. Merkitään

$$\mathcal{A} = \{(i,j) \colon i \in I', j \in J'_i\}.$$

Silloin

$$S_{\text{vas}} \ge S_{\mathcal{A}} = \sum_{i\in I'}\sum_{j\in J'_i} a_{ij}.$$

Otetaan $(\forall\, i \in I')$ sup yli äärellisten $J'_i \subset J$

$$S_{\text{vas}} \ge \sum_{i\in I'}\sum_{j\in J} a_{ij}$$

$$\text{sup yli äärellisten } I' \subset I \quad \Rightarrow \quad S_{\text{vas}} \ge S_{\text{kes}}.$$

Samoin $S_{\text{vas}} = S_{\text{oik}}$. □

Korollari 1.15.

$$\sum_{(i,j)\in \mathbb{N}\times\mathbb{N}} a_{ij} = \sum_{i\in \mathbb{N}}\sum_{j\in \mathbb{N}} a_{ij} = \sum_{j\in \mathbb{N}}\sum_{i\in \mathbb{N}} a_{ij}\,.$$

Huomautus 1.16. Subadditiivisuus ei (yleensä) päde muodossa

$$m_n^*\big(\bigcup_{i\in I} A_i\big) \le \sum_{i\in I} m_n^*(A_i), \tag{1.17}$$

missä $A_i \subset \mathbb{R}^n$, $i \in I$, ja I on *ylinumeroituva* indeksijoukko. Syy:

$$\mathbb{R}^n = \bigcup_{x\in\mathbb{R}^n} \{x\}, \quad m_n^*(\{x\}) = 0 \ \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

Jos (1.17) pätisi, niin

$$0 \le m_n^*(\mathbb{R}^n) = m_n^*\big(\bigcup_{x\in\mathbb{R}^n} \{x\}\big) \overset{(1.17)}{\le} \sum_{x\in\mathbb{R}^n} m_n^*(\{x\}) = 0.$$

Toisaalta myöhemmin todetaan, että $m_n^*(\mathbb{R}^n) = +\infty$. RR (= "ristiriita") eli (1.17) ei päde!

1.18 (Lebesgue-)mitalliset joukot

Määrittelemme $\mathbb{R}^n$:n (Lebesgue-)mitalliset joukot, $\mathrm{Leb}\,\mathbb{R}^n$, ns. *Carathéodoryn ehdon* avulla.

Subadditiivisuus (Lause 1.6 (3)): $A, B \subset \mathbb{R}^n \quad \Rightarrow$

$$m^*(A\cup B) \le m^*(A) + m^*(B).$$

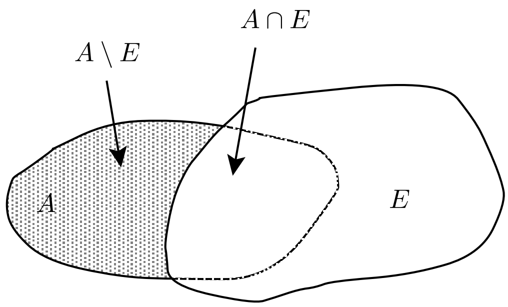
Lisäksi (todistetaan myöhemmin): $\exists\, A, B \subset \mathbb{R}^n$ s.e. $A \cap B = \emptyset$, mutta

$$m^*(A\cup B) < m^*(A) + m^*(B)$$

eli m^* ei ole täysadditiivinen. Jälkimmäisestä tapauksesta halutaan eroon (hylkäämällä osa osajoukoista):

Olkoon $E \subset \mathbb{R}^n$ annettu joukko ja $A \subset \mathbb{R}^n$ "testijoukko"

$$A = (A\cap E) \cup (A \setminus E) \quad \text{pistevieras yhdiste}$$
$$m^* \ \text{subadditiivinen} \ \Rightarrow \ m^*(A) \le m^*(A\cap E) + m^*(A\setminus E).$$



Määritelmä 1.19. (Carathéodoryn ehto, v. 1914.) Joukko $E \subset \mathbb{R}^n$ on *(Lebesgue-)mitallinen*, jos

$$m^*(A) = m^*(A\cap E) + m^*(\underbrace{A\setminus E}_{=A\cap E^c}) \quad \underline{\text{kaikilla}} \quad A \subset \mathbb{R}^n.$$

Huomautus 1.20. $E \subset \mathbb{R}^n$ mitallinen $\iff$

$$m^*(A) \geq m^*(A \cap E) + m^*(A \setminus E) \quad \text{kaikilla } A \subset \mathbb{R}^n, \text{ joilla } m^*(A) < \infty.$$

Syy: $\boxed{\leq}$ seuraa subadditiivisuudesta, ja $\boxed{\geq}$ pätee aina, jos $m^*(A) = +\infty$.

Määritelmä 1.21. Jos $E \subset \mathbb{R}^n$ on mitallinen, niin merkitään

$$m(E) = m^*(E) \quad \text{tarvittaessa } m_n(E).$$

$m(E)$ on E:n *(n-ulotteinen Lebesgue-) mitta.*

Merkitään

$$\operatorname{Leb} \mathbb{R}^n = \{E \subset \mathbb{R}^n \colon E \text{ Lebesgue-mitallinen}\} \quad \subset \mathcal{P}(\mathbb{R}^n).$$

Siis

$$m = m^* | \operatorname{Leb} \mathbb{R}^n \colon \operatorname{Leb} \mathbb{R}^n \to [0, \infty] \quad \text{ulkomitan rajoittuma.}$$

Myöhemmin näytetään, että

$$\operatorname{Leb} \mathbb{R}^n \subsetneq \mathcal{P}(\mathbb{R}^n).$$

Lause 1.22.

$$m^*(E) = 0 \quad \Rightarrow \quad E \textit{ mitallinen.}$$

Tod. Olkoon $A \subset \mathbb{R}^n$ testijoukko.

$$A \cap E \subset E \overset{\text{monot.}}{\Longrightarrow} m^*(A \cap E) = 0$$

$$A \supset A \setminus E \overset{\text{monot.}}{\Longrightarrow} m^*(A) \geq m^*(A \setminus E) = \underbrace{m^*(A \cap E)}_{=0} + m^*(A \setminus E)$$

$$\Rightarrow \quad E \text{ mitallinen.}$$

□

Lause 1.23.

$$E \quad \textit{mitallinen} \quad \iff \quad E^c \quad \textit{mitallinen.}$$

Tod. Riittää osoittaa $\boxed{\Rightarrow}$: Olkoon E mitallinen ja $A \subset \mathbb{R}^n$. Silloin

$$\begin{aligned} m^*(A) &= m^*(A \cap E) + m^*(A \cap E^c) \\ &= m^*\big(A \cap (E^c)^c\big) + m^*(A \cap E^c) \\ &\Rightarrow \quad E^c \quad \text{mitallinen.} \end{aligned}$$

□

Esimerkki 1.24.

$$E \subset \mathbb{R}^n \quad \text{numeroituva} \overset{\text{Esim. 3}}{\Longrightarrow} m^*(E) = 0$$

$$\overset{\text{L. 1.22}}{\Longrightarrow} E \quad \text{mitallinen} \overset{\text{L. 1.23}}{\Longrightarrow} E^c \quad \text{mitallinen.}$$

Erikoistapaukset:

$$\emptyset \in \operatorname{Leb} \mathbb{R}, \quad \mathbb{R} \in \operatorname{Leb} \mathbb{R},$$

$$\text{rationaaliluvut } \mathbb{Q} \in \operatorname{Leb} \mathbb{R}, \text{ irrationaaliluvut } \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \in \operatorname{Leb} \mathbb{R}.$$

Olkoot $E_1,\ E_2,\dots$ mitallisia. Osoitamme, että

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i \quad \text{ja} \quad \bigcap_{i=1}^{\infty} E_i \quad \text{ovat mitallisia.}$$

Tätä varten tarvitaan lemmoja. Ensin äärellinen tapaus.

Lemma 1.25. *$E_1,\dots,E_k$ mitallisia $\Rightarrow$ $\bigcup_{i=1}^{k} E_i$ ja $\bigcap_{i=1}^{k} E_i$ mitallisia.*

Tod. $\boxed{\text{(a) yhdiste:}}$

$$\bigcup_{i=1}^{k} E_i = \left(\bigcup_{i=1}^{k-1} E_i\right) \cup E_k$$

$\Rightarrow$ voi olettaa $k = 2$.

Siis olkoot $E_1,\ E_2$ mitallisia. Olkoon $A \subset \mathbb{R}^n$ testijoukko.

$$\left.\begin{array}{c} E_1 \quad \text{mitallinen} \quad \Rightarrow \\ m^*(A) = m^*(A\cap E_1) + m^*(A\cap E_1^c) \\ \\ E_2 \quad \text{mitallinen, testijoukkona } A\cap E_1^c \quad \Rightarrow \\ m^*(A\cap E_1^c) = m^*(A\cap E_1^c\cap E_2) + m^*(A\cap E_1^c\cap E_2^c) \end{array}\right\} \Longrightarrow$$

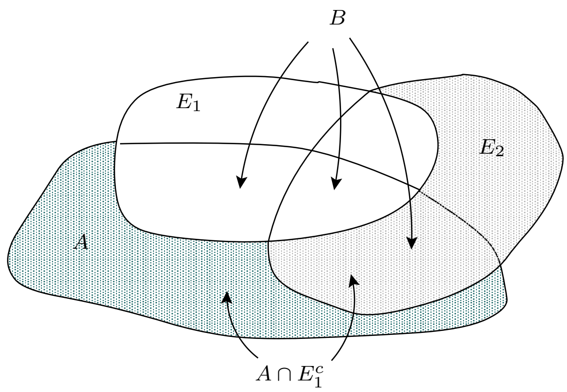
$$m^*(A) = \underbrace{m^*(A\cap E_1) + m^*(A\cap E_1^c\cap E_2)}_{(\text{subadd.}\ \Rightarrow)\ \geq\ m^*(B)} + m^*(A\cap E_1^c\cap E_2^c),$$

missä

$$\begin{aligned} B &= (A\cap E_1)\cup(A\cap E_1^c\cap E_2) = A\cap\big(E_1\cup(E_1^c\cap E_2)\big) = A\cap\big(E_1\cup(E_2\setminus E_1)\big) \\ &= A\cap(E_1\cup E_2). \end{aligned}$$

Siten

$$\begin{aligned} m^*(A) &\geq m^*(B) + m^*(A\cap E_1^c\cap E_2^c) \\ &= m^*\big(A\cap(E_1\cup E_2)\big) + m^*\big(A\cap(E_1\cup E_2)^c\big) \\ &\Rightarrow \quad E_1\cup E_2 \quad \text{mitallinen.} \end{aligned}$$



$\boxed{\text{(b) leikkaus:}}$ de Morgan, Lause 1.23 ("komplementin mitallisuus") ja (a)-osa $\Rightarrow$

$$\bigcap_{i=1}^{k} E_i = \Big(\bigcup_{i=1}^{k} E_i^c\Big)^c \quad \text{mitallinen.}$$

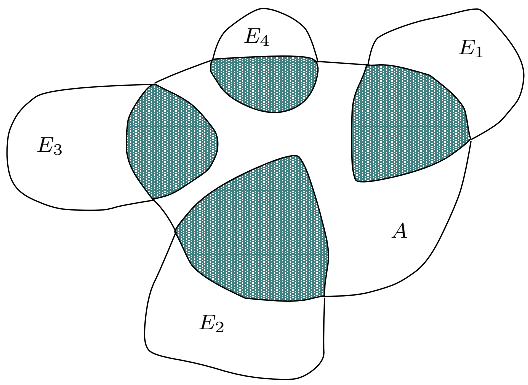
$\square$

Lause 1.26. *$E_1,\ E_2$ mitallisia $\Rightarrow$ $E_1 \setminus E_2$ mitallinen.*

Tod. $E_1 \setminus E_2 = E_1 \cap E_2^c$. $\square$

Lemma 1.27. *Olkoot $E_1, \dots, E_k$ erillisiä ja mitallisia ja $A \subset \mathbb{R}^n$ mielivaltainen. Tällöin*

$$m^*\big(A \cap (\bigcup_{i=1}^{k} E_i)\big) = \sum_{i=1}^{k} m^*(A \cap E_i).$$



Tod. $\boxed{\text{(a) Tapaus } k = 2 :}$ E_1 mitallinen, testijoukkona $A \cap (E_1 \cup E_2) = B$ $\Rightarrow$

$$m^*(B) = m^*(\underbrace{B \cap E_1}_{=A\cap E_1}) + m^*(\underbrace{B \setminus E_1}_{=A\cap E_2})$$

$$= m^*(A \cap E_1) + m^*(A \cap E_2) \quad \text{eli väite.}$$

$\boxed{\text{(b) yleinen tapaus:}}$ Induktiolla: Oletetaan, että väite pätee, kun $2 \le k \le p$, eli

$$\left.\begin{array}{c} E_1, \dots, E_p \text{ mitallisia} \\ E_i \cap E_j = \emptyset,\ i \neq j \\ A \subset \mathbb{R}^n \end{array}\right\} \Rightarrow m^*\big(A \cap (\bigcup_{i=1}^{p} E_i)\big) = \sum_{i=1}^{p} m^*(A \cap E_i).$$

Tällöin saadaan

$$\left.\begin{array}{c} A \cap \left(\bigcup_{i=1}^{p+1} E_i\right) = A \cap \left(\left(\bigcup_{i=1}^{p} E_i\right) \cup E_{p+1}\right) \\ \bigcup_{i=1}^{p} E_i,\ E_{p+1} \quad \text{erillisiä ja mitallisia} \end{array}\right\} \implies$$

$$\begin{aligned} m^*\big(A \cap (\bigcup_{i=1}^{p+1} E_i)\big) &\overset{k=2}{=} m^*\big(A \cap (\bigcup_{i=1}^{p} E_i)\big) + m^*(A \cap E_{p+1}) \\ &\overset{k=p}{=} \sum_{i=1}^{p} m^*(A \cap E_i) + m^*(A \cap E_{p+1}) \\ &= \sum_{i=1}^{p+1} m^*(A \cap E_i). \end{aligned}$$

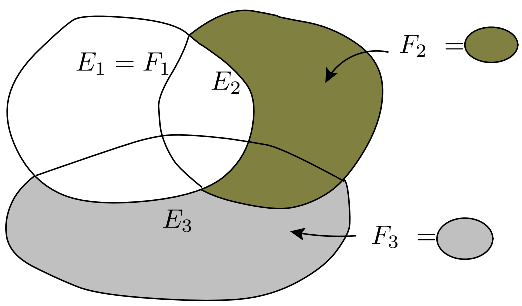
□

Lemma 1.28. *Olkoon $E = \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i$, missä E_i:t mitallisia. Tällöin on olemassa* erilliset *ja mitalliset $F_i \subset E_i$ s.e.*

$$E = \bigcup_{i=1}^{\infty} F_i.$$

Tod. Valitaan

$$\begin{aligned} &F_1 = E_1, \qquad [\text{mitallinen}] \\ &F_2 = E_2 \setminus E_1, \qquad [\text{mitallinen (L. 1.26)}] \\ &\quad\vdots \\ &F_k = E_k \setminus \bigcup_{i=1}^{k-1} E_i, \qquad [\text{mitallinen (L. 1.26 ja 1.25)}] \\ &\quad\vdots \end{aligned}$$



Tällöin (selvästi)

$$F_i \subset E_i \quad \forall\ i, \quad E = \bigcup_{i=1}^{\infty} F_i \quad \text{ja} \quad F_i \cap F_j = \emptyset\ \forall\ i \neq j.$$

□

Lebesgue-mitallisten joukkojen peruslause

Lause 1.29. *Olkoon $E_1, E_2, \dots$ jono (mahdollisesti äärellinen) mitallisia joukkoja. Tällöin joukot*

$$\bigcup_i E_i \quad \textit{ja} \quad \bigcap_i E_i$$

ovat mitallisia. Jos lisäksi E_i:t erillisiä, niin

$$m\big(\bigcup_i E_i\big) = \sum_i m(E_i). \qquad (\textit{"täysadditiivisuus"}) \tag{1.30}$$

Tod. Merkitään

$$\begin{aligned} S &= \bigcup_i E_i \overset{1.28}{=} \bigcup_i F_i, \quad F_i\text{:t mitallisia ja erillisiä,} \\ S_k &= \bigcup_i^k F_i, \quad S_k \subset S. \end{aligned}$$

L. 1.25 (äärellinen yhdiste mitallinen) $\Rightarrow$ S_k mitallinen. Olkoon A testijoukko. Silloin

$$\begin{aligned} m^*(A) &= m^*(A \cap S_k) + m^*(A \setminus S_k) \\ &\overset{\text{monot.}}{\geq} m^*(A \cap S_k) + m^*(A \setminus S) \\ &\overset{1.27}{=} \sum_{i=1}^k m^*(A \cap F_i) + m^*(A \setminus S) \quad \forall k \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Antamalla $k \to \infty$ saadaan

$$\begin{aligned} m^*(A) &\geq \sum_{i=1}^\infty m^*(A \cap F_i) + m^*(A \setminus S) \\ &\overset{\text{subadd.}}{\geq} m^*\big(\cup_{i=1}^\infty (A \cap F_i)\big) + m^*(A \setminus S) \\ &= m^*(A \cap S) + m^*(A \setminus S) \\ &\Rightarrow S = \bigcup_i E_i \ \text{ mitallinen.} \end{aligned} \tag{1.31}$$

Epäyhtälö (1.31), kun $A = S$, ja subadditiivisuus $\Rightarrow$

$$\sum_i^\infty m(F_i) \overset{\text{subadd.}}{\geq} m(S) \overset{(1.31)}{\geq} \sum_{i=1}^\infty m^*(\overbrace{S \cap F_i}^{=F_i}) + \overbrace{m^*(S \setminus S)}^{=0} = \sum_{i=1}^\infty m(F_i).$$

Jos E_i:t ovat erillisiä, niin voidaan valita $F_i = E_i$, joten (1.30) pätee.
Alkuosan ja L. 1.23 perusteella $\bigcap_i E_i = \big(\bigcup_i E_i^c\big)^c$ on mitallinen. □

Esimerkki 1.32. Olkoon $A \subset \mathbb{R}^2$ s.e.

$$m^*\big(A \cap B(x,r)\big) \leq |x| r^3 \quad \forall x \in \mathbb{R}^2, \ \forall r > 0. \tag{1.33}$$

<u>Väite:</u> $m(A) = 0$

Tod. (a) Olkoon A rajoitettu, jolloin $A \subset Q = [-a,a]\times[-a,a]$ (suljettu neliö) jollakin a. Olkoon $n \in \mathbb{N}$. Jaetaan Q suljettuihin osaneliöihin Q_j, joiden sivun pituus $= 2a/n$, ja lukumäärä $= n^2$. Olkoon $x_j =$ Q_j:n keskipiste. Silloin:

$$|x_j| \le 2a \quad \text{ja} \quad Q_j \subset B(x_j, 2a/n) \qquad \text{(karkeita arvioita)}$$

$$\Rightarrow\ m^*(A\cap Q_j) \overset{\text{monot.}}{\le} m^*\big(A \cap B(x_j, 2a/n)\big) \overset{(1.33)}{\le} |x_j|(2a/n)^3 \le (2a)^4 n^{-3}.$$

$$A = \bigcup_{j=1}^{n^2}(A\cap Q_j) \overset{\text{subadd.}}{\Longrightarrow}$$

$$m^*(A) = m^*\Big(\bigcup_{j=1}^{n^2}(A\cap Q_j)\Big) \le \sum_{j=1}^{n^2} m^*(A\cap Q_j)$$

$$\le n^2(2a)^4 n^{-3} = (2a)^4 n^{-1} \quad \forall\, n$$

$$\overset{n\to\infty}{\Longrightarrow}\ m^*(A) = 0\ \Rightarrow\ m(A) = 0.$$

(b) Yleinen tapaus.

$$A = \bigcup_{j\in\mathbb{N}} A_j,\ \text{missä } A_j = A \cap B(0,j) \text{ rajoitettu.}$$

$$A_j \subset A\ \Rightarrow\ A_j\text{:lle pätee sama ehto (1.33)} \overset{(a)}{\Rightarrow} m(A_j) = 0\ \forall j$$

$$\overset{\text{subadd.}}{\Longrightarrow}\ m(A) = 0.$$

1.34 Esimerkkejä mitallisista joukoista

Ainoat esimerkit tähän mennessä:

$$m^*(A) = 0 \quad \Rightarrow\ A \text{ ja } A^c \text{ mitallisia}$$

Tässä luvussa osoitamme, että mm. avoimet ja suljetut joukot ovat mitallisia. Ensin:

$$I \subset \mathbb{R}^n \quad n\text{-väli (avoin, suljettu, jne.)} \quad \Rightarrow \quad I \text{ on mitallinen ja } m(I) = \ell(I).$$

Apuna (Riemann-)integraali (Diff II):

Olkoon $I = I_1 \times \cdots \times I_n \subset \mathbb{R}^n$ n-väli, missä $I_j \subset \mathbb{R}$ on väli päätepisteinä $a_j < b_j,\ j = 1,\dots,n$. Olkoon $\chi_I\colon \mathbb{R}^n \to \{0,1\}$ (I:n karakteristinen funktio)

$$\chi_I(x) = \begin{cases} 1, & x \in I \\ 0, & x \notin I\,. \end{cases}$$

Valitaan n-väli $Q \supset I$ ja (Riemann-)integroidaan

$$\int_Q \chi_I = \int_{a_1}^{b_1}\cdots\int_{a_n}^{b_n} 1\, dx_1\cdots dx_n = (b_1-a_1)\cdots(b_n-a_n) = \ell(I).$$

Lemma 1.35. *Olkoot I ja $I_1,\dots,I_k$ n-välejä s.e. $I \subset \bigcup_{j=1}^k I_j$. Silloin $\ell(I) \le \sum_{j=1}^k \ell(I_j)$. Jos lisäksi leikkauksilla $I_i \cap I_j$, $i \ne j$, ei ole sisäpisteitä (ts. mikään $I_i\cap I_j$, $i\ne j$, ei sisällä avointa kuulaa) ja $I = \bigcup_{j=1}^k I_j$, niin $\ell(I) = \sum_{j=1}^k \ell(I_j)$.*

Tod. Määritellään $\chi, \chi_j \colon \mathbb{R}^n \to \{0,1\}$,

$$\chi(x) = \begin{cases} 1, & x \in I \\ 0, & x \notin I \end{cases} \qquad \text{ja} \qquad \chi_j(x) = \begin{cases} 1, & x \in I_j \\ 0, & x \notin I_j. \end{cases}$$

Silloin oletuksesta $I \subset \bigcup_{j=1}^k I_j$ seuraa, että $\chi(x) \le \sum_{j=1}^k \chi_j(x)\ \forall\ x \in \mathbb{R}^n$. Valitaan n-väli Q, joka sisältää kaikki yo. n-välit ja integroidaan yli Q:n

$$\ell(I) = \int_Q \chi \le \int_Q \big(\sum_j \chi_j\big) = \sum_j \int_Q \chi_j = \sum_j \ell(I_j).$$

Jos väleillä I_j ei ole yhteisiä sisäpisteitä, niin $\chi(x) = \sum_{j=1}^k \chi_j(x)$ paitsi mahdollisesti välien reunoilla, jotka eivät vaikuta integrointiin. □

Huomautus 1.36. Voidaan todistaa myös ilman integrointia jakamalla kaikki ao. n-välit (tarpeeksi tiheästi) osaväleihin niin, että jokainen I:n osaväli on vähintään yhden I_j:n osaväli. (Voidaan olettaa, että kaikki alkuperäiset n-välit ja uudet osavälit ovat suljettuja.)

Lemma 1.37. *Jos I on n-väli, niin*

$$m^*(I) = \ell(I).$$

Tod. (a): $\forall \varepsilon > 0\ \exists$ avoin n-väli $J \supset I$ s.e. $\ell(J) < \ell(I) + \varepsilon$.

$$\begin{aligned} \{J\} \quad I\text{:n Leb. peite} &\Rightarrow m^*(I) \le \ell(I) + \varepsilon \\ \varepsilon > 0 \text{ mieliv.} &\Rightarrow m^*(I) \le \ell(I). \end{aligned}$$

(b): Oletetaan ensin, että I on suljettu. Olkoon $\mathcal{F}$ I:n Lebesguen peite. I suljettu ja rajoitettu $\Rightarrow$ I kompakti $\Rightarrow$ $\exists$ äärellinen alipeite $\mathcal{F}_0 = \{I_1, \ldots, I_k\} \subset \mathcal{F}$. Lemma 1.35 $\Rightarrow$

$$\begin{aligned} \ell(I) &\le S(\mathcal{F}_0) \le S(\mathcal{F}) \\ \inf \text{ yli } \forall \mathcal{F} &\Rightarrow \ell(I) \le m^*(I). \end{aligned}$$

<u>Siis:</u> $\ell(I) = m^*(I)$, jos I on suljettu. Oletetaan sitten, ettei I ole (välttämättä) suljettu. Olkoon $\varepsilon > 0$. Nyt $\exists$ suljettu n-väli $I_c \subset I$ s.e. $\ell(I_c) > \ell(I) - \varepsilon$. Siten

$$\begin{aligned} m^*(I) &\overset{\text{monot.}}{\ge} m^*(I_c) = \ell(I_c) > \ell(I) - \varepsilon \\ \varepsilon > 0 \text{ mieliv.} &\Rightarrow m^*(I) \ge \ell(I). \end{aligned}$$

□

Huomautus 1.38. Yo. pätee myös *surkastuneille* n-väleille $I = I_1 \times \cdots \times I_n \subset \mathbb{R}^n$, jolloin (ainakin) jokin I_j on yksiö. Tällöin $\ell(I) \overset{\text{määr.}}{=} 0 = m_n^*(I)$.

Olkoot $A \subset \mathbb{R}^n$, $\varepsilon > 0$ ja $J_1, J_2, \ldots \subset \mathbb{R}^n$ mielivaltaisia n-välejä s.e. $A \subset \bigcup_{i=1}^\infty J_i$. Jokaisella $i\ \exists$ *avoin* n-väli $I_i \supset J_i$ s.e. $\ell(I_i) < \ell(J_i) + \varepsilon/2^i$. Nyt $\{I_1, I_2 \ldots\}$ on A:n Lebesguen peite, joten $m^*(A) \le \sum_{i=1}^\infty \ell(I_i) \le \sum_{i=1}^\infty \ell(J_i) + \varepsilon$. (Muista geometrinen sarja.) Tästä seuraa, että

$$m^*(A) = \inf\Big\{\sum_{i=1}^\infty \ell(J_i) \colon A \subset \bigcup_{i=1}^\infty J_i,\ J_i \text{ mielivaltainen } n\text{-väli}\Big\}.$$

Lause 1.39. *Jos I on n-väli, niin I on mitallinen ja*

$$m(I) = \ell(I).$$

Tod. L. 1.37 $\Rightarrow$ riittää osoittaa, että I on mitallinen. Olkoon $A \subset \mathbb{R}^n$ testijoukko. Väite:

$$m^*(A) \geq m^*(A \cap I) + m^*(A \setminus I).$$

Olkoon $\varepsilon > 0$. Silloin $\exists$ A:n Lebesguen peite (avoimia n-välejä) $\mathcal{F} = \{I_1, I_2, \ldots\}$ s.e.

$$S(\mathcal{F}) \leq m^*(A) + \varepsilon.$$

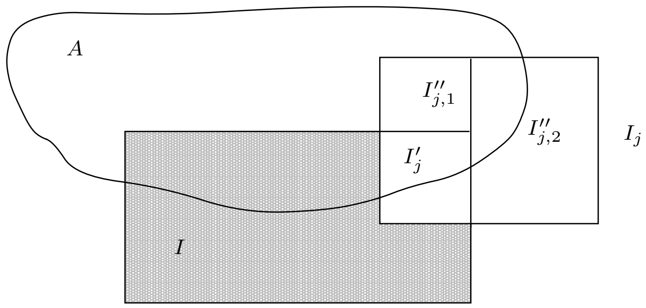
$$\left.\begin{aligned} I &= \Delta_1 \times \cdots \times \Delta_n \\ I_j &=]a_1, b_1[\times \cdots \times]a_n, b_n[\end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$$I_j \cap I = \big(]a_1, b_1[\cap \Delta_1\big) \times \cdots \times \big(]a_n, b_n[\cap \Delta_n\big) = \begin{cases} n\text{-väli } I'_j \\ \emptyset. \end{cases}$$

$I_j \setminus I$ ei ole välttämättä n-väli, mutta

$$I_j \setminus I = \bigcup_k I''_{j,k}$$

on äärellinen yhdiste n-välejä s.e. leikkauksilla $I'_j \cap I''_{j,k}$ ja $I''_{j,k} \cap I''_{j,i}$, $k \neq i$, ei ole sisäpisteitä.



Lemma 1.35 ja 1.37 $\Rightarrow$

$$\ell(I_j) \overset{1.35}{=} \ell(I'_j) + \sum_k \ell(I''_{j,k}) \overset{1.37}{=} m^*(I'_j) + \sum_k m^*(I''_{j,k}).$$

Summa yli j:n $\Rightarrow$

$$\begin{aligned} m^*(A) + \varepsilon \geq & S(\mathcal{F}) = \sum_j \ell(I_j) = \sum_j m^*(I'_j) + \sum_j \sum_k m^*(I''_{j,k}) \\ & \overset{\text{subadd.}}{\geq} m^*\Big(\underbrace{\bigcup_j I'_j}_{\supset A \cap I}\Big) + m^*\Big(\underbrace{\bigcup_{j,k} I''_{j,k}}_{\supset A \setminus I}\Big) \\ & \overset{\text{monot.}}{\geq} m^*(A \cap I) + m^*(A \setminus I). \end{aligned}$$

Annetaan $\varepsilon \to 0$ $\Rightarrow$ $m^*(A) \geq m^*(A \cap I) + m^*(A \setminus I)$. $\square$

Lause 1.40. *(Lindelöfin lause) Olkoon $A \subset \mathbb{R}^n$ mikä tahansa osajoukko ja*

$$\bigcup_{\alpha \in \mathcal{A}} V_\alpha \supset A$$

peite avoimilla joukoilla $V_\alpha \subset \mathbb{R}^n$, $\alpha \in \mathcal{A}$. Silloin on olemassa numeroituva *alipeite*

$$\bigcup_{j \in \mathbb{N}} V_{\alpha_j} \supset A.$$

Tod. HT □

Lause 1.41. *$\mathbb{R}^n$:n avoimet ja suljetut joukot ovat mitallisia.*

Tod. (a) Olkoon A avoin. Jos $x \in A$, $\exists$ avoin n-väli $I(x)$ s.e $x \in I(x) \subset A$ ($\exists$ avoin kuula $B(x, r_x) \subset A$ ja sen sisällä avoin n-väli).

$$\{I(x) \colon x \in A\} \quad \text{on } A\text{:n avoin peite.}$$

Lindelöf $\Rightarrow$ $\exists$ numeroituva alipeite $\{I(x_j) \colon j \in \mathbb{N}\}$

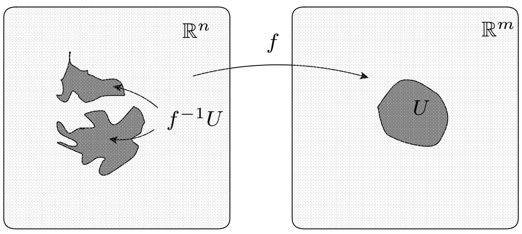
$$\begin{aligned} &\Rightarrow A = \bigcup_{j \in \mathbb{N}} I(x_j) \quad \text{on numeroituva yhdiste mitallisista joukoista} \\ &\Rightarrow A \quad \text{on mitallinen.} \end{aligned}$$

(b) Jos A suljettu, niin A^c avoin ja siten mitallinen $\Rightarrow$ $A = (A^c)^c$ mitallinen. □

Esimerkki 1.42. Olkoon $f \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ jatkuva. <u>Väite:</u> $f\mathbb{R}^2$ on mitallinen.
<u>Tod.</u>

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^2 = \bigcup_{j \in \mathbb{N}} A_j, &\quad \text{missä } A_j = \bar{B}(0, j) \text{ on kompakti} \\ f \ \text{ jatkuva } &\Rightarrow fA_j \ \text{ kompakti} \\ \Rightarrow fA_j \ \text{ suljettu } &\Rightarrow fA_j \ \text{ mitallinen} \\ f\mathbb{R}^2 = \bigcup_{j \in \mathbb{N}} fA_j &\Rightarrow f\mathbb{R}^2 \ \text{ mitallinen.} \end{aligned}$$

Muistutus: Olkoot $n, m \geq 1$. Kuvaus $f \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ on jatkuva $\iff$ $f^{-1}U \subset \mathbb{R}^n$ on avoin $\forall\ U \subset \mathbb{R}^m$ avoin.



Jos $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ jatkuva ja $C \subset \mathbb{R}^n$ kompakti, niin $fC \subset \mathbb{R}^m$ kompakti. Perustelu:

$$fC \subset \bigcup_{i\in I} U_i \quad \text{avoin peite}$$

$$\left.\begin{aligned} \Rightarrow\ C \subset \textstyle\bigcup_{i\in I} f^{-1}U_i \quad &\text{avoin peite} \\ C \quad &\text{kompakti} \end{aligned}\right\} \Rightarrow\ \exists \text{ äärellinen alipeite}$$

$$C \subset \bigcup_{j=1}^{k} f^{-1}U_{i_j} \ \Rightarrow\ fC \subset \bigcup_{j=1}^{k} U_{i_j}.$$

Yleisempiä mitallisia joukkoja, σ-algebrat.

$$\begin{aligned}
&\mathcal{F}_\sigma\text{-joukot} \ \bigcup_{i\in\mathbb{N}} F_i, \quad F_i \text{ suljettu} \quad (\text{esim. } \mathbb{Q},\ [a,b),\ (a,b]) \\
&\mathcal{G}_\delta\text{-joukot} \ \bigcap_{i\in\mathbb{N}} G_i, \quad G_i \text{ avoin} \quad (\text{esim. } \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q},\ [a,b),\ (a,b]) \\
&\mathcal{F}_{\sigma\delta}\text{-joukot} \ \bigcap_{i\in\mathbb{N}} A_j,\ A_j \in \mathcal{F}_\sigma \\
&\mathcal{G}_{\delta\sigma}\text{-joukot} \ \bigcup_{i\in\mathbb{N}} B_j,\ B_j \in \mathcal{G}_\delta
\end{aligned}$$

jne.

Määritelmä 1.43. Olkoon X mikä tahansa joukko. Perhe $\Gamma \subset \mathcal{P}(X)$ on X:n *σ-algebra* ("sigma-algebra"), jos

(a) $\emptyset \in \Gamma$;

(b) $A \in \Gamma \ \Rightarrow\ X \setminus A \in \Gamma$;

(c) $A_i \in \Gamma,\ i \in \mathbb{N} \ \Rightarrow\ \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \Gamma$.

Huomautus 1.44. (1) Jos Γ on σ-algebra ja $A_i \in \Gamma,\ i \in \mathbb{N}$, niin myös $\bigcap_i A_i \in \Gamma$, sillä

$$\bigcap_i A_i = \bigcap_i \big(A_i^c\big)^c = \big(\bigcup_{i=1} A_i^c\big)^c \in \Gamma.$$

(2) Olemme todistaneet: Lebesgue-mitallisten joukkojen perhe $\operatorname{Leb}\mathbb{R}^n$ on $\mathbb{R}^n$:n σ-algebra (Lauseet 1.22, 1.23, 1.29).

(3) $\mathcal{P}(X)$ on suurin X:n σ-algebra; $\{\emptyset, X\}$ on pienin X:n σ-algebra; $A \subset X$ (kiinnitetty) $\Rightarrow$ $\{\emptyset, X, A, A^c\}$ on X:n σ-algebra.

Määritelmä 1.45. *Borel-joukkojen perhe* $\operatorname{Bor}\mathbb{R}^n$ on pienin $\mathbb{R}^n$:n σ-algebra, joka sisältää suljetut joukot.

Olemassaolo: Merkitään

$$\boxed{\mathcal{B} = \bigcap\{\Gamma\colon \Gamma \text{ on } \mathbb{R}^n\text{:n } \sigma\text{-algebra},\ \Gamma \text{ sisältää suljetut joukot}\}.}$$

(Esim. $\Gamma = \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ on eräs $\mathbb{R}^n$:n σ-algebra, joka sisältää suljetut joukot.)
$\mathcal{B}$ on σ-algebra, sillä

(a) $\emptyset \in \mathcal{B}$;

(b) $A \in \mathcal{B} \;\Rightarrow\; A^c \in \Gamma \;\forall\Gamma \;\Rightarrow\; A^c \in \mathcal{B}$;

(c) $A_i \in \mathcal{B} \;\Rightarrow\; \bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i \in \Gamma \;\forall\Gamma \;\Rightarrow\; \bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i \in \mathcal{B}$.

Konstruktio $\Rightarrow$ $\mathcal{B}$ on pienin $\mathbb{R}^n$:n σ-algebra, joka sisältää suljetut joukot, joten

$$\boxed{\operatorname{Bor}\mathbb{R}^n = \mathcal{B}\,.}$$

Avoimet, suljetut, $\mathcal{F}_\sigma$, $\mathcal{G}_\delta$, jne. joukot ovat Borel-joukkoja.

Lause 1.46. *Jokainen Borel-joukko on mitallinen.*

Tod. Mitallisten joukkojen perhe $\operatorname{Leb}\mathbb{R}^n$ on σ-algebra ja sisältää suljetut joukot, joten

$$\operatorname{Bor}\mathbb{R}^n \subset \operatorname{Leb}\mathbb{R}^n.$$

□

1.47 Yleistä mittateoriaa. Hausdorff-mitta

Määritelmä 1.48. Olkoon Γ X:n σ-algebra. Funktio $\mu\colon \Gamma \to [0,+\infty]$ on *mitta* X:ssä, jos

(i) $\mu(\emptyset) = 0$;

(ii) $A_i \in \Gamma,\; i \in \mathbb{N}$, erillisiä $\Rightarrow$ $\mu\big(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\big) = \sum_{i\in\mathbb{N}} \mu(A_i)$. ”täysadditiivisuus”

Kolmikko (X, Γ, μ) on *mitta-avaruus*.

Huomautus 1.49. 1. Mitta μ on myös *monotoninen*:

$$A, B \in \Gamma,\; A \subset B \;\Rightarrow\; 0 \le \mu(A) \le \mu(B).$$

Syy: A, $B \setminus A \in \Gamma$ erillisiä, $B = A \cup (B \setminus A)$

$$\Rightarrow\; \mu(B) = \mu(A) + \underbrace{\mu(B \setminus A)}_{\ge 0} \ge \mu(A).$$

2. $A, B \in \Gamma,\; A \subset B,\; \mu(A) < \infty \;\Rightarrow\; \mu(B \setminus A) = \mu(B) - \mu(A)$.

3. Mitta μ on *todennäköisyysmitta* (lyhyemmin tn-mitta), jos $\mu(X) = 1$.

Esimerkki 1.50. (1) n-ulotteinen Lebesgue-mitta

$$m_n\colon \operatorname{Leb}\mathbb{R}^n \to [0,+\infty]$$

on mitta (ei tn-mitta).
Syy: $\operatorname{Leb}\mathbb{R}^n$ on $\mathbb{R}^n$:n σ-algebra ja m on täysadditiivinen.

(2) Olkoon $X \neq \emptyset$ mielivaltainen joukko. Kiinnitetään $x \in X$ ja asetetaan kaikilla $A \subset X$

$$\mu(A) = \begin{cases} 1, & \text{jos } x \in A; \\ 0, & \text{jos } x \notin A. \end{cases}$$

Silloin $\mu\colon \mathcal{P}(X) \to [0, +\infty]$ on tn-mitta (ns. *Dirac mitta* alkiossa $x \in X$).
Syy: (a) $\mathcal{P}(X)$ on σ-algebra.
(b) Olkoot $A_j \subset X,\ j \in \mathbb{N}$, erillisiä (ts. $A_i \cap A_j = \emptyset,\ \forall i \neq j$). Silloin

$$\mu\Big(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j\Big) = \sum_{j=1}^{\infty} \mu(A_j),$$

sillä

$$\begin{cases} x \notin \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j \ \Rightarrow \ \text{molemmat puolet } = 0 \\ \\ x \in \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j \overset{\text{erill.}}{\Longrightarrow} \ \exists \text{ täsm. yksi } j_0 \in \mathbb{N} \text{ s.e. } x \in A_{j_0} \ \Rightarrow \ \text{molemmat puolet } = 1. \end{cases}$$

(3) $\mu\colon \mathcal{P}(X) \to [0, +\infty],\ \mu(A) = 0\ \forall A \subset X$, on mitta.

(4) Olkoot $a_j \geq 0,\ j \in \mathbb{N}$, s.e. $\sum_{j=1}^{\infty} a_j = 1$. Asetetaan kaikilla $A \subset \mathbb{N}$

$$\mu(A) = \sum_{j \in A} a_j.$$

Tällöin $\mu\colon \mathcal{P}(\mathbb{N}) \to [0, 1]$ on tn-mitta (HT).

Määritelmä 1.51. Olkoon X mikä tahansa joukko. Kuvaus $\mu^*\colon \mathcal{P}(X) \to [0, +\infty]$ on *ulkomitta* X:ssä, jos

(1) $\mu^*(\emptyset) = 0$;

(2) $A \subset B \ \Rightarrow \ \mu^*(A) \leq \mu^*(B)$;

(3) $A_j \subset X,\ j \in \mathbb{N} \ \Rightarrow \ \mu^*\big(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j\big) \leq \sum_{j=1}^{\infty} \mu^*(A_j)$.

Lisäksi joukko $E \subset X$ on (μ^*-)*mitallinen*, jos (Carathéodoryn ehto)

$$\mu^*(A) = \mu^*(A \cap E) + \mu^*(A \setminus E) \tag{1.52}$$

pätee $\forall A \subset X$.
Merkitään

$$\mathcal{M}_{\mu^*}(X) = \{E \subset X \colon E\ \mu^*\text{-mitallinen}\}$$

tai lyhyemmin $\mathcal{M}(X)$, jos μ^* on selvä asiayhteydestä.

Huomautus 1.53. $\mathcal{M}(X) \subset \mathcal{P}(X)$ on σ-algebra X:ssä ja rajoittuma

$$\mu^*|\mathcal{M}(X)\colon \mathcal{M}(X) \to [0, +\infty]$$

on mitta. Tod. kuten Lebesguen ulkomitan tapauksessa.

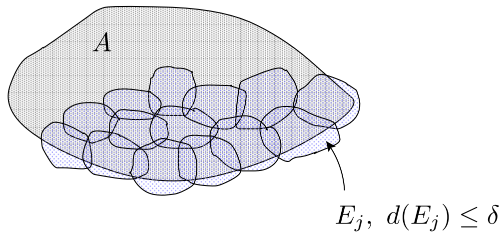
Hausdorffin mitta ja dimensio.
Joukon $A \subset \mathbb{R}^n$ halkaisija on

$$d(A) = \sup\{|x-y| \colon x, y \in A\}, \quad d(\emptyset) = 0.$$

Olkoon $0 \le s < \infty$ ja $\delta > 0$. Jos $A \subset \mathbb{R}^n$, niin asetetaan

$$\mathcal{H}^s_\delta(A) = \inf\Big\{\sum_{j=1}^\infty d(E_j)^s \colon A \subset \bigcup_{j=1}^\infty E_j,\ d(E_j) \le \delta\Big\},$$

missä tehdään sopimukset $d(\{x\})^0 = 1\ \forall x \in \mathbb{R}^n$ ja $d(\emptyset)^s = 0\ \forall s \ge 0$. (Yllä $E_j \subset \mathbb{R}^n$ on mikä tahansa osajoukko.)



Havaitaan: $0 \le \delta_1 \le \delta_2 \ \Rightarrow\ \mathcal{H}^s_{\delta_1}(A) \ge \mathcal{H}^s_{\delta_2}(A)$ (inf yli pienemmän joukon).

Määritelmä 1.54. Joukon $A \subset \mathbb{R}^n$ s-ulotteinen Hausdorffin (ulko-)mitta on

$$\mathcal{H}^s(A) = \lim_{\delta \to 0+} \mathcal{H}^s_\delta(A) = \sup_{\delta > 0} \mathcal{H}^s_\delta(A).$$

(Voi olla $\mathcal{H}^s(A) = \infty$.)

Lause 1.55. *Olkoon $0 \le s < \infty$. Silloin $\mathcal{H}^s$ on ulkomitta $\mathbb{R}^n$:ssä.*

Tod. HT □

$\mathcal{H}^s$-mitalliset joukot, $\mathcal{M}_{\mathcal{H}^s}(\mathbb{R}^n)$, määritellään Carathéodoryn ehdon (1.52) avulla.
Lisätieto:

$$\operatorname{Bor}\mathbb{R}^n \subset \mathcal{M}_{\mathcal{H}^s}(\mathbb{R}^n).$$

Lause 1.56. *Jokaista $A \subset \mathbb{R}^n$ kohti on olemassa 1-käsitteinen luku $s = s(A) \ge 0$, ns. A:n* Hausdorffin dimensio, *s.e.*

$$\mathcal{H}^{s+\varepsilon}(A) = 0 \quad \forall \varepsilon > 0,\ ja$$
$$\mathcal{H}^{s-\varepsilon}(A) = +\infty \quad \forall \varepsilon \in (0, s].$$

Tod. Väite 1:

$$s \ge 0 \ \text{ ja } \ \mathcal{H}^s(A) < \infty \ \Rightarrow \mathcal{H}^t(A) = 0\ \forall t > s.$$

Olkoon $\delta > 0$. $\Rightarrow$ $\exists$ peite $\bigcup_{j=1}^\infty E_j \supset A$ s.e. $d(E_j) \le \delta\ \forall j$ ja

$$\sum_{j=1}^\infty d(E_j)^s \le \mathcal{H}^s_\delta(A) + 1 \le \mathcal{H}^s(A) + 1 \overset{\text{olet.}}{<} \infty$$

$$\Rightarrow \mathcal{H}^t_\delta(A) \overset{\inf}{\le} \sum_{j=1}^\infty d(E_j)^t = \sum_{j=1}^\infty d(E_j)^s \underbrace{d(E_j)}_{\le\delta}{}^{t-s} \overset{t>s}{\le} \delta^{t-s} \sum_{j=1}^\infty d(E_j)^s$$
$$\le \delta^{t-s} \underbrace{\big(\mathcal{H}^s(A) + 1\big)}_{<\infty}$$

Annetaan $\delta \to 0 \;\Rightarrow\; \delta^{t-s} \to 0 \;\Rightarrow\; \mathcal{H}^t(A) = \lim_{\delta\to 0} \mathcal{H}^t_\delta(A) = 0$ eli Väite 1 todistettu. Asetetaan

$$s(A) = \inf\{t > 0 \colon \mathcal{H}^t(A) = 0\}.$$

Väite 1 $\Rightarrow$ $\mathcal{H}^{s(A)+\varepsilon}(A) = 0 \;\forall \varepsilon > 0$. Toisaalta Väite 1 $\Rightarrow$ <u>jos</u> $0 \le s < t < \infty$ ja $\mathcal{H}^t(A) > 0$, niin $\mathcal{H}^s(A) = +\infty$. □

Huomautus 1.57. (1) Hausdorff-mitta voidaan määritellä samalla tavalla missä tahansa metrisessä avaruudessa (X, d) (joukon $A \subset X$ halkaisija on $d(A) = \sup\{d(x, y) \colon x, y \in X\}$).

(2) $\mathcal{H}^0$ on lukumäärämitta, ts. $\mathcal{H}^0(A) = \operatorname{card} A = A$:n alkioiden lukumäärä.

(3) $\mathbb{R}^n$:ssä pätee: $\mathcal{H}^n = c\, m_n^*$, missä $c = c(n)$ on vakio. Siksi usein $\mathcal{H}^s$ normeerataan kertomalla se tietyllä s:stä riippuvalla vakiolla.

(4) $A \subset \mathbb{R}^n$ annettu $\Rightarrow$ Hausdorff-dimensio $s(A) \in [0, n]$ (<u>ei</u> tarvitse olla kokonaisluku). Vastaava mitan arvo $\mathcal{H}^{s(A)}(A)$ voi olla mikä tahansa luku $\in [0, +\infty]$.

(5) $\mathbb{R}^n$:ssä $\mathcal{H}^s$, $0 \le s \le n$, sopii hyvin mittaamaan "pieniä" joukkoja. Esim. 0-mittaisella joukolla A, $m_n(A) = 0$, voi olla $\mathcal{H}^s(A) > 0$, $0 \le s < n$. $\mathcal{H}^s(A)$ "näkee" A:n "hienorakennetta" ehtojen $d(E_j) \le \delta$, $\delta \to 0$ takia.

1.58 Mitan konvergenssi

Olkoon $X \ne \emptyset$, $\Gamma \subset \mathcal{P}(X)$ σ-algebra, ja $\mu \colon \Gamma \to [0, +\infty]$ mitta.

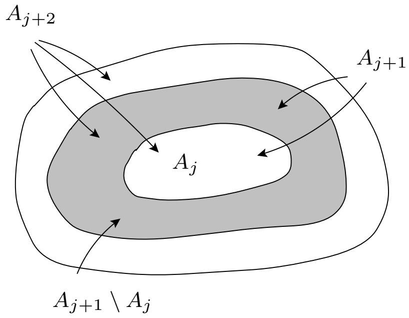
Lause 1.59. *Olkoon $A_j \in \Gamma$, $j = 1, \ldots,$ <u>kasvava</u> jono (ts. $A_1 \subset A_2 \subset \cdots \subset X$ (μ-)mitallisia). Tällöin*

$$\mu\Big(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j\Big) = \lim_{j\to\infty} \mu(A_j).$$

<u>Huom.:</u> $A_j \in \Gamma \;\forall j \in \mathbb{N} \;\Rightarrow\; \bigcup_{j=1}^\infty A_j \in \Gamma$.

Tod.

$$\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j = \bigcup_{j=1}^{\infty} \underbrace{(A_j \setminus A_{j-1})}_{\text{erill. mitall.}}, \quad A_0 = \emptyset \quad \text{(sopimus)}$$



Mitan täysadditiivisuus $\Rightarrow$

$$\begin{aligned}\mu\Big(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j\Big) &= \sum_{j=1}^{\infty} \mu(A_j \setminus A_{j-1}) \\ &= \lim_{k\to\infty} \sum_{j=1}^{k} \mu(A_j \setminus A_{j-1}) \\ &= \lim_{k\to\infty} \mu\underbrace{\Big(\bigcup_{j=1}^{k} (A_j \setminus A_{j-1})\Big)}_{=A_k} \\ &= \lim_{k\to\infty} \mu(A_k).\end{aligned}$$

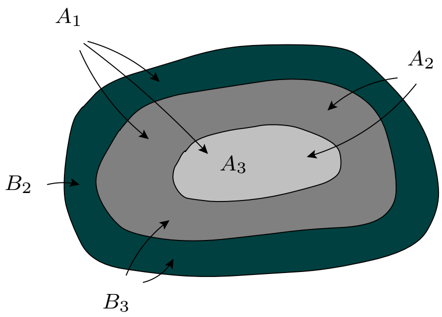
□

Lause 1.60. *Olkoon $A_j \in \Gamma$, $j = 1, \ldots,$ <u>vähenevä</u> jono (ts. $X \supset A_1 \supset A_2 \supset \cdots$ (μ-)mitallisia). Jos lisäksi $\mu(A_k) < \infty$ jollakin $k \in \mathbb{N}$, niin silloin*

$$\mu\Big(\bigcap_{j=1}^{\infty} A_j\Big) = \lim_{j\to\infty} \mu(A_j).$$

<u>Huom.:</u> Γ σ-alg. $\Rightarrow$ $\bigcap_{j=1}^{\infty} A_j \in \Gamma$.

Tod. Voidaan olettaa, että $\mu(A_1) < \infty$ (tarvittaessa indeksöidään joukot A_j uudelleen). Merkitään $\bigcap_{j=1}^{\infty} A_j = A$ ja $B_j = A_1 \setminus A_j$. Tällöin $B_1 \subset B_2 \subset \cdots$ ovat mitallisia.



$$\text{Lause 1.59} \quad \Rightarrow \mu\Big(\bigcup_{j=1}^{\infty} B_j\Big) = \lim_{j\to\infty} \mu(B_j).$$

$$\bigcup_{j=1}^{\infty} B_j = \bigcup_{j=1}^{\infty} (A_1 \setminus A_j) = A_1 \setminus \bigcap_{j=1}^{\infty} A_j = A_1 \setminus A$$

$$A_1 = A_j \cup \underbrace{(A_1 \setminus A_j)}_{=B_j} \quad \text{erillinen yhdiste} \;\Rightarrow\; \mu(A_1) = \mu(A_j) + \mu(B_j)$$

$$A_1 = A \cup (A_1 \setminus A) \quad \text{erillinen yhdiste} \;\Rightarrow\; \mu(A_1) = \mu(A) + \mu(A_1 \setminus A)$$

$$
\begin{aligned}
\Rightarrow\ \mu(A) &= \mu(A_1) - \mu(A_1 \setminus A) \quad (\text{tässä tarvitaan } \mu(A_1) < \infty)\\
&= \mu(A_1) - \mu\big(\bigcup_{j=1}^{\infty} B_j\big)\\
&= \mu(A_1) - \lim_{j\to\infty} \mu(B_j)\\
&= \mu(A_1) - \lim_{j\to\infty} \big(\mu(A_1) - \mu(A_j)\big)\\
&= \lim_{j\to\infty} \mu(A_j).
\end{aligned}
$$

□

Huomautus 1.61. Ehto $\mu(A_k) < \infty$ jollakin $k \in \mathbb{N}$ on välttämätön. Esim.

$$
\begin{gathered}
A_j = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon x > j\}\\
A_1 \supset A_2 \supset A_3 \supset \cdots\\
m_2(A_j) = \infty\ \forall j\\
\bigcap_{j\in\mathbb{N}} A_j = \emptyset \ \Rightarrow\ m_2\big(\bigcap_{j\in\mathbb{N}} A_j\big) = 0 \neq \lim_{j\to\infty} m_2(A_j).
\end{gathered}
$$

Huomautus 1.62. (Tn-teoriassa tärkeä sovellus) Borel-Cantelli lemma: Olkoon (X, Γ, μ) mitta-avaruus, $A_j \in \Gamma,\ j \in \mathbb{N}$, ja

$$A = \{x \in X \colon x \in A_j \text{ äärettömän monella indeksillä } j \in \mathbb{N}\}.$$

Tällöin:

$$\sum_{j=1}^{\infty} \mu(A_j) < \infty \ \Rightarrow \mu(A) = 0.$$

(HT)

1.63 Lebesguen mitan yhteys Jordan-mittaan

Lause 1.64. *$E \subset \mathbb{R}^n$ (Leb.-)mitallinen $\iff$ $\forall \varepsilon > 0\ \exists$ (Leb.-)mitallinen A ja B s.e. $A \subset E \subset B$ ja $m(B \setminus A) < \varepsilon$.*

Tod. HT 3/5 □

Määritelmä 1.65. (Diff II) $E \subset \mathbb{R}^n$ Jordan-mitallinen $\iff$ E rajoitettu ja χ_E Riemann-integroituva. Tällöin E:n Jordan-mitta on

$$m_J(E) = \int \chi_E.$$

Lause 1.66. *Jos $E \subset \mathbb{R}^n$ on Jordan-mitallinen, niin E on Lebesgue-mitallinen ja $m_J(E) = m(E)$.*

Tod. Oletetaan $n = 2$, yleinen n samoin. Valitaan suljettu suorakulmio $R \supset E$. Olkoon $D = \{R_j\}$ R:n jako äärellisen moneen suljettuun suorakulmioon R_j, joilla ei ole yhteisiä sisäpisteitä. Karakteristiseen funktioon χ_E liittyy yläsumma

$$M_D = \sum_j G_j \ell(R_j), \quad G_j = \begin{cases} 1, & R_j \cap E \neq \emptyset;\\ 0, & R_j \cap E = \emptyset. \end{cases}$$

Merkitään

$$B_D = \bigcup\{R_j \colon R_j \cap E \neq \emptyset\}, \quad \text{jolloin } B_D \text{ mitallinen ja}$$
$$M_D = \sum_{R_j \cap E \neq \emptyset} \ell(R_j) \overset{\text{L. 1.35}}{=} m(B_D).$$

Vastaava <u>alasumma</u> on

$$m_D = \sum_j g_j \ell(R_j), \quad g_j = \begin{cases} 1, & R_j \subset E; \\ 0, & R_j \not\subset E. \end{cases}$$

Merkitään

$$A_D = \bigcup\{R_j \colon R_j \subset E\}, \quad \text{jolloin } A_D \text{ on mitallinen ja}$$
$$m_D = m(A_D).$$

Olkoon $\varepsilon > 0$. E Jordan-mitallinen $\Rightarrow$ χ_E Riemann-integroituva $\Rightarrow$

$$\exists \text{ jako } D \text{ s.e. } M_D - m_D < \varepsilon$$
$$B_D = (B_D \setminus A_D) \cup A_D \text{ erillinen yhdiste}$$
$$\Rightarrow \; m(B_D \setminus A_D) = m(B_D) - m(A_D) = M_D - m_D < \varepsilon$$
$$A_D \subset E \subset B_D \overset{\text{L. 1.64}}{\Longrightarrow} E \text{ mitallinen.}$$

Lisäksi

$$m(A_D) \le m(E) \le m(B_D) \quad \text{ja}$$
$$m(A_D) = m_D \le m_J(E) \le M_D = m(B_D)$$
$$\Rightarrow \; -\varepsilon < m_D - M_D \le m(E) - m_J(E) \le M_D - m_D < \varepsilon$$
$$\text{t.s.} \quad |m(E) - m_J(E)| < \varepsilon$$
$$\Rightarrow \; m(E) = m_J(E).$$

□

Seuraus. Tunnetut (Riemann-integroimalla saadut) pinta-ala-/tilavuuskaavat ovat voimassa.
<u>Esim.</u> Merkitään $B^n(x,r) = \{y \in \mathbb{R}^n \colon |y - x| < r\} \subset \mathbb{R}^n$ (avoin kuula).

$$m_2\big(B^2(x,r)\big) = \pi r^2\,; \quad m_3\big(B^3(x,r)\big) = \frac{4}{3}\pi r^3.$$

<u>Lisätieto</u>: (ei todisteta) $E \subset \mathbb{R}^n$ Jordan-mitallinen $\iff$ E rajoitettu ja $m_n(\partial E) = 0$.

1.67 Ei-(Lebesgue-)mitallinen joukko $\mathbb{R}$:ssä

Lause 1.68. *(Vitali, 1905)*

$$\operatorname{Leb} \mathbb{R} \subsetneq \mathcal{P}(\mathbb{R})$$

eli $\exists$ $E \subset \mathbb{R}$, joka ei ole Lebesgue-mitallinen.

<u>Ideana</u> on löytää joukko $B \subset \mathbb{R}$, $0 < m^*(B) < \infty$, ja B:n ositus

$$B = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$$

erillisiin joukkoihin A_i s.e.

$$m^*(A_i) = m^*(A_1)\ \forall i.$$

Tällöin jonkun joukoista A_i on oltava ei-mitallinen. Yksi tapa varmistaa, että joukoilla A_i on sama ulkomitta, on pyrkiä valitsemaan

$$A_i = A + x_i$$

jollakin (kiinteällä) joukolla $A \subset \mathbb{R}$ ja $x_i \in \mathbb{R}$ ja käyttää ulkomitan siirtoinvarianssia.

Tod. Tarkastellaan tekijäryhmää $\mathbb{R}/\mathbb{Q}$, jonka alkiot ovat ekvivalenssiluokkia $E(x),\ x \in \mathbb{R}$.

$$E(x) = E(y) \iff x \sim y \iff x - y \in \mathbb{Q}.$$

Voidaan kirjoittaa $E(x) = x + \mathbb{Q}$. Valitaan jokaisesta ekvivalenssiluokasta $E(x),\ x \in \mathbb{R}$, täsmälleen yksi edustaja, joka kuuluu väliin $[0,1]$. Olkoon A näiden joukko.

<u>Väite</u>: $A \notin \operatorname{Leb}\mathbb{R}$.

<u>Vastaoletus</u>: $A \in \operatorname{Leb}\mathbb{R}$.

(i) Joukot $A + r,\ r \in \mathbb{Q}$, ovat erillisiä:

$$\begin{aligned} x \in (A+r) \cap (A+s),\ r,s \in \mathbb{Q} &\Rightarrow x = a_1 + r \text{ ja } x = a_2 + s, \quad a_1, a_2 \in A \\ &\Rightarrow a_1 - a_2 = s - r \in \mathbb{Q} \\ &\Rightarrow a_1 \sim a_2 \Rightarrow E(a_1) = E(a_2) \\ &\Rightarrow a_1 = a_2 \quad \text{(koska valittiin } \underline{\text{täsm.}} \text{ yksi alkio)} \\ &\Rightarrow s = r. \end{aligned}$$

(ii) $m(A) = 0$ (käytetään "siirtoinvarianssia": $A \in \operatorname{Leb}\mathbb{R} \Rightarrow A + a \in \operatorname{Leb}\mathbb{R}$ ja $m(A) = m(A+a)$):

$$\begin{aligned} A \subset [0,1] &\Rightarrow A + \frac{1}{n} \subset [0,2] \quad \forall n \in \mathbb{N} \\ &\Rightarrow 2 \geq m\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty}(A + \frac{1}{n})\Big) \overset{\text{erill.}}{=} \sum_{n=1}^{\infty} m(A + \frac{1}{n}) = \sum_{n=1}^{\infty} m(A) \\ &\Rightarrow m(A) = 0. \end{aligned}$$

(iii) $\mathbb{R} = \bigcup_{r\in\mathbb{Q}}(A + r)$:

$$\begin{aligned} x \in \mathbb{R} &\Rightarrow \exists a \in E(x) \cap A \Rightarrow x - a = r \in \mathbb{Q},\ a \in A \\ &\Rightarrow x = a + r, \quad a \in A \\ &\Rightarrow x \in A + r. \end{aligned}$$

(i), (ii) ja (iii) $\Rightarrow$

$$+\infty = m(\mathbb{R}) = \sum_{r\in\mathbb{Q}} m(A+r) = \sum_{r\in\mathbb{Q}} \underbrace{m(A)}_{=0} = 0. \ \underline{\text{RR}}$$

$\square$

Huomautus 1.69. 1. Myös $\mathbb{R}^n$:ssä, $\forall n \geq 1$, $\exists$ samantyyppinen esimerkki, joten

$$\operatorname{Leb}\mathbb{R}^n \subsetneq \mathcal{P}(\mathbb{R}^n).$$

2. Jos $A \subset \mathbb{R}$ on mikä tahansa joukko s.e. $m^*(A) > 0$, niin $\exists\ B \subset A$ s.e. $B \notin \operatorname{Leb} \mathbb{R}$. (HT)

Lisätieto: (Banach-Tarski paradoksi, 1924): Mikä tahansa $\mathbb{R}^3$:n suljettu kuula $\overline{B}$ voidaan osittaa äärellisen moneen (erilliseen) palaan A_j

$$\overline{B} = \bigcup_{j=1}^{m} A_j$$

(sopivalla $m \geq 2$) ja sitten järjestellä palat uudelleen kuvauksilla

$$g_j \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3,\ g_j(x) = y_j + T_j(x),$$

missä $y_j \in \mathbb{R}^3$ ja $T_j \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ on lineaarinen kierto ($j = 1, \dots, m$) niin, että syntyy kaksi $\overline{B}$:n kanssa samankokoista (s.o. sama säde) suljettua kuulaa. Lebesguen mitta siirto- ja kiertoinvariantti $\Rightarrow$ joukot $A_1, \dots, A_m$ eivät mitallisia.

2 Mitalliset kuvaukset

2.1 Mitallinen kuvaus

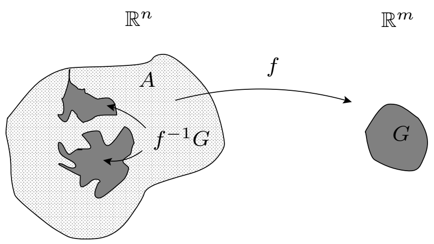
Merkitään $\dot{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty\} \cup \{+\infty\}$.

Määritelmä 2.2. Olkoon $A \subset \mathbb{R}^n$. Kuvaus $f \colon A \to \mathbb{R}^m$ on mitallinen (σ-algebran $\operatorname{Leb} \mathbb{R}^n$ suhteen), jos $f^{-1}G$ on (Lebesgue-)mitallinen kaikilla avoimilla $G \subset \mathbb{R}^m$. Kuvaus $f \colon A \to \dot{\mathbb{R}}$ on mitallinen, jos

(i) $f^{-1}G$ on mitallinen kaikilla avoimilla $G \subset \mathbb{R}^m$,

(ii) $f^{-1}(+\infty)$ on mitallinen ja

(iii) $f^{-1}(-\infty)$ on mitallinen.



Huomautus 2.3. 1. $f \colon A \to \mathbb{R}^m$ mitallinen $\Rightarrow$

$$A = f^{-1}\mathbb{R}^m \subset \mathbb{R}^n \quad \text{on mitallinen joukko.}$$

Samoin $f \colon A \to \dot{\mathbb{R}}$ mitallinen $\Rightarrow$

$$A = f^{-1}(\mathbb{R}) \cup f^{-1}(+\infty) \cup f^{-1}(+\infty) \subset \mathbb{R}^n \quad \text{on mitallinen joukko.}$$

2. $f \colon A \to \mathbb{R}^m$ mitallinen, $B \subset A$ mitallinen $\Rightarrow$ $f|B \colon B \to \mathbb{R}^m$ mitallinen.
Syy: $G \subset \mathbb{R}^m$ avoin $\Rightarrow$

$$(f|B)^{-1}(G) = \underbrace{B}_{\text{mitallinen}} \cap \underbrace{f^{-1}G}_{\text{mitallinen}}$$

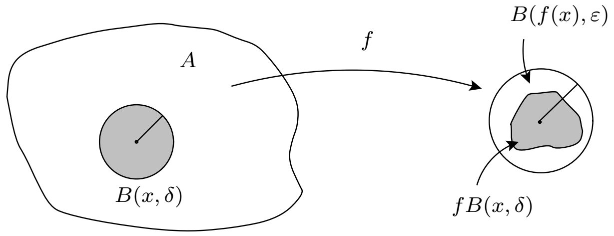
on mitallinen.

3. Olkoon X mielivaltainen joukko ja $\Gamma \subset \mathcal{P}(X)$ σ-algebra.
   Määr. Kuvaus $f\colon X \to \mathbb{R}$ on <u>mitallinen</u> (σ-alg. Γ suhteen), jos $f^{-1}G \in \Gamma$ kaikilla avoimilla $G \subset \mathbb{R}$.

Muistutus. (Diff II/Topo I) Kuvaus $f\colon A \to \mathbb{R}^m$, $A \subset \mathbb{R}^n$, on <u>jatkuva</u> pisteessä $x \in A$, jos $\forall \varepsilon > 0$ kohti $\exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0$ s.e.

$$f\big(B(x,\delta) \cap A\big) \subset B(f(x), \varepsilon).$$

$f\colon A \to \mathbb{R}^m$ on jatkuva, jos f on jatkuva $\forall x \in A$.



<u>Pätee</u>: $f\colon A \to \mathbb{R}^m$ on jatkuva $\iff$

(2.4) $\quad f^{-1}G$ on avoin A:ssa $\forall$ avoimilla $G \subset \mathbb{R}^m$, t.s. $f^{-1}G = A \cap V$, missä $V \subset \mathbb{R}^n$ on avoin.

Lause 2.5. *A mitallinen ja $f\colon A \to \mathbb{R}^m$ jatkuva $\Rightarrow$ f mitallinen.*

Tod.

$$G \subset \mathbb{R}^m \text{ avoin} \overset{(2.4)}{\Longrightarrow} f^{-1}G \text{ avoin } A\text{:ssa} \Rightarrow \exists \text{ avoin } V \subset \mathbb{R}^n \text{ s.e.}$$
$$f^{-1}G = \underbrace{A}_{\text{mitallinen}} \cap \underbrace{V}_{\text{mitallinen}} \in \operatorname{Leb}\mathbb{R}^n$$
$$\Rightarrow f \text{ mitallinen.}$$

□

Lause 2.6. *Jos $f\colon A \to \mathbb{R}^m$ on mitallinen, niin $f^{-1}B$ on mitallinen kaikilla Borel-joukoilla $B \subset \mathbb{R}^m$.*

Tod. Merkitään $\Gamma = \{V \subset \mathbb{R}^m : f^{-1}V \text{ mitallinen}\}$. Silloin Γ on σ-algebra, sillä

(1) $f^{-1}\emptyset = \emptyset$ mitallinen $\Rightarrow$ $\emptyset \in \Gamma$,

(2) $V \in \Gamma \;\Rightarrow\; f^{-1}V^c = \underbrace{A}_{\text{mitallinen}} \setminus \underbrace{f^{-1}V}_{\text{mitallinen}}$ mitallinen $\Rightarrow$ $V^c \in \Gamma$,

(3) $V_i \in \Gamma,\ i \in \mathbb{N} \;\Rightarrow\; f^{-1}\big(\bigcup_{i\in\mathbb{N}} V_i\big) = \bigcup_{i\in\mathbb{N}} \underbrace{f^{-1}V_i}_{\text{mitallinen}}$ mitallinen $\Rightarrow$ $\bigcup_{i\in\mathbb{N}} V_i \in \Gamma$.

Lisäksi Γ sisältää suljetut joukot, sillä: F suljettu $\Rightarrow$ F^c avoin $\Rightarrow$ $f^{-1}F = \big(\underbrace{f^{-1}(F^c)}_{\text{mitallinen}}\big)^c$ mitallinen
$\Rightarrow$ $F \in \Gamma$.
Siis $\Gamma \supset \operatorname{Bor}\mathbb{R}^m$ (= pienin σ-algebra, joka sisältää suljetut joukot). □

Korollari 2.7. *f mitallinen $\Rightarrow$ välin ja pisteen alkukuvat mitallisia.*

Esimerkki 2.8. Olkoon $E \subset \mathbb{R}^n$ ja $\chi_E \colon \mathbb{R}^n \to \{0,1\}$ joukon E karakteristinen funktio

$$\chi_E(x) = \begin{cases} 1, & \text{jos } x \in E, \\ 0, & \text{jos } x \notin E. \end{cases}$$

Väite: χ_E mitallinen funktio $\iff$ E mitallinen joukko.
Tod. $\boxed{\Rightarrow}$ $E = \chi_E^{-1}(1)$ mitallinen (K. 2.7).
$\boxed{\Leftarrow}$ Olkoon E mitallinen ja $G \subset \mathbb{R}$ avoin.

$$\chi_E^{-1}(G) = \begin{cases} \mathbb{R}^n, & \text{jos } \{0,1\} \subset G, \\ \emptyset, & \text{jos } \{0,1\} \cap G = \emptyset, \\ E, & \text{jos } \{0,1\} \cap G = \{1\}, \\ E^c, & \text{jos } \{0,1\} \cap G = \{0\}. \end{cases}$$

Nämä joukot mitallisia $\Rightarrow$ χ_E mitallinen funktio. □

Lause 2.9. *Olkoon $f \colon A \to \mathbb{R}^m$ mitallinen, $A \subset \mathbb{R}^n$, ja $g \colon B \to \mathbb{R}^k$ jatkuva, missä $fA \subset B \subset \mathbb{R}^m$. Silloin $g \circ f$ on mitallinen.*

Tod.

$$\left.\begin{array}{c} G \subset \mathbb{R}^k \text{ avoin} \\ g \text{ jatkuva} \end{array}\right\} \overset{(2.4)}{\Longrightarrow} g^{-1}G \text{ avoin } B\text{:ssä}$$

$$\Rightarrow \ \exists \ \underline{\text{avoin}}\ V \subset \mathbb{R}^m \text{ s.e. } g^{-1}G = B \cap V$$

$$\Rightarrow \ (g \circ f)^{-1}G = f^{-1}(g^{-1}G) = f^{-1}(B \cap V) \overset{fA \subset B}{=} f^{-1}(V) \quad \text{mitallinen.}$$

□

Varoitus: f ja g mitallisia $\not\Rightarrow$ $g \circ f$ mitallinen.
Jos $f \colon A \to \mathbb{R}^m$, niin

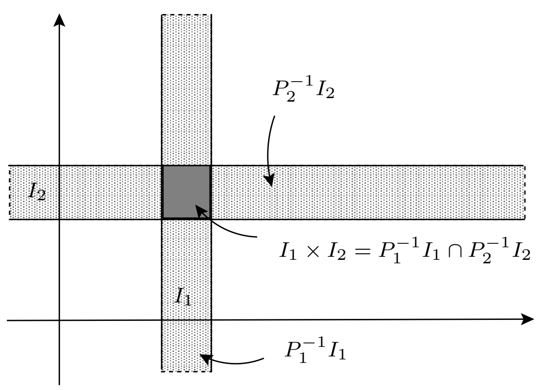
$$f = (f_1, \ldots, f_m), \ f(x) = \big(f_1(x), \ldots, f_m(x)\big),$$

missä

$$f_j \colon A \to \mathbb{R}, \ f_j(x) = (P_j \circ f)(x) \text{ ja } P_j(y_1, \ldots, y_m) = y_j \ (P_j \text{ projektio } j\text{:nnelle koord.}).$$

Lause 2.10. *$f = (f_1, \ldots, f_m) \colon A \to \mathbb{R}^m$ on mitallinen $\iff$ f_j on mitallinen $\forall j \in \{1, \ldots, m\}$.*

Tod. $\boxed{\Rightarrow}$ Jos f on mitallinen, niin $f_j = P_j \circ f$ on mitallinen (L. 2.9), sillä P_j jatkuva.
$\boxed{\Leftarrow}$ Oletetaan, että f_j on mitallinen $\forall j$. Olkoon $G \subset \mathbb{R}^m$ avoin.



$$\text{Lindelöf} \;\Rightarrow\; G = \bigcup_{i\in\mathbb{N}} I^{(i)}, \quad I^{(i)} \text{ avoin } m\text{-väli (vrt. L. 1.41 tod.)}$$

$$I^{(i)} = I_1^{(i)} \times \cdots \times I_m^{(i)} = \bigcap_{j=1}^{m} P_j^{-1} I_j^{(i)}, \quad I_j^{(i)} \subset \mathbb{R} \text{ avoin}$$

$$f^{-1}G = \bigcup_{i\in\mathbb{N}} f^{-1}I^{(i)} = \bigcup_{i\in\mathbb{N}} \bigcap_{j=1}^{m} f^{-1}P_j^{-1}I_j^{(i)} = \bigcup_{i\in\mathbb{N}} \bigcap_{j=1}^{m} \underbrace{f_j^{-1}I_j^{(i)}}_{\text{mitallinen}} \quad \text{mitallinen.}$$

$\square$

Lause 2.11. *Mitallisten funktioiden $f, g\colon A \to \dot{\mathbb{R}}$ summa ja tulo ovat mitallisia (mikäli määriteltyjä). Samoin λf, $\lambda \in \mathbb{R}$, ja $|f|^a$, $a > 0$, ovat mitallisia.*

Tod. $\boxed{\text{Summa.}}$ Olkoot $f, g\colon A \to \mathbb{R}$ mitallisia. Kirjoitetaan $f + g = u \circ v$, missä

$$A \xrightarrow{v} \mathbb{R}^2 \xrightarrow{u} \mathbb{R}, \quad v = (f, g) \quad \text{ja} \quad u(x, y) = x + y.$$

$$\left.\begin{array}{r} \text{Lause 2.10} \;\Rightarrow\; v \text{ mitallinen} \\ u \text{ jatkuva} \end{array}\right\} \;\Rightarrow\; f + g = u \circ v \text{ mitallinen.}$$

<u>Huom.</u> Tapaus $f, g\colon A \to \mathbb{R}^m$ mitallisia $\Rightarrow$ $f + g$ mitallinen seuraa Lause 2.10:stä.

Olkoot $f, g\colon A \to \dot{\mathbb{R}}$ mitallisia. [Summa $f + g$ on määritelty, jos missään $x \in A$ ei ole $f(x) = +\infty$, $g(x) = -\infty$, tai päinvastoin.] Merkitään $f + g = h$. Tiedetään, että A on mitallinen (Huom. 1.). Toisaalta

$$A = h^{-1}(+\infty) \cup h^{-1}(-\infty) \cup A_0\,, \quad \text{missä } A_0 = h^{-1}\mathbb{R}.$$
$$h^{-1}(+\infty) = f^{-1}(+\infty) \cup g^{-1}(+\infty) \;\text{ on mitallinen.}$$
$$h^{-1}(-\infty) = f^{-1}(-\infty) \cup g^{-1}(-\infty) \;\text{ on mitallinen.}$$
$$\Rightarrow\; A_0 \;\text{ on mitallinen.}$$

$$f|A_0 \text{ ja } g|A_0 \;\text{ mitallisia (Huom. 2.)} \overset{\text{tod. alkuosa}}{\Longrightarrow} h^{-1}G \text{ on mitallinen } \forall G \subset \mathbb{R} \text{ avoin}$$
$$\Rightarrow\; h \text{ on mitallinen.}$$

$\boxed{\text{Tulo.}}$ Samoin (HT)
$\boxed{\lambda f}$ Erikoistapaus tulosta.
$\boxed{|f|^a}$ $|f|^a = u \circ f$, missä $u(x) = |x|^a$ jatkuva, jos $a > 0$. L. 2.9 $\Rightarrow$ $|f|^a$ on mitallinen. $\square$

Tästä lähtien tarkastellaan vain funktioita $f\colon A \to \dot{\mathbb{R}}$, $A \subset \mathbb{R}^n$.
<u>Tärkeä peruskriteeri:</u>

Lause 2.12. *Olkoon $A \subset \mathbb{R}^n$ mitallinen ja $f\colon A \to \dot{\mathbb{R}}$. SEY (= seuraavat ehdot yhtäpitäviä)*

(1) f *on mitallinen;*

(2) $E_a = \{x \in A\colon f(x) < a\}$ *on mitallinen* $\forall a \in \mathbb{R}$;

(3) $E'_a = \{x \in A\colon f(x) > a\}$ *on mitallinen* $\forall a \in \mathbb{R}$;

(4) $E''_a = \{x \in A\colon f(x) \le a\}$ *on mitallinen* $\forall a \in \mathbb{R}$;

(5) $E_a''' = \{x \in A \colon f(x) \geq a\}$ *on mitallinen* $\forall a \in \mathbb{R}$.

Tod.

$$E_a''' = A \setminus E_a \quad \text{joten } (2) \iff (5)$$
$$E_a'' = A \setminus E_a' \quad \text{joten } (3) \iff (4)$$
$$E_a'' = \bigcap_{j\in\mathbb{N}} E_{a+1/j} \quad \text{joten } (2) \overset{\text{L. 1.29}}{\Longrightarrow} (4)$$
$$E_a = \bigcup_{j\in\mathbb{N}} E''_{a-1/j} \quad \text{joten } (4) \overset{\text{L. 1.29}}{\Longrightarrow} (2)$$
$$E_a = f^{-1}\big(\underbrace{(-\infty, a)}_{\text{avoin}}\big) \cup f^{-1}(-\infty) \quad \text{joten } (1) \Rightarrow (2)$$

<u>Oletetaan</u>, että (2) pätee [ja siis (3),(4),(5)] <u>Väite</u>: (1) pätee eli f on mitallinen.
<u>Tod.</u> Olkoon $G \subset \mathbb{R}$ avoin.

$$G = \bigcup_{j\in\mathbb{N}} I_j, \quad I_j = (a_j, b_j) \text{ avoin väli (Lindelöf)}$$
$$f^{-1}G = \bigcup_{j\in\mathbb{N}} f^{-1}I_j, \quad f^{-1}I_j = \{x \colon a_j < f(x) < b_j\} = E'_{a_j} \cap E_{b_j} \text{ mitallinen}$$
$$\Rightarrow f^{-1}G \text{ mitallinen}$$
$$f^{-1}(+\infty) = \bigcap_{j\in\mathbb{N}} E'_j \text{ mitallinen}$$
$$f^{-1}(-\infty) = \bigcap_{j\in\mathbb{N}} E_{-j} \text{ mitallinen}$$
$$\Rightarrow f \text{ mitallinen.}$$

□

Huomautus 2.13. Oletus "A mitallinen" on välttämätön Lauseessa 2.12. <u>Esim.</u> Olkoon A ei-mitallinen (L. 1.68) ja $x_0 \in A$. Määritellään $f \colon A \to \dot{\mathbb{R}}$,

$$f(x) = \begin{cases} +\infty & \text{jos } x \in A \setminus \{x_0\}, \\ -\infty & \text{jos } x = x_0. \end{cases}$$

Silloin $E_a = \{x \in A \colon f(x) < a\} = \{x_0\}$ on mitallinen $\forall a \in \mathbb{R}$ eli (2) pätee, mutta f ei voi olla mitallinen (koska A ei-mitallinen) eli (1) ei päde.

Esimerkki 2.14. <u>Väite</u>: $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mitallinen $\iff$

$$\begin{cases} (1) & f^2 \text{ mitallinen funktio,} \\ (2) & E = \{x \colon f(x) > 0\} \text{ mitallinen joukko.} \end{cases}$$

<u>Tod.</u> $\boxed{\Leftarrow}$ Merkitään $E_a = \{x \colon f(x) < a\}$. Lause 2.12: <u>osoitettava</u> E_a on mitallinen $\forall a \in \mathbb{R}$.

(i) Olkoon $a > 0$.

$$f(x) < a \iff f(x)^2 < a^2 \text{ tai } f(x) \leq 0, \text{ joten}$$
$$E_a = \underbrace{\{x \colon f^2(x) < a^2\}}_{\text{mitallinen (1)}} \cup \underbrace{E^c}_{\text{mitallinen (2)}} \quad \text{mitallinen}$$

(ii) Olkoon $a \leq 0$.

$$\begin{aligned} f(x) < a \quad &\Longleftrightarrow \quad f(x)^2 > a^2 \text{ ja } f(x) \leq 0, \text{ joten} \\ E_a = &\underbrace{\{x\colon f^2(x) > a^2\}}_{\text{mitallinen (1)}} \cap \underbrace{E^c}_{\text{mitallinen (2)}} \quad \text{mitallinen} \end{aligned}$$

Lause 2.12 $\Rightarrow$ f on mitallinen.

$\boxed{\Rightarrow}$ f mitallinen $\overset{\text{L. 2.11}}{\Rightarrow}$ $f^2 = f \cdot f$ on mitallinen. Samoin: f mitallinen $\overset{\text{L. 2.12}}{\Rightarrow}$ E mitallinen. $\square$

Huomautus 2.15. f^2 mitallinen $\not\Rightarrow$ f mitallinen. Syy: Olkoon $E \subset \mathbb{R}$ ei-mitallinen ja $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{jos } x \in E, \\ -1, & \text{jos } x \in E^c. \end{cases}$$

Silloin f^2 on vakiofunktiona $f^2(x) \equiv 1$ mitallinen, mutta $\{x\colon f(x) > 0\} = E$ on ei-mitallinen joukko. $\overset{\text{L. 2.12}}{\Longrightarrow}$ f ei-mitallinen.

2.16 Lukujonon $\limsup$ ja $\liminf$

Määritelmä 2.17. Olkoon $a_1, a_2, \ldots$ jono $\dot{\mathbb{R}}$:ssä. Merkitään

$$b_k = \sup_{i \geq k} a_i, \quad c_k = \inf_{i \geq k} a_i. \quad (\text{sallitaan } b_k, c_k \in \dot{\mathbb{R}})$$

Tällöin

$$\begin{aligned} &b_1 \geq b_2 \geq \cdots \geq b_k \geq b_{k+1} \geq \cdots \quad \text{ja} \\ &c_1 \leq c_2 \leq \cdots \leq c_k \leq c_{k+1} \leq \cdots \quad (\sup / \inf \text{ pienemmästä joukosta}) \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ $\exists$ raja-arvot

$$\lim_{k\to\infty} b_k = \inf_{k\in\mathbb{N}} b_k = \beta \quad \text{ja} \quad \lim_{k\to\infty} c_k = \sup_{k\in\mathbb{N}} c_k = \gamma \quad (\text{sallitaan } \pm\infty).$$

Merkitään

$$\begin{aligned} \beta &= \limsup_{i\to\infty} a_i \ \text{ tai } \ \overline{\lim_{i\to\infty}} a_i \quad \text{"yläraja-arvo" eli "limes superior"} \\ \gamma &= \liminf_{i\to\infty} a_i \ \text{ tai } \ \underline{\lim_{i\to\infty}} a_i \quad \text{"alaraja-arvo" eli "limes inferior".} \end{aligned}$$

Siis

$$\begin{aligned} \limsup_{i\to\infty} a_i &= \lim_{k\to\infty} \bigl(\sup_{i\geq k} a_i\bigr) = \inf_{k\in\mathbb{N}} \bigl(\sup_{i\geq k} a_i\bigr), \\ \liminf_{i\to\infty} a_i &= \lim_{k\to\infty} \bigl(\inf_{i\geq k} a_i\bigr) = \sup_{k\in\mathbb{N}} \bigl(\inf_{i\geq k} a_i\bigr). \end{aligned}$$

Huomautus 2.18. (a_i) jono $\dot{\mathbb{R}}$:ssä $\Rightarrow$ $\limsup_{i\to\infty} a_i$ ja $\liminf_{i\to\infty} a_i$ aina olemassa ($\in \dot{\mathbb{R}}$) ja 1-käsitteisiä.

Esimerkki 2.19. (1) $\infty, -\infty, \infty, -\infty, \ldots$; $b_k = \infty \ \forall k$, $c_k = -\infty \ \forall k$ $\Rightarrow$ $\beta = \infty$, $\gamma = -\infty$

(2) $1, 2, 3, 4, \ldots;\quad b_k = \infty\ \forall k,\ c_k = k\ \forall k\ \Rightarrow\ \beta = \infty = \gamma$

(3) $0, 1, 0, 1, 0, 1, \ldots;\quad b_k = 1\ \forall k,\ c_k = 0\ \forall k\ \Rightarrow\ \beta = 1,\ \gamma = 0$

(4) $0, -1, 0, -2, 0, -3, \ldots;\quad b_k = 0\ \forall k,\ c_k = -\infty\ \forall k\ \Rightarrow\ \beta = 0,\ \gamma = -\infty.$

Lause 2.20. *(i)* $\liminf_{i\to\infty} a_i \le \limsup_{i\to\infty} a_i$,

(ii) $a_i \le M\ \forall i \ge i_0\ \Rightarrow\ \limsup_{i\to\infty} a_i \le M$,

(iii) $a_i \ge m\ \forall i \ge i_0\ \Rightarrow\ \liminf_{i\to\infty} a_i \ge m$.

Tod.

(i) $c_k \le b_k\ \Rightarrow\ \gamma = \lim_{k\to\infty} c_k \le \lim_{k\to\infty} b_k = \beta$,

(ii) $b_k \le M\ \forall k \ge i_0\ \Rightarrow\ \beta = \lim_{k\to\infty} b_k \le M$,

(iii) $c_k \ge m\ \forall k \ge i_0\ \Rightarrow\ \gamma = \lim_{k\to\infty} c_k \ge m$.

□

Lause 2.21. *Olkoon* (a_i) *jono* $\dot{\mathbb{R}}$*:ssä. Tällöin*

$$\exists \lim_{i\to\infty} a_i\ (\in \dot{\mathbb{R}}) \iff \liminf_{i\to\infty} a_i = \limsup_{i\to\infty} a_i \quad (\in \dot{\mathbb{R}}).$$

Tässä tapauksessa

$$\lim_{i\to\infty} a_i = \liminf_{i\to\infty} a_i = \limsup_{i\to\infty} a_i \quad (\pm\infty \quad \textit{sallitaan}).$$

Tod. $\boxed{\Rightarrow}$ Oletetaan, että $\exists \alpha = \lim_{i\to\infty} a_i$.
(a1) $\alpha \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} \varepsilon > 0\ &\Rightarrow\ \exists i_0 \text{ s.e. } \alpha - \varepsilon < a_i < \alpha + \varepsilon\ \forall i \ge i_0 \\ &\Rightarrow\ \alpha - \varepsilon \le c_{i_0} \le \gamma \le \beta \le b_{i_0} \le \alpha + \varepsilon \\ &\varepsilon \text{ mieliv. } \Rightarrow\ \gamma = \beta \end{aligned}$$

(a2) $\alpha = \infty$

$$\begin{aligned} M \in \mathbb{R}\ &\Rightarrow\ \exists i_0 \text{ s.e. } a_i > M\ \forall i \ge i_0 \\ &\Rightarrow\ M \le c_{i_0} \le \gamma \le \beta \\ &M \text{ mieliv. } \Rightarrow\ \gamma = \beta = \infty \end{aligned}$$

(a3) $\alpha = -\infty$ samoin
$\boxed{\Leftarrow}$ Oletetaan, että $\beta = \gamma \overset{\text{merk.}}{=} \alpha$.
(b1) $\alpha \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} \varepsilon > 0\ &\Rightarrow\ \exists k_1 \text{ s.e. } b_k < \alpha + \varepsilon\ \forall k \ge k_1 \\ &\exists k_2 \text{ s.e. } c_k > \alpha - \varepsilon\ \forall k \ge k_2 \\ k \ge \max\{k_1, k_2\}\ &\Rightarrow\ \alpha - \varepsilon < c_k \le a_k \le b_k < \alpha + \varepsilon \\ &\varepsilon \text{ mieliv. } \Rightarrow\ \alpha = \lim_{k\to\infty} a_k \end{aligned}$$

(b2) $\alpha = \infty$

$$\begin{aligned} M \in \mathbb{R} &\Rightarrow \exists k_0 \text{ s.e. } c_k > M \ \forall k \geq k_0 \\ &\Rightarrow a_k \geq c_k > M \ \forall k \geq k_0 \\ &\Rightarrow \lim_{k\to\infty} a_k = \infty \end{aligned}$$

(b3) $\alpha = -\infty$ samoin $\square$

2.22 Rajafunktion mitallisuus

Lause 2.23. *Olkoot $f_j \colon A \to \dot{\mathbb{R}}$, $j \in \mathbb{N}$, mitallisia. Silloin funktiot*

$$\sup_{j\in\mathbb{N}} f_j, \quad \inf_{j\in\mathbb{N}} f_j, \quad \limsup_{j\to\infty} f_j, \quad \liminf_{j\to\infty} f_j$$

ovat mitallisia. Jos $\exists f = \lim_{j\to\infty} f_j$, niin f on mitallinen.

Huomautus 2.24. Yo. funktiot määritelty pisteittäin $\forall x \in A$. Esimerkiksi funktion $\sup_{j\in\mathbb{N}} f_j$ arvo pisteessä $x \in A$ on $\sup_{j\in\mathbb{N}} f_j(x) \in \dot{\mathbb{R}}$.

Tod. Merkitään $g(x) = \sup_{j\in\mathbb{N}} f_j(x)$, $x \in A$. Kaikilla $a \in \mathbb{R}$:

(2.25)

$$\{x \in A \colon g(x) \leq a\} \overset{(*)}{=} \bigcap_{j\in\mathbb{N}} \overbrace{\{x \in A \colon f_j(x) \leq a\}}^{\text{mitallinen}} \quad \text{on mitallinen} \Rightarrow g = \sup_{j\in\mathbb{N}} f_j \text{ on mitallinen.}$$

$\big((*) : \; g(x) \leq a \iff f_j(x) \leq a \ \forall j \in \mathbb{N}\big)$

(2.26)

$$\inf_{j\in\mathbb{N}} f_j = -\sup_{j\in\mathbb{N}}(-f_j) \quad \text{on mitallinen,}$$

$$\limsup_{j\to\infty} f_j = \inf_{k\in\mathbb{N}}\big(\sup_{j\geq k} f_j\big) \quad \text{on mitallinen [(2.25), (2.26)],}$$

$$\liminf_{j\to\infty} f_j = \sup_{k\in\mathbb{N}}\big(\inf_{j\geq k} f_j\big) \quad \text{on mitallinen [(2.25), (2.26)].}$$

Jos $\exists f = \lim_{j\to\infty} f_j$, niin $\lim_{j\to\infty} f_j \overset{\text{L. 2.21}}{=} \limsup_{j\to\infty} f_j$ on mitallinen.

$\square$

Melkein kaikkialla (lyhyemmin m.k.) = lukuunottamatta 0-mittaista joukkoa. Samoin "melkein jokainen" (lyhyemmin m.j.).

Esim.

(a) m.j. reaaliluku on irrationaalinen, sillä $m(\mathbb{Q}) = 0$.

(b) $e^{-jx^2} \xrightarrow{j\to\infty} 0$ m.k. $x \in \mathbb{R}$, sillä $m(\{0\}) = 0$.

Lause 2.27. *Olkoot $f, g \colon A \to \dot{\mathbb{R}}$. Oletetaan, että f on mitallinen ja $g = f$ m.k. Silloin g on mitallinen.*

Tod. Olkoon $A_0 \subset A$ s.e. $m(A_0) = 0$ ja $f(x) = g(x)$ $\forall x \in A \setminus A_0$. Olkoon $a \in \mathbb{R}$. Merkitään

$$E_a = \underbrace{\{x \in A\colon f(x) < a\}}_{\text{mitallinen}} \quad \text{ja} \quad F_a = \{x \in A\colon g(x) < a\}.$$

ja osoitetaan, että F_a on mitallinen. Nyt

$$\begin{aligned} &F_a = \big(F_a \cap A_0\big) \cup \big(F_a \setminus A_0\big), \\ &m^*\big(F_a \cap A_0\big) \le m^*(A_0) = 0 \;\Rightarrow\; F_a \cap A_0 \quad \text{on mitallinen.} \end{aligned}$$

Toisaalta

$$F_a \setminus A_0 = E_a \setminus A_0,$$

joka on mitallinen. Siis F_a on kahden mitallisen joukon yhdisttenä mitallinen. □

Huomautus 2.28. Siis nollajoukot (0-mittaiset) eivät vaikuta mitallisuuteen $\Rightarrow$ voidaan puhua myös sellaisten funktioiden mitallisuudesta, jotka ovat määritelty vain m.k.

Lause 2.29. *Olkoot $f_j\colon A \to \dot{\mathbb{R}}$, $j \in \mathbb{N}$, mitallisia ja $f_j \to f$ m.k. $\Rightarrow$ f mitallinen.*

Tod. $f = \limsup_{j\to\infty} f_j$ m.k. ja $\limsup_{j\to\infty} f_j$ on mitallinen. □

Esimerkki 2.30. <u>Olet.</u> $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ja $\exists f'(x)$ $\forall x \in \mathbb{R}$.
<u>Väite:</u> f' on mitallinen.
<u>Tod.</u> Merkitään

$$g_n(x) = \frac{f(x+1/n) - f(x)}{1/n}, \quad \text{jolloin} \quad f'(x) = \lim_{n\to\infty} g_n(x).$$

$\exists\, f'(x)$ $\forall x \in \mathbb{R}$ $\Rightarrow$ f jatkuva ja siis mitallinen $\Rightarrow$ g_n mitallinen (L. 2.11) $\overset{\text{L. 2.23}}{\Longrightarrow}$ f' mitallinen.
□

Lisätieto I *Littlewoodin kolme periaatetta* (Kts. esim. Royden):

(I) Jokainen mitallinen joukko $A \subset \mathbb{R}^n$, jolle $m(A) < \infty$, on "melkein" äärellinen yhdiste $F = \bigcup_{j=1}^m I_j$, missä $I_1, \ldots, I_m$ ovat n-välejä: $\forall \varepsilon > 0$ $\exists$ $F = \bigcup_{j=1}^m I_j \subset A$ s.e. $m(A \triangle F) < \varepsilon$, missä $A \triangle F = (A \setminus F) \cup (F \setminus A)$ ("symmetrinen erotus").

(II) Jokainen mitallinen kuvaus on "melkein jatkuva": <u>Lusinin lause</u> (Reaalianalyysi I): Jos $A \subset \mathbb{R}^n$ on rajoitettu, $f\colon A \to \mathbb{R}$ on mitallinen ja $\varepsilon > 0$, niin $\exists$ kompakti $C \subset A$ s.e. $m(A \setminus C) < \varepsilon$ ja $f|C$ on <u>jatkuva</u>.

(III) Jokainen suppeneva jono mitallisia funktioita $f_j\colon A \to \mathbb{R}$ on "melkein tasaisesti suppeneva": <u>Egorovin lause</u> (Reaalianalyysi I): Jos $A \subset \mathbb{R}^n$, $m(A) < \infty$, $f_j\colon A \to \mathbb{R}$ ovat mitallisia ja $f_j \to f\colon A \to \mathbb{R}$ m.k. Silloin $\forall \varepsilon > 0$ $\exists$ kompakti $C \subset A$ s.e. $m(A \setminus C) < \varepsilon$ ja $f_j|C \to f|C$ <u>tasaisesti</u> (t.s. $\sup_{x\in C}|f_j(x) - f(x)| \underset{j\to\infty}{\longrightarrow} 0$).

Lisätieto II Olkoon (Ω, Γ, μ) tn-avaruus. Kurssilla TN I (tai TN-teoria) sanotaan, että funktio $X\colon \Omega \to \mathbb{R}$ on *satunnaismuuttuja*, jos

$$\{\omega \in \Omega\colon X(\omega) \le x\} = X^{-1}(-\infty, x] \in \Gamma \quad \text{kaikilla } x \in \mathbb{R}.$$

<u>Voidaan osoittaa</u>: Lause 2.12 pätee myös näille, ja

$$X\colon \Omega \to \mathbb{R} \quad \text{satunnaismuuttuja} \iff X \ \Gamma\text{-mitallinen funktio } \Omega \to \mathbb{R}.$$

3 Lebesguen integraali

3.1 Yksinkertaiset funktiot

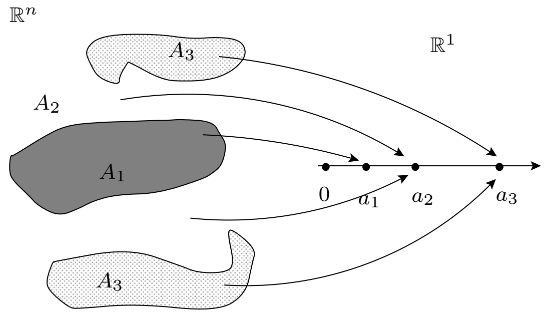
Määritelmä 3.2. Funktio $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ on *yksinkertainen*, jos

(1) f on mitallinen,

(2) $f \geq 0 \quad (f(x) \geq 0 \ \forall x \in \mathbb{R}^n)$,

(3) f saa vain äärellisen monta arvoa.

Merkitään $Y = \{f \mid \ f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \text{ yksinkertainen}\} \quad (\text{tai } Y_n)$.



Huomautus 3.3. 1. $f \in Y \ \Rightarrow \ f(x) \neq \infty \ \forall x$.

2. $f \in Y,\ E \in \operatorname{Leb} \mathbb{R}^n \ \Rightarrow \ f\chi_E \in Y$.

Olkoon $f \in Y$ ja f:n eri arvot $a_1, \ldots, a_k \in [0, +\infty)$. Silloin

$$A_i = f^{-1}(a_i) \quad \text{ovat mitallisia ja erillisiä,} \ \ \mathbb{R}^n = \bigcup_{i=1}^k A_i$$

ja

$$\boxed{f = \sum_{i=1}^k a_i \cdot \chi_{A_i}} \quad \text{on } f\text{:n } \textit{normaaliesitys.}$$

Määritelmä 3.4. Olkoon $f \in Y$ ja $f = \sum_{i=1}^k a_i \cdot \chi_{A_i}$ sen normaaliesitys. Tällöin f:n *integraali* (yli $\mathbb{R}^n : n$) on

$$I(f) = \sum_{i=1}^k a_i m(A_i). \qquad (\text{muista } 0 \cdot \infty = 0)$$

Jos $E \subset \mathbb{R}^n$ on mitallinen, niin f:n integraali yli E:n on

$$I(f, E) = I(f\chi_E).$$

Erityisesti:

$I(f) = I(f, \mathbb{R}^n)$,

$0 \leq I(f, E) \leq \infty$,

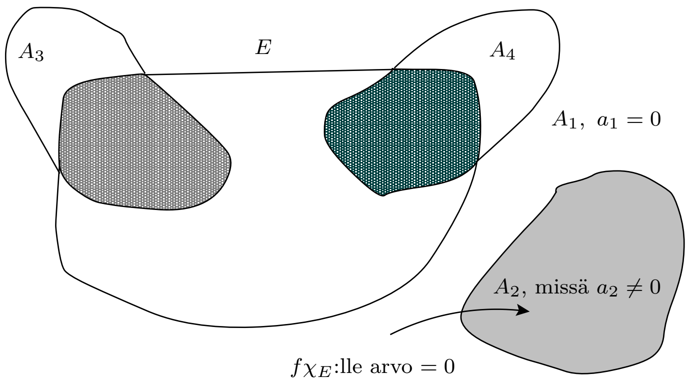
$$E \in \operatorname{Leb} \mathbb{R}^n \;\Rightarrow\; I(\chi_E) = m(E).$$

Lause 3.5. *Jos $f \in Y$ ja f:n normaaliesitys on $\sum_{i=1}^k a_i \cdot \chi_{A_i}$, niin*

$$I(f,E) = \sum_{i=1}^k a_i m(A_i \cap E).$$

Tod.

$$f\chi_E = \sum_{i=1}^k a_i \cdot \chi_{A_i}\chi_E = \sum_{i=1}^k a_i \cdot \chi_{A_i \cap E} \quad \text{(ei ole välttämättä normaaliesitys).} \tag{3.6}$$



$f\chi_E$:n normaaliesitys saadaan summasta (3.6)

$$\left.\begin{array}{l} \text{(1) poistamalla siitä kaikki ne termit, joilla } A_j \cap E = \emptyset \\[1em] \text{(2) jos } a_j = 0 \text{ jollakin } j \in \{1,\dots,k\}, \text{ niin lisätään } \mathbb{R}^n \setminus E \\ \text{ joukkoon } A_j \text{ ja merkitään syntynyttä joukkoa edelleen } A_j\text{:llä} \end{array}\right\} \text{näillä } \; a_j m(A_j \cap E) = 0$$

$$\left.\begin{array}{l} \text{(3) jos } a_i \neq 0 \ \forall i \in \{1,\dots,k\}, \text{ niin lisätään summaan} \\ \text{termi } a_{k+1}\chi_{A_{k+1}}, \text{ missä } a_{k+1} = 0 \text{ ja } A_{k+1} = \mathbb{R}^n \setminus E \end{array}\right\} \text{tällöin } a_{k+1} m(A_{k+1}) = 0$$

$$\Rightarrow\; I(f,E) = I(f\chi_E) = \sum_{i=1}^k a_i m(A_i \cap E) + a_{k+1} m(A_{k+1}) = \sum_{i=1}^k a_i m(A_i \cap E).$$

$\square$

Lause 3.7. *Olkoot $E_j,\ j \in \mathbb{N}$, mitallisia ja erillisiä ja $E = \bigcup_{j\in\mathbb{N}} E_j$. Jos $f \in Y$, niin*

$$I(f,E) = \sum_{j\in\mathbb{N}} I(f,E_j).$$

Tod. Olkoon $f = \sum_{i=1}^k a_i \chi_{A_i}$ normaaliesitys.

$$\text{L. 3.5} \;\Rightarrow\; I(f,E) = \sum_{i=1}^k a_i m(A_i \cap E).$$

Koska $A_i \cap E = \bigcup_{j\in\mathbb{N}}(A_i \cap E_j)$, niin (peruslause L. 1.29)

$$
\begin{aligned}
m(A_i \cap E) &= \sum_{j\in\mathbb{N}} m(A_i \cap E_j) \quad \forall i = 1,\dots,k \\
\Rightarrow I(f;E) &= \sum_{i=1}^{k} a_i \sum_{j\in\mathbb{N}} m(A_i \cap E_j) = \sum_{j\in\mathbb{N}} \sum_{i=1}^{k} a_i m(A_i \cap E_j) \\
&\overset{3.5}{=} \sum_{j\in\mathbb{N}} I(f, E_j).
\end{aligned}
$$

$\square$

Huomautus 3.8. Selvästi $I(f,\emptyset) = I(f\chi_\emptyset) = I(0) = 0$, joten Lauseen 3.7 nojalla kuvaus

$$\operatorname{Leb}\mathbb{R}^n \to [0,+\infty], \quad E \mapsto I(f,E)$$

on mitta jokaisella (kiinteällä) $f \in Y$.

Konvergenssilause 1.59 $\Rightarrow$

Korollari 3.9. *Jos $f \in Y$ ja $E_1 \subset E_2 \subset \cdots$ ovat mitallisia, niin*

$$I\big(f, \cup_{j=1}^{\infty} E_j\big) = \lim_{j\to\infty} I(f, E_j).$$

Lause 3.10. *Olkoot $f,g \in Y$, E mitallinen ja $a \ge 0$ vakio. Silloin*

(i) $f+g \in Y$ ja $I(f+g,E) = I(f,E) + I(g,E)$;

(ii) $af \in Y$ ja $I(af,E) = aI(f,E)$.

Tod. (i): Selvästi $f+g \in Y$.
(a) Olkoon $E = \mathbb{R}^n$ ja

$$f = \sum_{j=1}^{k} a_j \chi_{A_j}, \quad g = \sum_{i=1}^{\ell} b_i \chi_{B_i}$$

normaaliesitykset. Silloin

$$(f+g)\chi_{A_i\cap B_j} = (a_i + b_j)\chi_{A_i\cap B_j} \quad \forall i,j \quad \overset{3.5}{\Longrightarrow}$$

$$
\text{(3.11)} \qquad \left\{ \begin{aligned} I(f+g, A_i \cap B_j) &= (a_i + bj)m(A_i \cap B_j) = a_i m(A_i \cap B_j) + b_j m(A_i \cap B_j) \\ &= I(f, A_i \cap B_j) + I(g, A_i \cap B_j) \end{aligned} \right.
$$

$\mathbb{R}^n$ = yhdiste erillisistä joukoista $A_i \cap B_j$. Lause 3.7 $\Rightarrow$

$$
\begin{aligned}
I(f+g) &\overset{3.7}{=} \sum_{i,j} I(f+g, A_i \cap B_j) \overset{(3.11)}{=} \sum_{i,j} I(f, A_i \cap B_j) + \sum_{i,j} I(g, A_i \cap B_j) \\
&\overset{3.7}{=} I(f) + I(g)
\end{aligned}
$$

(b) E mielivaltainen.

$$
\begin{aligned}
I(f+g,E) &= I\big((f+g)\chi_E\big) = I(f\chi_E + g\chi_E) = I(f\chi_E) + I(g\chi_E) \\
&= I(f,E) + I(g,E).
\end{aligned}
$$

(ii): $af \in Y$ selvä.

$$a = 0 \;\Rightarrow\; I(af, E) = 0 = aI(f, E).$$

Olkoon $a > 0$ ja $f = \sum_{i=1}^{k} a_i \chi_{A_i}$ normaaliesitys.

$$af = \sum_{i=1}^{k} aa_i \chi_{A_i} \quad \text{normaaliesitys.}$$

$$I(af, E) = \sum_{i=1}^{k} aa_i m(A_i \cap E) = a \sum_{i=1}^{k} a_i m(A_i \cap E) = aI(f, E).$$

□

Monotonisuusominaisuuksia.

Lause 3.12. *(1) E mitallinen ja $f, g \in Y$, $f \le g$ (ts. $f(x) \le g(x)\ \forall x$)* $\Rightarrow$ $I(f, E) \le I(g, E)$;

(2) $E \subset F$ mitallisia, $f \in Y$ $\Rightarrow$ $I(f, E) \le I(f, F)$;

(3) $f \in Y$, $m(E) = 0$ $\Rightarrow$ $I(f, E) = 0$.

Tod. (1): $g = f + (g - f)$, missä $g - f \ge 0$ ja $g - f \in Y$. Lause 3.10 $\Rightarrow$

$$I(g, E) \overset{3.10}{=} I(f, E) + \underbrace{I(g - f, E)}_{\ge 0} \ge I(f, E).$$

(2):

$$\left.\begin{aligned} E \subset F \;\Rightarrow\; 0 \le \chi_E \le \chi_F \\ f \in Y \end{aligned}\right\} \Rightarrow f\chi_E \le f\chi_F \quad (\in Y)$$

$$\Rightarrow\; I(f, E) = I(f\chi_E) \overset{(1)}{\le} I(f\chi_F) = I(f, F).$$

(3): Jos $f = \sum_{i=1}^{k} a_i \chi_{A_i}$ on normaaliesitys, niin

$$I(f, E) = \sum_{i=1}^{k} a_i \underbrace{m(A_i \cap E)}_{=0} = 0, \quad \text{sillä } A_i \cap E \subset E \text{ ja } m(E) = 0. \quad \square$$

Lisätieto. Olkoon (X, Γ, μ) mitta-avaruus. Funktio $f\colon X \to \mathbb{R}$ on yksinkertainen, jos

$$f = \sum_{i=1}^{k} a_i \chi_{A_i},$$

missä $a_1, \ldots, a_k \ge 0$, joukot $A_i \in \Gamma, i = 1, \ldots, k$, ovat erillisiä ja $X = \bigcup_{i=1}^{k} A_i$. Silloin f:n integraali on

$$I(f) = \sum_{i=1}^{k} a_i \mu(A_i).$$

Luvun 3.1 ominaisuudet ovat voimassa!

3.13 Lebesguen integraali, $f \geq 0$

Lause 3.14. *Olkoon $f\colon \mathbb{R}^n \to \dot{\mathbb{R}}$ mitallinen ja $f \geq 0$. Tällöin $\exists$ nouseva jono 1-kertaisia funktioita $f_j \in Y$, $f_1 \leq f_2 \leq \cdots$, s.e. $f(x) = \lim_{j\to\infty} f_j(x)$ $\forall x \in \mathbb{R}^n$.*

Tod. Määritellään $f_j\colon \mathbb{R}^n \to \dot{\mathbb{R}}$ seuraavasti: Jaetaan $[0, j)$ erillisiin puoliavoimiin väleihin $I_1, \ldots, I_k$, joiden pituus on $1/2^j$, t.s.

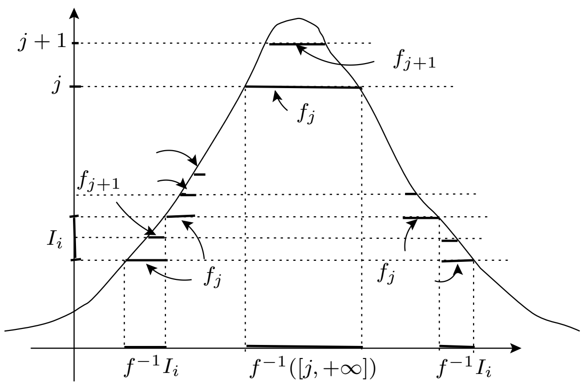
$$I_i = [(i-1)2^{-j}, i2^{-j}), \quad i = 1, \ldots, k = j2^j.$$

Määritellään

$$f_j(x) = \begin{cases} (i-1)2^{-j}, & \text{kun } x \in f^{-1}I_i, \quad (\text{eli } (i-1)2^{-j} \leq f(x) < i2^{-j}) \\ j, & \text{kun } x \in f^{-1}[j, +\infty] \quad (\text{eli } f(x) \geq j). \end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{r} f \text{ mitallinen } \Rightarrow\ f^{-1}(I_i) \text{ mitallinen ja} \\ f^{-1}[j,+\infty] \text{ mitallinen.} \\ \\ f_j \geq 0, \text{ saa vain äärellisen monta arvoa} \end{array}\right\} \Rightarrow\ f_j \in Y,\ j = 1, 2, \ldots$$

Konstruktio $\Rightarrow$ $f_j \leq f_{j+1}$ (katso kuva).



<u>Väite</u>: $f_j(x) \to f(x)$ $\forall x \in \mathbb{R}^n$.

(a): $f(x) < +\infty \ \Rightarrow\ \exists j_0 > f(x)$. Kun $j \geq j_0$, niin

$$(i-1)2^{-j} \leq f(x) < i2^{-j} \text{ jollakin } i \in \{1, \ldots, j2^j\}$$
$$\Rightarrow\ f_j(x) = (i-1)2^{-j} \leq f(x) < i2^{-j} = f_j(x) + 2^{-j} \ \Rightarrow\ f(x) - 2^{-j} < f_j(x) \leq f(x)$$
$$\Rightarrow\ \lim_{j\to\infty} f_j(x) = f(x).$$

(b): $f(x) = +\infty \ \Rightarrow\ f_j(x) = j \ \forall j \ \Rightarrow\ f_j(x) \to +\infty = f(x)$. □

Määritelmä 3.15. Olkoon $f\colon \mathbb{R}^n \to \dot{\mathbb{R}}$ mitallinen ja $f \geq 0$. Silloin f:n *(Lebesguen) integraali* yli $\mathbb{R}^n$:n on

$$\int f = \sup\{I(\varphi)\colon \varphi \in Y,\ \varphi \leq f\}.$$

Jos $E \subset \mathbb{R}^n$ on mitallinen, niin f:n integraali yli E:n on

$$\int_E f = \int f\chi_E. \tag{3.16}$$

Merkitään myös

$$\int_E f = \int_E f\,dm = \int_E f(x)\,dm(x), \quad m = n\text{-ulotteinen Lebesguen mitta.}$$

Jos $n = 1$ ja $E = [a, b]$, niin merkitään $\int_E f = \int_a^b f = \int_a^b f(x)\,dx$.

Merkintäsopimus. Jos $f\colon A \to \dot{\mathbb{R}}$ ja $E \subset A$, niin määritellään $f\chi_E\colon \mathbb{R}^n \to \dot{\mathbb{R}}$,

$$f\chi_E(x) = \begin{cases} f(x), & \text{jos } x \in E, \\ 0, & \text{jos } x \notin E. \end{cases}$$

Tällöin (3.16) määrittelee $\int_E f$:n kaikille mitallisille $f\colon A \to \dot{\mathbb{R}}$ ja mitallisille $E \subset A$.

Lause 3.17. *$f \in Y$ ja E mitallinen $\Rightarrow$ $I(f, E) = \int_E f$.*

Tod. Voi olettaa $E = \mathbb{R}^n$ (muuten korvataan f funktiolla $f\chi_E \in Y$).

(a) $f \le f \;\Rightarrow\; I(f) \le \int f$.

(b) $\varphi \in Y,\ \varphi \le f \overset{\text{L. 3.12 (1)}}{\Longrightarrow} I(\varphi) \le I(f) \;\Rightarrow\; \int f \le I(f)$.

$\square$

Integraalin perusominaisuudet.

Lause 3.18. *Oletetaan, että esiintyvät funktiot ovat sekä ei-negatiivisia että mitallisia ja esiintyvät joukot ovat mitallisia $\mathbb{R}^n$:n osajoukkoja.*

(1) $f \le g \;\Rightarrow\; \int_E f \le \int_E g$

(2) $A \subset B \;\Rightarrow\; \int_A f \le \int_B f$

(3) $f(x) = 0\ \forall x \in E \;\Rightarrow\; \int_E f = 0$

(4) $m(E) = 0 \;\Rightarrow\; \int_E f = 0$

(5) $0 \le a < \infty \;\Rightarrow\; \int_E af = a\int_E f$.

Tod. (1): Olkoon $E = \mathbb{R}^n$, $\varphi \in Y$, $\varphi \le f \;\Rightarrow\; \varphi \le g \;\Rightarrow$

$$I(\varphi) \le \int g \overset{\text{sup}}{\Longrightarrow} \int f \le \int g.$$

$E \in \operatorname{Leb} \mathbb{R}^n \;\Rightarrow\; f\chi_E \le g\chi_E$ $\mathbb{R}^n$:ssä $\overset{(1)}{\Longrightarrow}$

$$\int_E f = \int f\chi_E \le \int g\chi_E = \int_E g.$$

(2): $f\chi_A \le f\chi_B$ ja (1) $\Rightarrow$ väite.
(3): $f\chi_E = 0 \;\Rightarrow\; \int_E f = I(0) = 0$.
(4): Olkoon $\varphi \in Y$, $\varphi \le f\chi_E$. Koska $\varphi|\mathbb{R}^n \setminus E = 0$, niin $\varphi = \varphi\chi_E$, joten

$$I(\varphi) = I(\varphi, E) \overset{3.12\,(3)}{=} 0 \overset{\text{sup}}{\Longrightarrow} \int_E f = 0.$$

(5): Jos $a = 0$, niin molemmat puolet ovat nollia. Olkoon $a > 0$, $\varphi \in Y$, $\varphi \leq f\chi_E \Rightarrow a\varphi \leq af\chi_E \Rightarrow$

$$\int_E af \geq I(a\varphi) \overset{3.10\,(ii)}{=} aI(\varphi) \Rightarrow \int_E af \geq a\int_E f.$$

$$f = \frac{1}{a}(af) \Rightarrow \int_E f = \int_E \frac{1}{a}(af) \overset{\text{yllä}}{\geq} \frac{1}{a}\int_E af \Rightarrow a\int_E f \geq \int_E af.$$

□

Yhteys Riemann-integraaliin.

Lause 3.19. *Olkoon $E \subset \mathbb{R}^n$ rajoitettu ja $f\colon E \to \mathbb{R}$ mitallinen, $f \geq 0$. Jos f on Riemann-integroituva yli E:n (Diff I/II), niin*

$$\textit{(Riemann-integraali)} \quad (\mathrm{R})\int_E f = \int_E f \quad \textit{(oik.puol. Lebesgue-integraali).}$$

Näin on esimerkiksi aina, kun E on suljettu n-väli ja f jatkuva.

Tod. Valitaan suljettu n-väli $I \supset E$. Koska määritelmän mukaan

$$(\mathrm{R})\int_E f = (\mathrm{R})\int_I f\chi_E \quad \text{ja} \quad \int_E f = \int f\chi_E = \int_I f\chi_E,$$

voidaan (korvaamalla f funktiolla $f\chi_E$) olettaa, että $E = I$. Olkoon $D = \{I_1, \ldots, I_k\}$ I:n jako (”puoliavoimiin”) erillisiin osaväleihin. Merkitään

$$g_i = \inf_{x\in I_i} f(x),\ \bar{g}_i = \inf_{x\in \bar{I}_i} f(x) \quad \Rightarrow \bar{g}_i \leq g_i \quad \text{ja}$$
$$G_i = \sup_{x\in I_i} f(x),\ \bar{G}_i = \sup_{x\in \bar{I}_i} f(x) \quad \Rightarrow \bar{G}_i \geq G_i.$$

Riemannin alasumma

$$m_D = \sum_{i=1}^{k} \bar{g}_i \ell(I_i) \leq \sum_{i=1}^{k} g_i m(I_i) = I(\varphi),$$

missä $\varphi = \sum_{i=1}^{k} g_i \chi_{I_i} \in Y$. Samoin yläsumma

$$M_D = \sum_{i=1}^{k} \bar{G}_i \ell(I_i) \geq \sum_{i=1}^{k} G_i m(I_i) = I(\psi),$$

missä $\psi = \sum_{i=1}^{k} G_i \chi_{I_i} \in Y$. Selvästi $\varphi \leq f \leq \psi$, joten

(3.20) $$m_D \leq I(\varphi) \overset{\sup}{\leq} \int_E f \overset{f\leq\psi}{\leq} \int_E \psi = I(\psi) \leq M_D.$$

<u>Oletus</u>: f Riemann-integroituva yli E:n $\Rightarrow$ $\forall \varepsilon > 0$ $\exists$ jako D kuten yllä s.e.

(3.21) $$m_D \leq (\mathrm{R})\int_E f \leq M_D \text{ (aina)} \quad \text{ja} \quad 0 \leq M_D - m_D < \varepsilon.$$

Annetaan $\varepsilon \to 0$, jolloin (3.20) ja (3.21) $\Rightarrow$

$$(\mathrm{R})\int_E f = \int_E f.$$

□

Huomautus 3.22. Tapaus E rajoittamaton (epäoleellinen Riemann-int.) monimutkaisempi. Lauseen 3.19 vastine pätee, jos $f \geq 0$, yleisessä tapauksessa ei.

Lebesguen integraali on yleisempi kuin Riemann-integraali:

Esimerkki 3.23. Olkoon $f = \chi_{\mathbb{Q}}$, $\mathbb{Q}$ = rationaaliluvut. f yksinkertainen, sillä $f^{-1}(1) = \mathbb{Q}$ ja $f^{-1}(0) = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ mitallisia.

$$\int_E f = m(E \cap \mathbb{Q}) = 0 \quad \forall \text{ mitallisilla } E \subset \mathbb{R}.$$

Toisaalta f ei ole Riemann-integroituva minkään välin $[a,b]$, $a < b$, yli: Olkoon $D = \{I_1, \dots, I_k\}$ välin $[a,b]$ jako osaväleihin. Jokainen I_i sisältää sekä rationaali- että irrationaalilukuja

$$\Rightarrow \; m_D = \sum_i 0 \cdot \ell(I_i) = 0 \text{ ja } M_D = \sum_i 1 \cdot \ell(I_i) = b - a.$$

Lause 3.24. *Olkoon $f\colon E \to \dot{\mathbb{R}}$ mitallinen, $f \geq 0$ ja $\int_E f < \infty$. Silloin $f(x) < \infty$ m.k. $x \in E$.*

Tod. Merkitään $A = \{x \in E\colon f(x) = \infty\}$ (mitallinen joukko, sillä f on mitallinen).

$$\begin{gathered} f(x) \geq j \quad \forall x \in A,\ j = 1,2,\dots \;\Rightarrow\; j\chi_A \leq f\chi_E \quad \forall j \\ \Rightarrow \int_E f \geq I(j\chi_A) = jm(A) \quad \forall j \\ 0 \leq m(A) \leq \frac{1}{j} \underbrace{\int_E f}_{<\infty} \xrightarrow{j\to\infty} 0 \;\Rightarrow\; m(A) = 0. \end{gathered}$$

□

Monotonisen konvergenssin lause.

Lause 3.25. (MKL) *Olkoot $f_j\colon E \to \dot{\mathbb{R}}$ mitallisia,*

$$0 \leq f_1 \leq f_2 \leq \cdots \leq f_j \leq f_{j+1} \leq \cdots.$$

Tällöin

$$\lim_{j\to\infty} \int_E f_j = \int_E \lim_{j\to\infty} f_j \quad \textit{(voi olla } +\infty\textit{)}.$$

Tod. $f_j \leq f_{j+1} \;\Rightarrow\; \int_E f_j \leq \int_E f_{j+1} \;\Rightarrow\; \exists$ raja-arvo $\lim_{j\to\infty} \int_E f_j = a$ $(\in [0,\infty])$. Samoin $\exists\ f = \lim_{j\to\infty} f_j$, joka on mitallinen (L. 2.23).

$$f_j \leq f \;\Rightarrow\; \int_E f_j \leq \int_E f \;\Rightarrow\; a \leq \int_E f.$$

Osoitettava: $\int_E f \leq a$.

Voi olettaa: $E = \mathbb{R}^n$ (muutoin korvataan f_j, f funktioilla $f_j\chi_E$, $f\chi_E$ (huom. $f_j\chi_E \nearrow f\chi_E$)). Olkoot $0 < b < 1$, $\varphi \in Y$, $\varphi \leq f$. Merkitään

$$E_j = \{x \in \mathbb{R}^n\colon f_j(x) \geq b\varphi(x)\} = \{x \in \mathbb{R}^n\colon \big(f - b\varphi\big)(x) \geq 0\} \quad \text{(mitallinen joukko).}$$

$$f_j(x) \leq f_{j+1}(x)\ \forall x,\ \forall j \;\Rightarrow\; E_j \subset E_{j+1}\ \forall j.$$

<u>Väite</u>: $\mathbb{R}^n = \bigcup_{j=1}^{\infty} E_j$.
Olkoon $x \in \mathbb{R}^n$ mielivaltainen.

$$\text{Jos } \varphi(x) = 0, \text{ niin } x \in E_1.$$

$$\text{Jos } \varphi(x) > 0 \text{ niin } b\varphi(x) < \varphi(x) \le f(x) \quad (\text{koska } 0 < b < 1 \text{ ja } \varphi(x) < \infty).$$
$$\Rightarrow \exists j \text{ s.e. } b\varphi(x) \le f_j(x) \ \Rightarrow\ x \in E_j.$$
$$\text{Siis } \mathbb{R}^n = \bigcup_{j=1}^{\infty} E_j.$$

$$f_j \ge f_j\chi_{E_j} \ge b\varphi\chi_{E_j}$$
$$\Rightarrow \int_{\mathbb{R}^n} f_j \ge \int_{\mathbb{R}^n} b\varphi\chi_{E_j} = bI(\varphi, E_j) \xrightarrow{3.9} bI\big(\varphi, \underbrace{\bigcup_{j=1}^{\infty} E_j}_{=\mathbb{R}^n}\big) = bI(\varphi), \text{ kun } j \to \infty$$
$$\Rightarrow a = \lim_{j\to\infty} \int_E f_j \ge bI(\varphi) \quad \forall \varphi \in Y,\ \varphi \le f$$
$$\overset{\sup}{\Longrightarrow} a \ge b\int_{\mathbb{R}^n} f \quad \forall\, 0 < b < 1$$
$$\overset{b\to 1-}{\Longrightarrow} a \ge \int_{\mathbb{R}^n} f.$$

□

Huomautus 3.26. Aina ei saa vaihtaa operaatioiden $\int$ ja lim järjestystä: esim.

$$f_j = j\chi_{(0,1/j]}, \quad f_j \in Y, \quad I(f_j) = j\frac{1}{j} = 1 \quad \forall\, j$$
$$f_j(x) \xrightarrow{j\to\infty} 0 \quad \forall\, x \in \mathbb{R}$$
$$\Rightarrow \int_{\mathbb{R}} \lim_{j\to\infty} f_j = 0 \ne 1 = \lim_{j\to\infty}\int_{\mathbb{R}} f_j \quad (\text{jono } (f_j) \text{ ei ole nouseva}).$$

Esimerkki 3.27. (Loppukoe menneiltä vuosilta) Laske raja-arvo

$$\lim_{x\to 0+} \int_0^{\infty} \frac{e^{-xt}}{1+t^2}\, dt.$$

<u>Ratk.</u> Diff I $\Rightarrow$ riittää tutkia raja-arvoa

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^{\infty} \frac{e^{-x_n t}}{1+t^2}\, dt$$

<u>kaikilla</u> jonoilla (x_n), s.e. $x_n \ge x_{n+1} > 0$ ja $x_n \searrow 0$. Merkitään

$$f_n(t) = \frac{e^{-x_n t}}{1+t^2}, \quad t \in [0, \infty) \text{ ja } n = 1, 2, \dots$$

$$x_n \ge x_{n+1} > 0 \text{ ja } t \in [0, \infty) \ \Rightarrow\ e^{-x_n t} \le e^{-x_{n+1} t}$$
$$\Rightarrow\ 0 \le f_n(t) = \frac{e^{-x_n t}}{1+t^2} \le \frac{e^{-x_{n+1} t}}{1+t^2} = f_{n+1}(t)$$

eli (f_n) kasvava jono. Lisäksi

$$f_n(t) = \frac{e^{-x_n t}}{1+t^2} \xrightarrow{n\to\infty} \frac{e^{0\cdot t}}{1+t^2} = \frac{1}{1+t^2} \quad \forall\, t \in [0,\infty).$$

MKL $\Rightarrow$

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^\infty f_n(t)\,dt = \int_0^\infty \lim_{n\to\infty} f_n(t)\,dt = \int_0^\infty \frac{1}{1+t^2}\,dt \overset{(*)}{=} \lim_{j\to\infty} \int_0^j \frac{1}{1+t^2}\,dt$$
$$\overset{3.19}{=} \lim_{j\to\infty} \Big/_0^j \arctan t = \lim_{j\to\infty} \big(\arctan j - \arctan 0\big) = \pi/2.$$

$(*)$:n perustelu: MKL sovellettuna kasvavaan jonoon (g_j),

$$g_j(t) = \frac{\chi_{[0,j]}(t)}{1+t^2}.$$

(<u>Huom.</u> Lauseessa 3.19 oletettiin, että E on rajoitettu.)

Lause 3.28. *Olkoon $E \subset \mathbb{R}^n$ mitallinen ja $f_1,\dots,f_k\colon E \to \dot{\mathbb{R}}$ mitallisia s.e. $f_j \ge 0$. Silloin*

$$\int_E \sum_{j=1}^k f_k = \sum_{j=1}^k \int_E f_k.$$

Tod. Voi olettaa: $E = \mathbb{R}^n$ ja $k = 2$ (yleinen k induktiolla). Approksimointilause 3.14 $\Rightarrow$ $\exists$ kasvavat jonot (φ_j), (ψ_j) 1-kertaisia funktioita s.e.

$$\varphi_j \nearrow f_1 \quad \text{ja} \quad \psi_j \nearrow f_2\,, \quad \text{kun } j \to \infty.$$

$$\left.\begin{array}{c} 3.10 \;\Rightarrow\; I(\varphi_j+\psi_j) = I(\varphi_j) + I(\psi_j) \\[2ex] \text{MKL} \;\Rightarrow\; I(\varphi_j) = \int \varphi_j \to \int f_1 \;\text{ ja }\; I(\psi_j) \to \int f_2 \\[2ex] \text{samoin } \varphi_j+\psi_j \nearrow f_1+f_2 \text{ ja MKL } \;\Rightarrow \\[2ex] I(\varphi_j+\psi_j) \to \int (f_1+f_2) \end{array}\right\} \Rightarrow \int (f_1+f_2) = \int f_1 + \int f_2\,.$$

$\square$

Beppo Levin lause.

Lause 3.29. *Olkoon $E \subset \mathbb{R}^n$ mitallinen ja $f_j\colon E \to \dot{\mathbb{R}}$ mitallisia s.e. $f_j \ge 0$. Tällöin*

$$\int_E \Big(\sum_{j\in\mathbb{N}} f_j\Big) = \sum_{j\in\mathbb{N}} \int_E f_j.$$

Toisin sanoen, positiivitermisen sarjan saa integroida termeittäin.

Tod. Merkitään $u_k = \sum_{j=1}^k f_j$. Silloin

$$0 \le u_1 \le u_2 \le \cdots \quad \text{ja} \quad u_k \to \sum_{j=1}^\infty f_j \overset{\text{merk.}}{=} u.$$

MKL ja L. 3.28 $\Rightarrow$

$$\int_E u = \int_E \lim_{k\to\infty} u_k \overset{\text{MKL}}{=} \lim_{k\to\infty} \int_E u_k \overset{3.28}{=} \lim_{k\to\infty} \sum_{j=1}^{k} \int_E f_j = \sum_{j=1}^{\infty} \int_E f_j.$$

$\square$

Seuraava konvergenssitulos on myös erittäin tärkeä!

Lause 3.30. (**Fatoun lemma**). *Olkoon $E \subset \mathbb{R}^n$ mitallinen ja $f_j \colon E \to \dot{\mathbb{R}}$ mitallisia s.e. $f_j \geq 0 \ \forall\ j \in \mathbb{N}$. Silloin*

$$\int_E \liminf_{j\to\infty} f_j \leq \liminf_{j\to\infty} \int_E f_j \qquad (\textit{voi olla } +\infty).$$

Tod. Merkitään

$$g_k(x) = \inf_{j\geq k} f_j(x), \quad x \in E.$$

Silloin

$$0 \leq g_k \leq g_{k+1} \quad \forall\ k \in \mathbb{N}$$
$$g_k \ \text{ mitallinen (L. 2.23)}$$
$$g_k \leq f_k \ \text{ ja } \ \lim_{k\to\infty} g_k = \liminf_{j\to\infty} f_j$$

$$\text{MKL} \ \Rightarrow \ \int_E \liminf_{j\to\infty} f_j = \int_E \lim_{k\to\infty} g_k \overset{\text{MKL}}{=} \lim_{k\to\infty} \int_E g_k = \liminf_{k\to\infty} \int_E g_k \underset{g_k\leq f_k}{\leq} \liminf_{k\to\infty} \int_E f_k\,.$$

$\square$

Esimerkki 3.31. (1)

$$f_j = j\chi_{(0,1/j]}$$
$$\lim_{j\to\infty} f_j(x) = 0 \ \forall\ x \in \mathbb{R} \ \Rightarrow \ \liminf_{j\to\infty} f_j = 0$$
$$\int_{\mathbb{R}} f_j = 1 \ \forall\ j$$

Fatou pätee muodossa $0 \leq 1$.

(2)

$$f_j = \chi_{[j,2j]}$$
$$\lim_{j\to\infty} f_j(x) = 0 \ \forall\ x \in \mathbb{R} \ \Rightarrow \ \liminf_{j\to\infty} f_j = 0$$
$$\int_{\mathbb{R}} f_j = m([j,2j]) = j \to \infty \ \text{ kun } j \to \infty$$

Fatou pätee muodossa $0 \leq \infty$.

Integraali joukkofunktiona on mitta:

Lause 3.32. *Olkoon $f \colon \mathbb{R}^n \to \dot{\mathbb{R}}$ mitallinen, $f \geq 0$. Silloin kuvaus*

$$\operatorname{Leb} \mathbb{R}^n \to [0,+\infty], \quad E \mapsto \int_E f$$

on <u>mitta</u>, t.s.

(i)

$$\int_{\emptyset} f = 0\,,$$

(ii) jos $E_j \subset \mathbb{R}^n$ *ovat mitallisia ja erillisiä, niin*

$$\int_{\bigcup_{j=1}^{\infty} E_j} f = \sum_{j=1}^{\infty} \int_{E_j} f\,.$$

Erityisesti:

(iii) $E_1 \subset E_2 \subset \cdots \subset \mathbb{R}^n$ *mitallisia* $\Rightarrow$

$$\int_{\bigcup_{j=1}^{\infty} E_j} f = \lim_{j\to\infty} \int_{E_j} f\,,$$

(iv) $\mathbb{R}^n \supset E_1 \supset E_2 \supset \cdots$ *mitallisia ja* $\int_{E_1} f < \infty \;\Rightarrow$

$$\int_{\bigcap_{j=1}^{\infty} E_j} f = \lim_{j\to\infty} \int_{E_j} f\,,$$

Tod. (i): L. 3.18 (4); (ii): HT; (iii) ja (iv): Mitan konvergenssilauseet 1.59 ja 1.60. □

Lause 3.33. *(i) Olkoot* $f, g\colon E \to \dot{\mathbb{R}}$ *mitallisia ja* $f \geq 0,\ g \geq 0$. *Jos* $f = g$ *m.k. E:ssä, niin*

$$\int_E f = \int_E g\,.$$

Erityisesti: $f \geq 0$ *mitallinen ja määritelty m.k. E:ssä* $\Rightarrow$ $\int_E f$ *hyvin määritelty.*

(ii) Olkoon $f\colon E \to \dot{\mathbb{R}}$ *mitallinen,* $f \geq 0$. *Jos* $\int_E f = 0$, *niin* $f = 0$ *m.k. E:ssä.*

Tod. (i): Merkitään $A = \{x \in E\colon f(x) \neq g(x)\}$. Oletus $\Rightarrow$ $m(A) = 0$.

$$\int_E f \overset{3.32}{=} \int_{\underbrace{E \setminus A}_{f=g}} f + \underbrace{\int_A f}_{=0} = \int_{E\setminus A} g + \int_A g = \int_E g.$$

(ii): Vastaoletus: $m\big(\{x \in E\colon f(x) > 0\}\big) > 0$. HT 5/4 $\Rightarrow$ $\exists\, r > 0$ s.e.

$$m\big(\underbrace{\{x \in E\colon f(x) > r\}}_{\text{merk. } =A}\big) > 0$$

$$\Rightarrow \int_E f \overset{(*)}{\geq} \int_A f \overset{(**)}{\geq} r \int_A \chi_A = rm(A) > 0. \quad \underline{\text{RR}} \quad \square$$

$$[(*):\ A \subset E, \qquad (**):\ f\chi_A \geq r\chi_A]$$

Lisätieto: Olkoon (X, Γ, μ) mitta-avaruus, f Γ-mitallinen funktio $X \to [0, \infty]$. Määritellään f:n <u>integraali</u>

$$\int_X f = \sup\{I(\varphi)\colon \varphi\colon X \to \mathbb{R} \text{ 1-kert.},\ \varphi \leq f\},$$

$$\int_E f = \int_X f\chi_E, \quad \text{kun } E \in \Gamma.$$

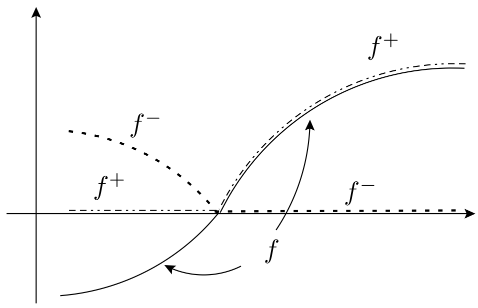
Luvun 3.13 tulokset (paitsi Lause 3.19 (Riemann-int.)) voimassa. Todistuksissa korvataan $\mathbb{R}^n$ X:llä ja Leb $\mathbb{R}^n$ σ-algebralla $\Gamma \subset \mathcal{P}(X)$. Usein oletetaan, että X:llä on ns. σ-äärellinen mitta, ts.

$$X = \bigcup_{j=1}^{\infty} \Omega_j, \quad \text{missä } \Omega_j \in \Gamma,\ \mu(\Omega_j) < \infty.$$

3.34 Lebesguen integraali: vaihtuvamerkkiset funktiot

Olkoon $f\colon E \to \dot{\mathbb{R}}$ mitallinen, $E \subset \mathbb{R}^n$. Merkitään

$$f^+(x) = \max\{f(x), 0\} \qquad (= \tfrac{1}{2}\big(|f| + f\big) \text{ mitallinen})$$
$$f^-(x) = -\min\{f(x), 0\} \qquad (= \tfrac{1}{2}\big(|f| - f\big) \text{ mitallinen}).$$



Tällöin

$$f^+(x) \geq 0, \qquad f^-(x) \geq 0$$

$$f(x) = f^+(x) - f^-(x), \qquad |f(x)| = f^+(x) + f^-(x).$$

(Huom. yllä ei synny tapausta $\infty - \infty$, sillä aina joko $f^+(x) = 0$ tai $f^-(x) = 0$.)
Luku 3.13 $\Rightarrow$

$$\int_E f^+ \quad \text{ja} \quad \int_E f^- \quad \text{määriteltyjä} \ \ (\in [0, +\infty]).$$

Voidaanko määritellä aina

$$\int_E f = \int_E f^+ - \int_E f^- \quad (\text{vrt. } f = f^+ - f^-)?$$

Ei, sillä voi tulla $\infty - \infty$, joka ei ole määritelty!

Määritelmä 3.35. Funktio $f\colon E \to \dot{\mathbb{R}}$ on integroituva E:ssä (tai lyh. integroituva), jos f mitallinen ja jos $\int_E f^+ < \infty$ ja $\int_E f^- < \infty$. Tällöin f:n integraali yli E:n on

$$\int_E f = \int_E f^+ - \int_E f^- \quad (\in \mathbb{R}).$$

Lause 3.36. *Funktio $f\colon E \to \dot{\mathbb{R}}$ on integroituva E:ssä $\iff$ f on mitallinen ja*

$$\int_E |f| < \infty.$$

Tällöin pätee

$$\Big|\int_E f\Big| \leq \int_E |f|.$$

Tod. $\boxed{\Rightarrow}$ Mitallisuus sisältyy määritelmään. Lisäksi

$$|f| = \underbrace{f^+}_{\geq 0} + \underbrace{f^-}_{\geq 0} \overset{3.28}{\Longrightarrow} \int_E |f| = \underbrace{\int_E f^+}_{<\infty} + \underbrace{\int_E f^-}_{<\infty} < \infty.$$

$\boxed{\Leftarrow}$

$$\left.\begin{array}{l} 0 \leq f^+ \leq |f| \ \Rightarrow\ \int_E f^+ \leq \int_E |f| < \infty \\ 0 \leq f^- \leq |f| \ \Rightarrow\ \int_E f^- \leq \int_E |f| < \infty \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad f \text{ integroituva } E\text{:ssä.}$$

Lisäksi:

$$\left|\int_E f\right| = \left|\int_E f^+ - \int_E f^-\right| \leq \underbrace{\left|\int_E f^+\right|}_{\geq 0} + \underbrace{\left|\int_E f^-\right|}_{\geq 0} = \int_E f^+ + \int_E f^-$$

$$\overset{3.28}{=} \int_E (f^+ + f^-) = \int_E |f|. \quad \square$$

Huomautus 3.37. f integroituva E:ssä $\overset{3.24,\ 3.36}{\Longrightarrow}$ $|f(x)| < \infty$ m.k. $x \in E$.

Lause 3.38. (**Majoranttiperiaate**) *Jos $f\colon E \to \dot{\mathbb{R}}$ on mitallinen, $|f| \leq g$ ja g integroituva E:ssä, niin silloin f on integroituva E:ssä.*

Tod.

$$\int_E |f| \leq \int_E g < \infty \quad \square$$

Huomautus 3.39. Riittää, että $|f| \leq g$ m.k. E:ssä, eli

$$m\big(\underbrace{\{x \in E\colon |f(x)| > g(x)\}}_{=A}\big) = 0, \quad \text{jolloin} \quad \int_E |f| = \underbrace{\int_{E\setminus A} |f|}_{<\infty} + \underbrace{\int_A |f|}_{=0} < \infty.$$

Lause 3.40. *Jos $f\colon E \to \mathbb{R}$ mitallinen ja Riemann-integroituva, niin silloin f on Lebesgue-integroituva E:ssä ja*

$$\int_E f = (\mathrm{R}) \int_E f\,.$$

Tod.

$$f^+ = \frac{1}{2}\big(|f| + f\big), \quad f^- = \frac{1}{2}\big(|f| - f\big) \quad \text{Riem.-integroituvia}$$

$$\overset{3.19}{\Longrightarrow} \ f^+ \ \text{ ja } \ f^+ \quad \text{Leb.-integroituvia ja Riem./Leb.-integraalit samat}$$

$$\Rightarrow \int_E f = \int_E f^+ - \int_E f^- = (\mathrm{R}) \int_E f^+ - (\mathrm{R}) \int_E f^- = (\mathrm{R}) \int_E f\,. \quad \square$$

Esimerkki 3.41. Olkoon $E = [1, \infty)$, $f\colon E \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^{-2} \sin x$. f jatkuva $\Rightarrow$ f mitallinen.

$$|f(x)| \leq x^{-2} \underset{\text{merk.}}{=} g(x),$$

$$g \ \text{ integroituva } E\text{:ssä} \overset{3.38}{\Longrightarrow} f \text{ integroituva } E\text{:ssä.}$$

Huom. g integroituva, koska MKL sovellettuna kasvavaan jonoon (g_j), $g_j(x) = \begin{cases} g(x), & \text{kun } 1 \le x \le j \\ 0, & \text{kun } x > j, \end{cases}$

$$\Rightarrow \int_E g \overset{\text{MKL}}{=} \lim_{j\to\infty} \int_E g_j \overset{3.19}{=} \lim_{j\to\infty} \int_1^j x^{-2}\,dx = -\lim_{j\to\infty} \Big/_1^j x^{-1} = \lim_{j\to\infty}(1 - 1/j) = 1.$$

Esimerkki 3.42. Olkoon $E = [1,\infty)$, $f\colon E \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^{-1}\sin x$. f jatkuva $\Rightarrow$ f mitallinen.
Väite: f ei ole Leb.-integroituva E:ssä.

$$\int_E |f| = \int_1^\pi |f| + \sum_{k=1}^\infty \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{|\sin x|}{|x|}\,dx \ge \int_1^\pi |f| + \frac{2}{\pi} \underbrace{\sum_{k=1}^\infty \frac{1}{k+1}}_{\text{harm. sarja}} = \infty,$$

sillä

$$\int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{|\sin x|}{|x|}\,dx \ge \frac{1}{(k+1)\pi} \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} |\sin x|\,dx \overset{\text{jaksoll.}}{=} \frac{1}{(k+1)\pi} \underbrace{\int_0^\pi |\sin x|\,dx}_{=2}.$$

Siis f ei ole integroituva E:ssä.
Kuitenkin $\exists$ epäoleellinen (Riemann-)integraali

$$\lim_{c\to\infty} \underbrace{\int_1^c \frac{\sin x}{x}\,dx}_{=I(c)}.$$

Tod.

$$I(n\pi) = \int_1^\pi \frac{\sin x}{x}\,dx + \underbrace{\sum_{k=1}^{n-1} \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{\sin x}{x}\,dx}_{\text{vuorotteleva sarja}},$$

missä

$$\Big| \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{\sin x}{x}\,dx \Big| \searrow 0\,, \text{ kun } k \to \infty\,.$$

Leibnitzin lause (Diff I) $\Rightarrow$ sarja

$$\sum_{k=1}^\infty \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{\sin x}{x}\,dx$$

suppenee, ts.

$$\exists \lim_{n\to\infty} I(n\pi) \overset{\text{merk.}}{=} a.$$

Jos $c \ge \pi$, niin $c \in [n\pi, (n+1)\pi)$ jollakin $n \in \mathbb{N}$, jolloin

$$|I(c) - I(n\pi)| = \Big| \int_{n\pi}^c \frac{\sin x}{x}\,dx \Big| \le \int_{n\pi}^c \frac{1}{n\pi}\,dx \le \frac{1}{n}$$
$$\Rightarrow I(c) \to a, \quad \text{kun } c \to \infty\,.$$

Siis: Funktion epäoleellinen (Riemann-)integraali voi olla olemassa (eli supeta), vaikkei funktio olisi Lebesgue-integroituva. Leb. integroituvuuteen vaaditaan itseinen suppeneminen.

Lause 3.43. *Olkoon $E \subset \mathbb{R}^n$ mitallinen, $f, g\colon E \to \dot{\mathbb{R}}$ integroituvia E:ssä ja $\lambda \in \mathbb{R}$. Silloin* *(i)* $f+g$ *integroituva* E*:ssä ja* $\int_E (f+g) = \int_E f + \int_E g$;

(ii) λf *integroituva* E*:ssä ja* $\int_E \lambda f = \lambda \int_E f$;

(iii) $f \le g \;\Rightarrow\; \int_E f \le \int_E g$;

(iv) $m(E) = 0 \;\Rightarrow\; \int_E f = 0$;

(v) $f = g$ *m.k.* E*:ssä* $\;\Rightarrow\; \int_E f = \int_E g$.

Huomautus 3.44. f, g integroituvia E:ssä $\Rightarrow$ $f(x), g(x) \in \mathbb{R}$ m.k. $x \in E$ $\Rightarrow$ $f+g$ määritelty m.k. E:ssä.

Tod. (i): Merkitään $h = f+g$. Silloin h on määritelty m.k. ja mitallinen.

$$|h| \le |f| + |h| \;\Rightarrow\; \int_E |h| \le \int_E |f| + \int_E |g| < \infty \;\Rightarrow\; h \text{ integroituva}$$

Yleensä $h^+ \ne f^+ + g^+$, mutta m.k. E:ssä pätee:

$$h^+ - h^- = h = f + g = f^+ - f^- + g^+ - g^-$$

$$\Rightarrow\; h^+ + f^- + g^- = h^- + f^+ + g^+ \qquad \text{(funktiot} \ge 0\text{, integr. puolittain (L. 3.28))}$$

$$\Rightarrow\; \int_E h^+ + \int_E f^- + \int_E g^- = \int_E h^- + \int_E f^+ + \int_E g^+ \qquad \text{(integraalit} < \infty\text{)}$$

$$\begin{aligned}\Rightarrow\; \int_E h = \int_E h^+ - \int_E h^- &= \int_E f^+ - \int_E f^- + \int_E g^+ - \int_E g^- \\ &= \int_E f + \int_E g.\end{aligned}$$

(ii): (a) $\lambda \ge 0$

$$\begin{aligned}&(\lambda f)^+ = \lambda f^+ \quad \text{ja} \quad (\lambda f)^- = \lambda f^- \\ \Rightarrow\; &\int_E (\lambda f)^+ = \lambda \int_E f^+ \quad \text{ja} \quad \int_E (\lambda f)^- = \lambda \int_E f^- \\ \Rightarrow\; &\text{väitös}\end{aligned}$$

(b) $\lambda < 0$

$$(\lambda f)^+ = (-\lambda) f^- \quad \text{ja} \quad (\lambda f)^- = (-\lambda) f^+, \quad \text{josta väitös kuten edellä}$$

(iii): (i) ja (ii) $\Rightarrow$ $g - f$ integroituva ja

$$\int_E g = \int_E f + \int_E \underbrace{(g-f)}_{\ge 0} \ge \int_E f$$

(iv): $m(E) = 0 \;\Rightarrow\; \int_E f^+ = 0$ ja $\int_E f^- = 0 \;\Rightarrow\; \int_E f = 0$

(v): $f = g$ m.k. E:ssä $\Rightarrow$ $f^+ = g^+$, $f^- = g^-$ m.k. E:ssä

$$\Rightarrow\; \int_E f^+ = \int_E g^+ \quad \text{ja} \quad \int_E f^- = \int_E g^- \;\Rightarrow\; \text{väitös} \quad \square$$

Konvergenssilauseet

Lause 3.45. (**Dominoidun konvergenssin lause, DKL**) *Olkoon $E \subset \mathbb{R}^n$ mitallinen ja $f_j \colon E \to \dot{\mathbb{R}}$, $j \in \mathbb{N}$, mitallisia funktioita s.e.*

$$f(x) = \lim_{j\to\infty} f_j(x) \quad m.k.\ x \in E\,.$$

Jos $\exists\ g \colon E \to \dot{\mathbb{R}}$ s.e. g on integroituva E:ssä ja

$$|f_j(x)| \le g(x),\ \forall\ j \in \mathbb{N},\ ja\ m.k.\ x \in E\,,$$

niin f on integroituva E:ssä ja

$$\int_E f = \lim_{j\to\infty} \int_E f_j\,. \qquad (Huom.\ \int_E f \in \mathbb{R})$$

Tod. Määrittelemällä f_j, f ja g uudelleen 0-mittaisessa joukossa, voidaan olettaa, että

$$\begin{aligned} &f_j(x) \xrightarrow{j\to\infty} f(x) \quad \forall\ x \in E \ \text{ ja} \\ &|f_j(x)| \le g(x) \quad \forall\ x \in E \end{aligned}$$

$$\Rightarrow |f(x)| \le |g(x)| \quad \forall\ x \in E\,.$$

g integroituva E:ssä, Majoranttiperiaate (L. 3.38) $\Rightarrow$ f integroituva E:ssä.

$$g + f_j \ge 0 \quad \text{ja} \quad g + f_j \to g + f \overset{\text{Fatou}}{\Longrightarrow}$$

$$\begin{aligned} \int_E g + \int_E f = \int_E (g+f) &\overset{\text{Fatou}}{\le} \liminf_{j\to\infty} \int_E (g + f_j) = \liminf_{j\to\infty} \Big(\int_E g + \int_E f_j\Big) \\ &= \int_E g + \liminf_{j\to\infty} \int_E f_j \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \int_E f \le \liminf_{j\to\infty} \int_E f_j \quad (\text{huom. } \int_E g < \infty)$$

$$g - f_j \ge 0\,, \quad \text{joten}$$

$$\begin{aligned} \int_E g - \int_E f = \int_E (g-f) &\overset{\text{Fatou}}{\le} \liminf_{j\to\infty} \int_E (g - f_j) = \liminf_{j\to\infty} \Big(\int_E g - \int_E f_j\Big) \\ &= \int_E g - \limsup_{j\to\infty} \int_E f_j \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \int_E f \ge \limsup_{j\to\infty} \int_E f_j\,.$$

Siis

$$\int_E f \le \liminf_{j\to\infty} \int_E f_j \le \limsup_{j\to\infty} \int_E f_j \le \int_E f \quad \Rightarrow \quad \text{väite} \quad \square$$

Esimerkki 3.46. (vanha loppukoetehtävä) Laske

$$\lim_{n\to\infty} n \int_0^1 x^{-3/2} \sin\frac{x}{n}\, dx\,.$$

Olkoon $f_n(x) = nx^{-3/2}\sin\frac{x}{n} = \big(\underbrace{(n/x)\sin(x/n)}_{\to 1,\ \text{kun}\ n\to\infty}\big)x^{-1/2} \xrightarrow{n\to\infty} x^{-1/2} \overset{\text{merk.}}{=} f(x)$, jolloin

$$\int_0^1 f \overset{(*)}{=} \Big/_0^1 2\sqrt{x} = 2.$$

$$|\sin t| \le t\ \forall\ t \ge 0\ \Rightarrow\ |(n/x)\sin(x/n)| \le 1 \quad \forall\ n\in\mathbb{N},\ \forall\ x\in(0,1]$$
$$\Rightarrow\ |f_n(x)| \le x^{-1/2} = g(x)\ \big(= f(x)\big),\ g \text{ integroituva yli välin } [0,1]$$
$$\text{DKL}\ \Rightarrow\ \int_0^1 f_n \to \int_0^1 f = 2.$$

[(∗): Tarkasti ottaen ei saada suoraan Riem.-integraalina, sillä f on rajoittamaton välillä $[0,1]$. Voidaan käyttää MKL:ää kuten Esim. s. 58.]

Erikoistapaus DKL:stä:

Lause 3.47. (**Tasaisesti rajoitetun konvergenssin lause, TRKL**) *Olkoon* $m(E) < \infty$, $f_j\colon E \to \mathbb{R}$ *jono integroituvia funktioita,* $f_j \to f$ *m.k. Jos* $\exists\ M < \infty$ *s.e.* $|f_j(x)| \le M\ \forall\ x\in E,\ j\in\mathbb{N}$, *niin*

$$\int_E f = \lim_{j\to\infty}\int_E f_j\,.$$

Tod. Valitaan $g(x) = M$.

$$m(E) < \infty\ \Rightarrow\ \int_E g = Mm(E) < \infty\ \Rightarrow\ g \text{ integroituva}$$
$$\overset{\text{DKL}}{\Longrightarrow}\ \text{väite}\quad \square$$

Lisätieto: <u>Jatkuvien</u> ja tasaisesti rajoitettujen funktioiden tapauksessa saadaan <u>Riemann</u>-integraalille seuraava lisätieto:

Korollari 3.48. *Olkoon* $f_j\colon [a,b]\to\mathbb{R},\ j\in\mathbb{N}$, *jono jatkuvia funktioita s.e.*

- $|f_j(x)| \le M \quad \forall\ x\in[a,b],\ j\in\mathbb{N}$,
- $\exists$ *raja-arvo* $f(x) = \lim_{j\to\infty} f_j(x) \quad \forall\ x\in[a,b]$,
- *rajafunktio* f *on* <u>*jatkuva*</u> $[a,b]$*:ssä.*

Silloin (<u>Riemann</u>-integraali)

$$(\mathrm{R})\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{j\to\infty}(\mathrm{R})\int_a^b f_j(x)\,dx\,.$$

Tod. f, f_j jatkuvia $[a,b]$:ssä

$$\overset{\text{L. 3.40}}{\Longrightarrow}\ (\mathrm{R})\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f \quad \text{ja} \quad (\mathrm{R})\int_a^b f_j(x)\,dx = \int_a^b f_j$$
$$\overset{\text{TRKL}}{\Longrightarrow}\ \int_a^b f = \lim_{j\to\infty}\int_a^b f_j.\quad \square$$

Huom. Diff I:ssä 3.48 todistettu lisäoletuksella $f_j \xrightarrow{j\to\infty} f$ tasaisesti $[a,b]$:ssä, t.s.

$$\sup_{a\le x\le b} |f_j(x) - f(x)| \xrightarrow{j\to\infty} 0\,.$$

Yo. todistus käyttää mittateoriaa (Lebesguen mitta, MKL, Fatou, DKL, ...). 3.48:n todistaminen ilman mittateoriaa on hankalaa: ks. S. Simons: An eigenvector proof of Fatou's lemma for continuous functions. Mathematical Intelligencer 17 (1995), 67–70.

Yhteenveto konvergenssilauseista:

$$\lim_{j\to\infty} \int_E f_j = \int_E \lim_{j\to\infty} f_j\,, \quad \text{jos}$$

MKL: $0 \le f_1 \le f_2 \le \cdots$;

DKL: $|f_j| \le g,\ g$ integroituva;

TRKL: $|f_j| \le M,\ m(E) < \infty$;

Lisäksi **Fatou:** $f_j \ge 0 \ \Rightarrow$

$$\int_E \liminf_{j\to\infty} f_j \le \liminf_{j\to\infty} \int_E f_j\,.$$

Integroituvuus erillisen yhdisteen yli.

Lause 3.49. *Olkoot $E_j,\ j \in \mathbb{N}$, mitallisia ja erillisiä ja $E = \bigcup_{j=1}^{\infty} E_j$. Jos f on integroituva E:ssä, niin f on integroituva E_j:ssä $\forall\ j$ ja*

$$\int_E f = \sum_{j\in\mathbb{N}} \int_{E_j} f\,. \tag{3.50}$$

Kääntäen: jos f on integroituva E_j:ssä $\forall\ j$ ja

$$\sum_{j\in\mathbb{N}} \int_{E_j} |f| < \infty\,,$$

niin f on integroituva E:ssä ja (3.50) päätee.

Tod. L. 3.32 (ii) $\Rightarrow$

$$\int_E f^+ = \sum_{j\in\mathbb{N}} \int_{E_j} f^+\,, \quad \text{samoin } f^-\,.$$

f integroituva E:ssä $\Rightarrow$

$$\left.\begin{aligned} &\textstyle\int_E f^+ < \infty \ \Rightarrow\ \int_{E_j} f^+ < \infty\ \forall\ j \\ &\textstyle\int_E f^- < \infty \ \Rightarrow\ \int_{E_j} f^- < \infty\ \forall\ j \end{aligned}\right\} \Rightarrow\ f \text{ integroituva } E_j\text{:ssä } \forall\ j\,.$$

Lisäksi

$$\begin{aligned} \int_E f &= \int_E f^+ - \int_E f^- = \sum_{j\in\mathbb{N}} \int_{E_j} f^+ - \sum_{j\in\mathbb{N}} \int_{E_j} f^- \\ &\overset{(*)}{=} \sum_{j\in\mathbb{N}} \Big(\int_{E_j} f^+ - \int_{E_j} f^- \Big) = \sum_{j\in\mathbb{N}} \int_{E_j} f\,. \end{aligned}$$

$[(*):$ suppenevia sarjoja$]$

Kääntäen:

$$\left.\begin{array}{l} f|E_j \text{ mitallinen } \forall\, j \;\Rightarrow\; f \text{ mitallinen } E\text{:ssä} \\[2ex] \int_E |f| \overset{3.32}{=} \sum_{j\in\mathbb{N}} \int_{E_j} |f| \overset{\text{olet.}}{<} \infty \end{array}\right\} \Rightarrow f \text{ integroituva } E\text{:ssä ja (3.50) pätee.} \quad \square$$

Lisätieto: Olkoon (X,Γ,μ) mitta-avaruus. Sanotaan, että Γ-mitallinen funktio $f\colon E \to \dot{\mathbb{R}}$ on <u>integroituva</u> joukon $E \in \Gamma$ yli, jos

$$\int_E |f| < \infty \quad \left(\iff \int_E f^+ < \infty \text{ ja } \int_E f^- < \infty \right).$$

Integraalin arvo on

$$\int_E f = \int_E f^+ - \int_E f^- \quad (\in \mathbb{R})\,.$$

Luvun 3.34 tulokset (mm. MKL, DKL, jne.) ovat edelleen voimassa (paitsi yhteydet Riemann-integraaliin). Todistuksissa korvataan $\mathbb{R}^n$ joukolla X, Lebesgue-mitta m mitalla μ, jne.

4 Fubinin lauseet

<u>Tausta</u> (Diff II): Olkoon $A = [a,b] \times [c,d]$ suljettu 2-väli ja $f\colon A \to \mathbb{R}$ jatkuva funktio. Silloin f:n Riemann-integraali yli A:n voidaan laskea peräkkäisinä integraaleina:

$$\text{(R)} \int\!\!\int_A f(x,y)\,dxdy = \int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)\,dx \right) dy = \int_c^d \left(\int_a^b f(x,y)\,dy \right) dx\,.$$

Osoittautuu, että Lebesguen integraalilla on samanlainen ominaisuus hyvin yleisillä ehdoilla. Kyseiset tulokset (ns. Fubinin lauseet) kuuluvat Lebesguen integraalin hyödyllisimpiin ominaisuuksiin!

Todistuksessa käytetään seuraavaa lemmaa.

Määritelmä 4.1. n-väli $I \subset \mathbb{R}^n$ on <u>oikealle puoliavoin</u>, jos se on muotoa $[a_1,b_1) \times [a_n,b_n)$.

Lemma 4.2. *Jokainen avoin $G \subset \mathbb{R}^n$ on numeroituva yhdiste erillisistä oikealle puoliavoimista n-väleistä.*

Tod. Ol. $k \in \mathbb{N}$. Jaetaan $\mathbb{R}^n$ $(n-1)$-ulott. "tasoilla" $x_i = m/2^k$, $m \in \mathbb{Z}$, $i \in \{1,\dots,n\}$ oik. puoliavoimiin erillisiin kuutioihin, joiden sivun pituus $= 1/2^k$. Olkoon näiden joukko $= \tilde{N}_k$. (Huom.: $I \in \tilde{N}_k \;\Rightarrow\; I$:n halkaisija $= \sqrt{n}/2^k$.) Merkitään

$$\begin{aligned} \tilde{Q}_1 &= \{I \in \tilde{N}_1 \colon I \subset G\}\,; \\ \tilde{Q}_2 &= \{I \in \tilde{N}_2 \colon I \subset G,\ I \cap J = \emptyset\ \forall J \in \tilde{Q}_1\}\,; \\ \text{yleisesti } \tilde{Q}_k &= \{I \in \tilde{N}_k \colon I \subset G,\ I \cap J = \emptyset\ \forall J \in \tilde{Q}_1 \cup \ldots \cup \tilde{Q}_{k-1}\}\,. \end{aligned}$$

Tällöin $\tilde{Q} = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} \tilde{Q}_k$ on numeroituva perhe erill. oik. puoliavoimia kuutioita (valitse luku $a \in I \cap \mathbb{Q}^n$ jokaisesta $I \in \tilde{Q}_k \;\Rightarrow\; \forall\, \tilde{Q}_k$ numeroituva $\overset{\text{L. 0.16}}{\Longrightarrow}$ $\tilde{Q}$ numeroituva). <u>Osoitetaan</u>, että $G = \bigcup_{I\in\tilde{Q}} I$. Selvästi

$$\bigcup_{I\in\tilde{Q}} I \subset G\,.$$

Kääntäen: Ol. $x \in G$. G avoin $\Rightarrow$ $\exists\ B(x,r) \subset G$

$$\Rightarrow\ \exists\ k \in \mathbb{N} \text{ s.e. } \exists\ I \in \tilde{N}_k,\ x \in I \subset B(x,r) \qquad (\text{val. } k \text{ s.e. } \sqrt{n}/2^k < r).$$

Jos $I \in \tilde{Q}_k$, niin

$$x \in I \subset \bigcup_{I \in \tilde{Q}} I\,.$$

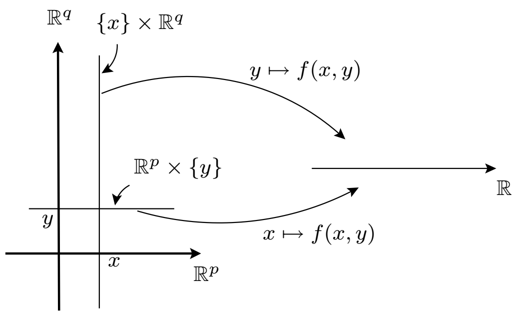
Jos taas $I \notin \tilde{Q}_k$, niin $\exists\ J \in \tilde{Q}_1 \cup \ldots \cup \tilde{Q}_{k-1}$ s.e. $I \cap J \neq \emptyset$. Konstruktio $\Rightarrow$ oltava $I \subset J$ (sillä joko $I \subset J$ tai $I \cap J = \emptyset$), joten

$$x \in I \subset J \subset \bigcup_{I \in \tilde{Q}} I\,.$$

$\square$

Identifioidaan $\mathbb{R}^{p+q} = \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q$, $p, q \in \mathbb{N}$.

$$z \in \mathbb{R}^{p+q} \iff z = (\underbrace{x_1, \ldots, x_p}_{=x \in \mathbb{R}^p}, \underbrace{y_1, \ldots, x_q}_{=y \in \mathbb{R}^q}) = (x,y).$$



Lause 4.3. (**Fubinin 1. lause,** $f \geq 0$) *Olkoon* $f\colon \mathbb{R}^{p+q} \to \dot{\mathbb{R}}$ *mitallinen ja* $f \geq 0$. *Tällöin*

(1)

$$y \mapsto f(x,y) \text{ mitallinen m.k. } x \in \mathbb{R}^p\,;$$
$$[\text{siis } m_p\big(\{x \in \mathbb{R}^p \colon y \mapsto f(x,y) \text{ ei-mitallinen}\}\big) = 0]$$

(2)

$$x \mapsto f(x,y) \text{ mitallinen m.k. } y \in \mathbb{R}^q\,;$$

(3)

$$x \mapsto \int_{\mathbb{R}^q} f(x,y)\, dm_q(y) \quad \text{mitallinen;}$$

(4)

$$y \mapsto \int_{\mathbb{R}^p} f(x,y)\, dm_p(x) \quad \text{mitallinen;}$$

(5)

$$\int_{\mathbb{R}^{p+q}} f \overset{(5a)}{=} \int_{\mathbb{R}^p} \left(\int_{\mathbb{R}^q} f(x,y)\, dm_q(y) \right) dm_p(x)$$
$$\overset{(5b)}{=} \int_{\mathbb{R}^q} \left(\int_{\mathbb{R}^p} f(x,y)\, dm_p(x) \right) dm_q(y)\,. \quad (+\infty \text{ sallittu})$$

Tod. Symmetria $\Rightarrow$ riittää todistaa (1), (3) ja (5a). Merkitään

$$P = \{f\colon \mathbb{R}^{p+q} \to \dot{\mathbb{R}} \mid f \geq 0 \text{ mitallinen ja toteuttaa ehdot (1), (3) ja (5a)}\}\,.$$

Pyrimme siis näyttämään: $f\colon \mathbb{R}^{p+q} \to \dot{\mathbb{R}},\ f \geq 0$, mitallinen $\Rightarrow\ f \in P$.

$\boxed{\text{Askel 1.}}$ Osoitetaan aluksi seur. yleiset ominaisuudet:

(a) $f, g \in P,\ a, b \geq 0\ \Rightarrow\ af + bg \in P$;

(b) $f, g \in P,\ g(z) < \infty\ \forall z,\ f - g \geq 0,\ \int_{\mathbb{R}^{p+q}} g < \infty\ \Rightarrow\ f - g \in P$;

(c) $f_j \in P,\ f_j \nearrow f\ \Rightarrow\ f \in P$;

(d) $f_j \in P\ \Rightarrow\ \sum_{j\in\mathbb{N}} f_j \in P$;

(e) $f_j \in P,\ f_j \searrow f,\ \int_{\mathbb{R}^{p+q}} f_1 < \infty\ \Rightarrow\ f \in P$.

<u>Tod. (a)–(e):lle</u>

(a): Selvä, koska $af + bg$ on mitallinen ja $\int (af + bg) = a \int f + b \int g$. Yksityiskohtaisesti:

$$\left.\begin{array}{l} y \mapsto f(x,y) \text{ mitallinen, kun } x \notin E_1,\ m_p(E_1) = 0 \\ y \mapsto g(x,y) \text{ mitallinen, kun } x \notin E_2,\ m_p(E_2) = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$y \mapsto af(x,y) + bg(x,y)$ mitallinen (ainakin) kun $x \notin E_1 \cup E_2,\ m_p(E_1 \cup E_2) = 0$ (eli (1) pätee);

$$x \mapsto \int_{\mathbb{R}^q} (af(x,y) + bg(x,y))\, dm_q(y)$$
$$\overset{3.28}{=} a \underbrace{\int_{\mathbb{R}^q} f(x,y)\, dm_q(y)}_{x\mapsto\ -\text{''}-\ \text{mitallinen } (f\in P)} + b \underbrace{\int_{\mathbb{R}^q} g(x,y)\, dm_q(y)}_{x\mapsto\ -\text{''}-\ \text{mitallinen } (g\in P)} \quad \text{mitallinen (eli (3) pätee);}$$

Lisäksi:

$$\int_{\mathbb{R}^{p+q}} (af + bg) \overset{3.28}{=} a \int_{\mathbb{R}^{p+q}} f + b \int_{\mathbb{R}^{p+q}} g$$
$$\overset{(f,g\in P)}{=} a \int_{\mathbb{R}^p} \left(\int_{\mathbb{R}^q} f(x,y)\, dm_q(y) \right) dm_p(x) + b \int_{\mathbb{R}^p} \left(\int_{\mathbb{R}^q} g(x,y)\, dm_q(y) \right) dm_p(x)$$
$$\overset{3.28}{=} \int_{\mathbb{R}^p} \left(\int_{\mathbb{R}^q} (af + bg)\, dm_q(y) \right) dm_p(x) \text{ (eli (5a) pätee).}$$

(b): Samoin, koska $f - g$ on mitallinen ja $\int (f - g) = \int f - \int g$.

(c):

(1) $\exists\ E_j \subset \mathbb{R}^p,\ m_p(E_j) = 0$ s.e. $y \mapsto f_j(x,y)$ mitallinen $\forall x \notin E_j \overset{2.23}{\Longrightarrow}\ y \mapsto f(x,y)$ mitallinen $\forall x \notin \cup_j E_j,\ m_p(\cup_j E_j) = 0$.

(3)

$$x \mapsto \int_{\mathbb{R}^q} f(x,y)\, dm_q(y) \overset{\text{MKL}}{=} \lim_{j\to\infty} \underbrace{\int_{\mathbb{R}^q} f_j(x,y)\, dm_q(y)}_{x\mapsto\ -\text{"}-\ \text{mitallinen } (f_j\in P)} \qquad \text{mitallinen (L. 2.23).}$$

(5a)

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^{p+q}} f \overset{\text{MKL}}{=} \lim_{j\to\infty} \int_{\mathbb{R}^{p+q}} f_j &\overset{f_j\in P}{=} \int_{\mathbb{R}^p} \left(\int_{\mathbb{R}^q} f_j(x,y)\, dm_q(y) \right) dm_p(x) \\ &\overset{2\times\text{MKL}}{=} \int_{\mathbb{R}^p} \left(\int_{\mathbb{R}^q} f(x,y)\, dm_q(y) \right) dm_p(x)\,.\end{aligned}$$

(d): (a) $\Rightarrow$ osasummat $\sum_{j=1}^k f_j \in P$. Lisäksi $\sum_{j=1}^k f_j \nearrow \sum_{j\in\mathbb{N}} f_j$, joten (c) $\Rightarrow$ väite.
(e): Kuten (c) laskevan MKL:n avulla.

Kohdat (a)–(e) todistettu.

$\boxed{\text{Askel 2.}}$ Oletetaan $f\colon \mathbb{R}^{p+q} \to \dot{\mathbb{R}},\ f \geq 0$, mitallinen. Osoitettava: $f \in P$. Todistus useassa vaiheessa ((**A**)–(**H**)) erityyppisille funktioille f.

(**A**): $f = \chi_{I\times J}$, missä $I \subset \mathbb{R}^p$ p-väli ja $J \subset \mathbb{R}^q$ q-väli. (Huom. $I \times J$ on $(p+q)$-väli.) Tällöin $f(x,y) = \chi_I(x)\chi_J(y)$.

(1): selvä, koska

$$y \mapsto f(x,y) = \begin{cases} \chi_J(y), & \text{jos } x \in I; \\ 0, & \text{jos } x \notin I. \end{cases}$$

(3): $x \mapsto \int_{\mathbb{R}^q} \chi_{I\times J}(x,y)\, dm(y) = m(J)\chi_I(x)$ on mitallinen (1-kert.).
(5a):

$$\int_{\mathbb{R}^{p+q}} f \overset{\text{1-kert.}}{=} m_p(I)m_q(J), \quad \text{ja}$$

$$\int_{\mathbb{R}^p} \left(\int_{\mathbb{R}^q} \chi_{I\times J}(x,y)\, dm_q(y) \right) dm_p(x) \overset{\text{edellä}}{=} \int_{\mathbb{R}^p} m_q(J)\chi_I(x)\, dm_p(x) = m_q(J)m_p(I)\,.$$

(**B**): $f = \chi_G$, missä $G \subset \mathbb{R}^{p+q}$ on avoin. Lemma 4.2 $\Rightarrow$

$$G = \bigcup_{j=1}^{\infty} E_j$$

numeroituva yhdiste erillisistä väleistä $E_j = I_j \times J_j \subset \mathbb{R}^{p+q}$.

$$\left.\begin{array}{l} \text{erill. yhdiste } \Rightarrow\ f = \sum_{j\in\mathbb{N}} \chi_{E_j} \\[2ex] \textbf{(A)}\ \Rightarrow\ \chi_{E_j} \in P\ \forall\ j \end{array}\right\} \overset{(d)}{\Longrightarrow}\ f \in P\,.$$

(C): $f = \chi_B$, missä $B \subset \mathbb{R}^{p+q}$ on rajoitettu $\mathcal{G}_\delta$-joukko:

$$B = \bigcap_{j=1}^{\infty} G_j, \text{ missä } G_j \subset \mathbb{R}^{p+q} \text{ avoin } \forall\, j\,.$$

Voidaan valita G_j rajoitetuiksi (muuten tark. joukkoja $G_j \cap B(0,R)$, missä $B(0,R) \supset B$) ja

$$G_1 \supset G_2 \supset \cdots$$

korvaamalla tarvittaessa G_j joukolla $G_1 \cap G_2 \cap \cdots \cap G_j$. Nyt

$$\left.\begin{array}{c} f_j = \chi_{G_j} \searrow \chi_B = f \text{ laskeva jono} \\[1ex] \textbf{(B)} \;\Rightarrow\; f_j \in P \;\forall\, j \\[1ex] \int_{\mathbb{R}^{p+q}} f_1 = m(G_1) < \infty \end{array}\right\} \stackrel{\text{(e)}}{\Longrightarrow} f \in P\,.$$

(D): $f = \chi_E$, missä $E \subset \mathbb{R}^{p+q}$ on rajoitettu joukko ja $m(E) = 0$. HT 2/6 $\Rightarrow$ $\exists$ rajoitettu $\mathcal{G}_\delta$-joukko $B \subset \mathbb{R}^{p+q}$ s.e. $E \subset B$ ja $m(B) = 0$. Merkitään $g = \chi_B$.

$$\begin{aligned} &\textbf{(C)} \;\Rightarrow\; g \in P\,. \\ &E \subset B \;\Rightarrow\; 0 \le f \le g\,. \end{aligned}$$

Nyt

$$0 = m(B) = \int_{\mathbb{R}^{p+q}} g \stackrel{g\in P}{=} \int_{\mathbb{R}^p} \left(\int_{\mathbb{R}^q} g(x,y)\, dm_q(y) \right) dm_p(x)$$

$$\stackrel{3.33\text{ (ii)}}{\Longrightarrow} \int_{\mathbb{R}^q} g(x,y)\, dm_q(y) = 0 \text{ m.k. } x \in \mathbb{R}^p$$

$$\stackrel{3.33\text{ (ii)}}{\Longrightarrow} \text{m.k } x \in \mathbb{R}^p \text{ pätee: } \; g(x,y) = 0 \text{ m.k. } y \in \mathbb{R}^q$$

$$\stackrel{0\le f\le g}{\Longrightarrow} \text{m.k } x \in \mathbb{R}^p \text{ pätee: } \; f(x,y) = 0 \text{ m.k. } y \in \mathbb{R}^q$$

$$\Rightarrow \text{m.k } x \in \mathbb{R}^p \text{ pätee: } y \mapsto f(x,y) \; \text{ mitallinen (eli (1) pätee) ja } \int_{\mathbb{R}^q} f(x,y)\, dm_q(y) = 0$$

$$\Rightarrow x \mapsto \int_{\mathbb{R}^q} f(x,y)\, dm_q(y) \text{ mitallinen (eli (3) pätee).}$$

Lisäksi (5a) voimassa muodossa 0=0, joten $f = \chi_E \in P$.

(E): $f = \chi_A$, missä $A \subset \mathbb{R}^{p+q}$ on mitallinen rajoitettu joukko. HT 2/6 $\Rightarrow$ $\exists$ rajoitettu $\mathcal{G}_\delta$-joukko $B \subset \mathbb{R}^{p+q}$ s.e. $A \subset B$ ja $m(B) = m(A)$. Silloin $E = B \setminus A$ on mitallinen ja

$$\left.\begin{array}{c} B = A \cup E \text{ erill. yhdiste} \\ m(B) = m(A) < \infty \end{array}\right\} \Rightarrow \; m(B) = m(A) + m(E) \;\Rightarrow\; m(E) = 0\,.$$

$$\left.\begin{array}{l} \textbf{(C)} \;\Rightarrow\; \chi_B \in P \\ \textbf{(D)} \;\Rightarrow\; \chi_E \in P \end{array}\right\} \stackrel{(b)}{\Rightarrow} \; f = \chi_B - \chi_E \in P\,.$$

(F): $f = \chi_A$, missä $A \subset \mathbb{R}^{p+q}$ on mv. mitallinen joukko. Olkoon $A_j = A \cap B(0,j)$, missä $B(0,j)$ on j-säteinen (avoin) kuula $\mathbb{R}^{p+q}$:ssa.

$$\left.\begin{array}{l} A_j \subset \mathbb{R}^{p+q} \text{ mitallinen rajoitettu} \overset{\textbf{(E)}}{\Rightarrow} \chi_{A_j} \in P \\ A_j \text{ kasvava jono, } A = \bigcup_{j\in\mathbb{N}} A_j \;\Rightarrow\; \chi_{A_j} \nearrow \chi_A \end{array}\right\} \overset{(c)}{\Rightarrow} f = \chi_A \in P\,.$$

(G): $f = \sum_{j=1}^k a_j \chi_{A_j} \in Y$ yksinkertainen funktio $\mathbb{R}^{p+q}$:ssa. **(F)** $\Rightarrow$ $\chi_{A_j} \in P \overset{(a)}{\Rightarrow} f \in P$.

(H): $f\colon \mathbb{R}^{p+q} \to [0,+\infty]$ mv. mitallinen. Approksimointilause 3.14 $\Rightarrow$ $\exists$ nouseva jono yksinkert. funktioita $f_j \in Y$ s.e. $f_j \nearrow f$. **(G)** $\Rightarrow$ $f_j \in P \overset{(c)}{\Rightarrow} f \in P$. □

Lause 4.4. (**Fubinin 2. lause**, vaihtuvamerkkiset funktiot) *Olkoon $f\colon \mathbb{R}^{p+q} \to \dot{\mathbb{R}}$ mitallinen ja oletetaan, että* <u>*ainakin yksi*</u> *integraaleista*

$$\int_{\mathbb{R}^{p+q}} |f|\,, \quad \int_{\mathbb{R}^p} \left(\int_{\mathbb{R}^q} |f(x,y)|\, dm_q(y) \right) dm_p(x)\,, \quad \textit{tai}$$

$$\int_{\mathbb{R}^q} \left(\int_{\mathbb{R}^p} |f(x,y)|\, dm_p(x) \right) dm_q(y)$$

on äärellinen. Tällöin

(1) $y \mapsto f(x,y)$ on integroituva $\mathbb{R}^q$:ssa m.k. $x \in \mathbb{R}^p$;

(2) $x \mapsto f(x,y)$ on integroituva $\mathbb{R}^p$:ssä m.k. $y \in \mathbb{R}^q$;

(3) $x \mapsto \int_{\mathbb{R}^q} f(x,y)\, dm_q(y)$ on integroituva $\mathbb{R}^p$:ssä, t.s.

$$\int_{\mathbb{R}^p} \left| \int_{\mathbb{R}^q} |f(x,y)|\, dm_q(y) \right| dm_p(x) < \infty\,;$$

(4) $y \mapsto \int_{\mathbb{R}^p} f(x,y)\, dm_p(x)$ on integroituva $\mathbb{R}^q$:ssa;

(5) f on integroituva $\mathbb{R}^{p+q}$:ssa ja

$$\int_{\mathbb{R}^{p+q}} f = \int_{\mathbb{R}^p} \left(\int_{\mathbb{R}^q} f(x,y)\, dm_q(y) \right) dm_p(x) = \int_{\mathbb{R}^q} \left(\int_{\mathbb{R}^p} f(x,y)\, dm_p(x) \right) dm_q(y)\,. \quad (\in \mathbb{R})$$

Tod. Oletus (ainakin yksi integr. $< \infty$) ja Fubini 1. $\Rightarrow$ kaikki alussa mainitut integr. $< \infty$, t.s.

$$\int_{\mathbb{R}^{p+q}} |f| = \int_{\mathbb{R}^p} \left(\int_{\mathbb{R}^q} |f(x,y)|\, dm_q(y) \right) dm_p(x) = \int_{\mathbb{R}^q} \left(\int_{\mathbb{R}^p} |f(x,y)|\, dm_p(x) \right) dm_q(y) < \infty\,. \tag{4.5}$$

$$\Rightarrow\; f \text{ integroituva } \mathbb{R}^{p+q} : ssa \overset{\text{määr.}}{\Longrightarrow} f^+, f^- \text{ integroituvia } \mathbb{R}^{p+q} : ssa\,,$$

joten Fubini 1. $\Rightarrow$

$$\int_{\mathbb{R}^p} \left(\int_{\mathbb{R}^q} f^+(x,y)\, dm_q(y) \right) dm_p(x) = \int_{\mathbb{R}^{p+q}} f^+ < \infty\,.$$

Lause 3.33 (ii) $\Rightarrow$

$$\left.\begin{array}{r}\int_{\mathbb{R}^q} f^+(x,y)\,dm_q(y) < \infty \text{ m.k. } x \in \mathbb{R}^p \\[2ex] \text{samoin } \int_{\mathbb{R}^q} f^-(x,y)\,dm_q(y) < \infty \text{ m.k. } x \in \mathbb{R}^p\end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$y \mapsto f(x,y) = f^+(x,y) - f^-(x,y) \text{ integroituva m.k. } x \in \mathbb{R}^p. \quad \text{(eli (1) pätee)}$$

Merkitään

$$u(x) = \int_{\mathbb{R}^q} f(x,y)\,dm_q(y) = \int_{\mathbb{R}^q} f^+(x,y)\,dm_q(y) - \int_{\mathbb{R}^q} f^-(x,y)\,dm_q(y)\,.$$

Fubini 1. $\Rightarrow$

$$\left.\begin{array}{l}x \mapsto \int_{\mathbb{R}^q} f^+(x,y)\,dm_q(y) \text{ mitallinen} \\[2ex] x \mapsto \int_{\mathbb{R}^q} f^-(x,y)\,dm_q(y) \text{ mitallinen}\end{array}\right\} \Rightarrow \quad u \quad \text{mitallinen (x:n funktio).}$$

Lisäksi

$$|u(x)| = \Big|\int_{\mathbb{R}^q} f(x,y)\,dm_q(y)\Big| \le \int_{\mathbb{R}^q} |f(x,y)|\,dm_q(y)\,,$$

joten

$$\int_{\mathbb{R}^p} |u(x)|\,dm_p(x) \le \int_{\mathbb{R}^p}\left(\int_{\mathbb{R}^q} |f(x,y)|\,dm_q(y)\right) dm_p(x) \overset{(4.5)}{<} \infty\,.$$

Siis u integroituva $\mathbb{R}^p$:ssä (”Majoranttiperiaate”), eli (3) pätee. Lisäksi:

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^{p+q}} f &= \int_{\mathbb{R}^{p+q}} f^+ - \int_{\mathbb{R}^{p+q}} f^- \\ &\overset{\text{Fub. 1.}}{=} \int_{\mathbb{R}^p}\left(\int_{\mathbb{R}^q} f^+(x,y)\,dm_q(y)\right) dm_p(x) - \int_{\mathbb{R}^p}\left(\int_{\mathbb{R}^q} f^-(x,y)\,dm_q(y)\right) dm_p(x) \\ &= \int_{\mathbb{R}^p}\Big(\int_{\mathbb{R}^q} \underbrace{\big(f^+(x,y) - f^-(x,y)\big)}_{=f(x,y)\text{ m.k.}}\,dm_q(y)\Big)\,dm_p(x) = \int_{\mathbb{R}^p}\left(\int_{\mathbb{R}^q} f(x,y)\,dm_q(y)\right) dm_p(x)\,.\end{aligned}$$

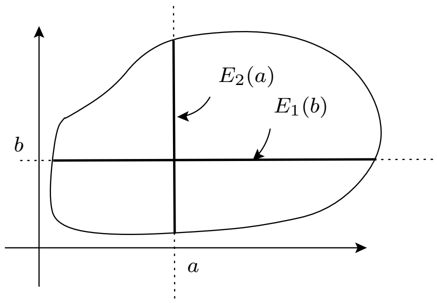
Symmetrisesti (2), (4) ja (5):n toinen yhtälö. □

Joitakin sovelluksia (lisää ”Reaalianalyysi I” kurssilla).

Esimerkki 4.6. Olkoon $E \subset \mathbb{R}^2$ mitallinen joukko, jolle $m_2(E) = 0$. Väite: Melkein jokainen vaakasuora (vast. pystysuora) leikkaa E:n joukossa, jonka 1-ulotteinen Lebesguen mitta $= 0$.

Ratk. Merkitään

$$\begin{aligned}E_1(b) &= \{x \in \mathbb{R} \colon (x,b) \in E\},\ b \in \mathbb{R}; \quad \text{(vaakasuoran $y = b$ ja E:n leikkaus)} \\ E_2(a) &= \{y \in \mathbb{R} \colon (a,y) \in E\},\ a \in \mathbb{R}. \quad \text{(pystysuoran $x = a$ ja E:n leikkaus)}\end{aligned}$$



Väite tarkoittaa:

$$m_1\big(E_1(y)\big) = 0 \quad \text{m.k. } y \in \mathbb{R}\,, \quad \text{ja vast.} \quad m_1\big(E_2(x)\big) = 0 \quad \text{m.k. } x \in \mathbb{R}\,.$$

Fubini 1. funktiolle $f = \chi_E \;\Rightarrow$

$$0 = m_2(E) = \int_{\mathbb{R}^2} \chi_E \overset{\text{Fub. 1.}}{=} \int_R \Big(\overbrace{\int_{\mathbb{R}} \underbrace{f(x,y)}_{\chi_{E_2(x)}(y)}\; dy}^{m_1(E_2(x))}\Big)\, dx$$

$$\overset{3.33\ (ii)}{\Longrightarrow} m_1\big(E_2(x)\big) = \int_{\mathbb{R}} f(x,y)\, dy = 0 \quad \text{m.k. } x \in \mathbb{R}\,.$$

Samoin $m_1\big(E_1(y)\big) = 0$ m.k. $y \in \mathbb{R}$.

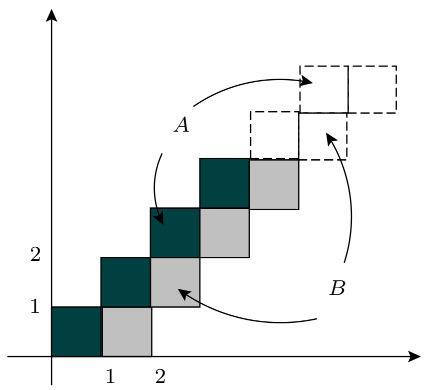
Kääntäen: Jos $E \subset \mathbb{R}^2$ on mitallinen osajoukko s.e. $m_1\big(E_2(x)\big) = 0$ m.k. $x \in \mathbb{R}$ (tai $m_1\big(E_1(y)\big) = 0$ m.k. $y \in \mathbb{R}$), niin $m_2(E) = 0$. Syy: Fubini 1. ja (mitallinen funktio) $f = \chi_E$ (kuten edellä).

Lisätieto: Edellisessä esimerkissä oletus $E \subset \mathbb{R}^2$ mitallinen on oleellinen: nimittäin $\exists\ E \subset \mathbb{R}^2$ s.e.

- E ei Lebesguen mitallinen (joten $m^*(A) > 0$)
- jokainen vaakasuora leikkaa E:n korkeintaan yhdessä pisteessä
- jokainen pystysuora leikkaa E:n korkeintaan yhdessä pisteessä.

(Sierpinski: Fundamenta Mathematica 1 (1920), s. 114.

Esimerkki 4.7. Ol. $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f = \chi_A - \chi_B$, missä A = ylempien neliöiden yhdiste ja B = alempien neliöiden yhdiste (ks. kuva).



Nyt

$$\int_{\mathbb{R}} f(x,y)\,dx = 0 \;\forall\; y \in \mathbb{R} \;\Rightarrow\; \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} f(x,y)\,dx \right) dy = 0\,.$$

Toisaalta

$$\int_{\mathbb{R}} f(x,y)\,dy = \chi_{[0,1]}(x) \quad (f(x,y) \equiv 1 \text{ alimmassa ”}A\text{-neliössä” } [0,1]\times[0,1])$$

$$\Rightarrow \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} f(x,y)\,dx \right) dy \neq \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} f(x,y)\,dy \right) dx\,.$$

Fubinin lauseet <u>eivät</u> voimassa, sillä f vaihtuvamerkkinen (Fubini 1.) ja

$$\int_{\mathbb{R}^2} |f| = \int_{\mathbb{R}^2} \chi_{A\cup B} = m^2(A\cup B) = \infty$$

eli f ei ole integroituva $\mathbb{R}^2$:ssa (Fubini 2.).

Esimerkki 4.8. Laske

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2}\,. \qquad \text{(esim. TN-laskenta)}$$

<u>Ratk.</u> Epäoleellinen Riemann-integraali tasossa

$$\text{(R)}\int_{\mathbb{R}^2} e^{-(x^2+y^2)}\,dxdy = \lim_{n\to\infty} \text{(R)} \int_{B(0,n)} e^{-(x^2+y^2)}\,dxdy \overset{(*)}{=} \lim_{n\to\infty} \text{(R)} \int_0^n \int_0^{2\pi} e^{-r^2} r\,drd\varphi$$

$$= 2\pi \lim_{n\to\infty} \text{(R)} \int_0^n re^{-r^2} = \pi \lim_{n\to\infty} \Big/_0^n - e^{-r^2} = -\pi \lim_{n\to\infty} \big(e^{-n^2} - 1\big) = \pi\,.$$

Toisaalta MKL $\overset{(**)}{\Longrightarrow}$

$$\int_{\mathbb{R}^2} e^{-(x^2+y^2)} = \text{(R)} \int_{\mathbb{R}^2} e^{-(x^2+y^2)}\,dxdy\,.$$

Lisäksi Fubini 1. $\Rightarrow$

$$\pi = \int_{\mathbb{R}^2} e^{-(x^2+y^2)} = \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2} e^{-y^2}\,dy \right) dx = \int_{\mathbb{R}} e^{-x^2} \left(\int_{\mathbb{R}} e^{-y^2}\,dy \right) dx$$

$$= \left(\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2}\,dx \right)^2$$

$$\Rightarrow \int_{\mathbb{R}} e^{-x^2}\,dx = \sqrt{\pi}\,.$$

$(*)$: napakoordinaatit

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{cases}, \quad x^2 + y^2 = r^2\,, \quad \text{jakobiaani } J(r,\varphi) = r\,.$$

$(**)$: MKL sovell. funktioihin $f_n(x,y) = e^{-(x^2+y^2)}\chi_{B(0,n)}(x,y)$.

LOPPU

Alla luettelo (eräistä) kirjoista, joita voi käyttää lisämateriaalina.

References

[EG] Evans, Lawrence ja Gariepy Ronald. *Measure theory and fine properties of functions,* CRC Press, 1992.

[Fr] Friedman, Avner. *Foundations of modern analysis,* Dover Publications Inc., 1982.

[GZ] Gariepy, Ronald ja Ziemer, William. *Modern real analysis,* PWS Publishing Company, 1994.

[HS] Hewitt, Edwin ja Stromberg, Karl. *Real and abstract analysis,* Springer-Verlag, 1975.

[Jo] Jones, Frank. *Lebesgue integration on Euclidean space,* Jones and Bartlett Publishers, 1993.

[Mat] Mattila, Pertti. *Geometry of sets and measures in Euclidean spaces,* Cambridge University Press, 1995.

[MW] McDonald, John N. ja Weiss, Neil A. *A course in real analysis,* Academic Press Inc., 1999.

[Ro] Royden, H. L. *Real analysis,* Macmillan Publishing Company, 1988.

[Ru] Rudin, Walter. *Real and complex analysis,* McGraw-Hill Book Co., 1987.