Metristen avaruuksien differentioituvat struktuurit, syksy 2003

Ilkka Holopainen[1]

5. helmikuuta 2009

[1] Ilmoita painovirheistä esim. sähköpostitse osoitteeseen `ilkka.holopainen@helsinki.fi`

Sisältö

0 Johdanto

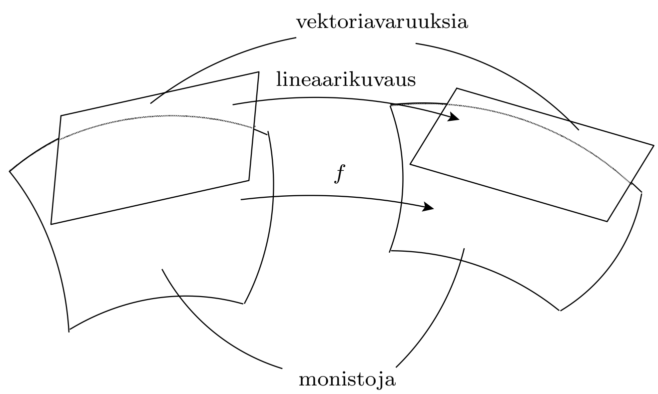
Tällä kurssilla tutustutaan Jeff Cheegerin hiljattain kehittämään Lipschitz-funktioiden differentioituvuusteoriaan metrisisillä avaruuksilla. Tällainen teoria kuuluu viime aikoina paljon tutkittuun "analyysiin metrisissä avaruuksissa", jonka yhtenä tärkeänä tavoitteena on etsiä vastineita ns. Sobolev-avaruuksille.

Palautetaan ensiksi mieliin differentioituvuuden käsite. Olkoon $G \subset \mathbb{R}^n$ avoin. Sanomme, että kuvaus $f\colon G \to \mathbb{R}^m$ on *differentioituva* pisteessä $x \in G$, jos $\exists$ lineaarikuvaus $A(x) \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ s.e.

$$\lim_{h \to 0} \frac{|f(x+h) - f(x) - A(x)h|}{|h|} = 0.$$

Lineaarikuvausta $A(x)$ sanotaan f:n differentiaaliksi pisteessä x ja sitä merkitään $A(x) = f'(x) = Df(x)$. Kuvausta f voidaan siten approksimoida lineaarikuvauksella $f'(x)$ pisteen x ympäristössä.

Voisiko vastaava approksimointi olla mahdollista myös, jos kuvauksen määrittelyjoukko on muu kuin $\mathbb{R}^n$:n alue? Ongelma syntyy (tietenkin) heti siitä, että lineaarikuvaus vaatii lähtö- ja maalijoukokseen vektoriavaruuden. *Differentiaaligeometriassa* tutkitaan sileitä topologisia monistoja. Tällaisia monistoja voidaan, karkeasti ottaen, lokaalisti "approksimoida" vektoriavaruuksilla ja siten myös kuvauksien approksimointi lineaarikuvauksilla on mielekästä.



Todistamme piakkoin (klassisen) *Rademacherin lauseen*, jonka mukaan Lipschitz-kuvaus $f\colon G \to \mathbb{R}^m$, $G \subset \mathbb{R}^n$, on differentioituva m.k. G:ssä. Muistutetaan, että kuvaus $f\colon X \to Y$, missä (X, d_1) ja (Y, d_2) ovat metrisiä avaruuksia, on *Lipschitz*, jos on olemassa vakio L siten, että

$$d_2\big(f(x), f(y)\big) \le L d_1(x, y) \quad \forall x, y \in X.$$

Koska Lipschitz-ominaisuus on mielekäs metristen avaruuksien välisille kuvauksille, voidaan myös kysyä päteekö jonkinlainen Rademacherin lauseen vastine metristen avaruuksien tapauksessa. Muun muassa tällaiseen kysymykseen etsimme vastausta tällä kurssilla. Kurssin aikana perehdytään myös muihin mielenkiintoisiin metrisiin avaruuksiin liittyviin käsitteisiin kuten upotus- ja konvergenssilauseisiin.

Huomautus 0.1. Kurssin materiaali on koottu useasta eri lähteestä (ks. kirjallisuusluettelo). Olen pyrkinyt luettelemaan joka luvun alussa ko. luvussa käytetyt lähteet. Lisäksi kurssin opiskelijat Saara Lehto, Aleksander Nuija ja Aleksi Vähäkangas ovat toimittaneet minulle materiaalia omista havainnoistaan ja muistiinpanoistaan.

Aloitamme lyhyellä katsauksella klassisiin Sobolev-avaruuksiin.

1 $\mathbb{R}^n$:n Sobolev avaruudet $W^{1,p}$ (lyhyesti)

(Lähdemateriaalit: [EG], [HK], [HKM], [He1].)

1.1 Mitä ne ovat ja mihin niitä käytetään?

Aloitetaan tarkastelemalla seuraavaa ongelmaa:

Olkoon $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ avoin rajoitettu joukko, $1 < p < \infty$ ja $h \in C^1(\bar{\Omega})$ reaaliarvoinen funktio. (*Huom.* Merkintä $f \in C^k(\bar{\Omega})$ tarkoittaa, että on olemassa avoin joukko $U = U_f$ ja funktio $g \in C^k(U)$ siten, että $\bar{\Omega} \subset U$ ja $g|\bar{\Omega} = f$.)

Haluamme (syystä tai toisesta) minimoida "energian"

$$I(u) = \int_\Omega |\nabla u|^p \, dm,$$

kaikkien niiden funktioiden $u \in C^1(\bar{\Omega})$ joukossa, joilla $u = h$ $\partial\Omega$:ssa. Kutsutaan tällaisia funktioita "sallituiksi".

Huomautus 1.2. 1. Yllä

$$\nabla u(x) = \big(D_1 u(x), D_2 u(x), \ldots, D_n u(x)\big) = \big(\frac{\partial u}{\partial x_1}(x), \frac{\partial u}{\partial x_2}(x), \ldots, \frac{\partial u}{\partial x_n}(x)\big)$$

on u:n gradientti x:ssä.

2. Koska Ω on rajoitettu ja $h \in C^1(\bar{\Omega})$, kyseinen minimi on äärellinen.

Mitä voimme tehdä?

Yritys: Valitaan jono funktioita $u_i \in C^1(\bar{\Omega}),\ u_i|\partial\Omega = h|\partial\Omega$, siten, että

$$I(u_i) \to \inf\{I(u) \colon u \in C^1(\bar{\Omega}), u|\partial\Omega = h|\partial\Omega\} =: I_0.$$

Koska $\sup I(u_i) < \infty$ ja $p > 1$, niin L^p-avaruuksien heikon kompaktisuuden nojalla on olemassa funktio $v \in L^p(\Omega; \mathbb{R}^n)$ ja osajono u_{i_j} siten, että $\nabla u_{i_j} \rightharpoonup v$ $L^p(\Omega; \mathbb{R}^n)$:ssä. Lisäksi

$$\lim I(u_{i_j}) \geq \int_\Omega |v|^p \, dm.$$

Voisiko v olla jonkun sallitun funktion u_0 gradientti? Silloin olisimme ratkaisseet minimointiongelman.

Ongelma: Avaruudet $\big(C^1(\bar{\Omega}); \|\cdot\|_p\big)$ eivät ole täydellisiä. Jotta minimointiongelmalla olisi ratkaisu, joudumme *laajentamaan sallittujen funktioiden luokkaa*.

Katsotaan asiaa toiselta kantilta. Oletetaan, että $u \in C^1(\bar{\Omega})$ on sallittu ja minimoi yo. energian. Jos $\varphi \in C^1_0(\Omega)$, niin funktio $u + t\varphi$ on myös sallittu kaikilla $t \in \mathbb{R}$. Koska u on minimoija, niin pätee

$$\frac{d}{dt} I(u + t\varphi)_{|t=0} = 0.$$

Lasketaan vasen puoli:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} I(u + t\varphi)_{|t=0} &= \frac{d}{dt}\left(\int_\Omega |\nabla(u + t\varphi)|^p \, dm\right)_{|t=0} \\
&= \frac{d}{dt}\left(\int_\Omega \langle \nabla(u + t\varphi), \nabla(u + t\varphi)\rangle^{p/2} \, dm\right)_{|t=0} \\
&= \int_\Omega \frac{d}{dt}\Big(\langle \nabla u + t\nabla\varphi, \nabla u + t\nabla\varphi\rangle^{p/2}\Big)_{|t=0} \, dm \\
&= \int_\Omega \frac{p}{2} \langle \nabla u, \nabla u\rangle^{\frac{p}{2}-1} 2\langle \nabla u, \nabla\varphi\rangle \, dm \\
&= \int_\Omega |\nabla u|^{p-2} \langle \nabla u, \nabla\varphi\rangle \, dm.
\end{aligned}$$

Johtopäätös: Jos sallittu funktio $u \in C^1(\bar{\Omega})$ on minimoija, niin se toteuttaa yhtälön

$$\int_\Omega |\nabla u|^{p-2}\langle \nabla u, \nabla \varphi\rangle \, dm = 0 \tag{1.3}$$

kaikilla $\varphi \in C_0^1(\Omega)$.

Kolmas näkökulma: Jos $u, \varphi \in C^2(\Omega)$, niin (Diff II: ”tulon derivaatta” eli Leibnizin sääntö)

$$\operatorname{div}\big(\varphi|\nabla u|^{p-2}\nabla u\big) = \varphi \operatorname{div}\big(|\nabla u|^{p-2}\nabla u\big) + |\nabla u|^{p-2}\langle \nabla u, \nabla \varphi\rangle.$$

Jos lisäksi $\varphi \in C_0^2(\Omega)$, niin Gaussin lauseesta seuraa, että

$$\int_\Omega \operatorname{div}\big(\varphi|\nabla u|^{p-2}\nabla u\big)\, dm = 0.$$

Oletetaan sitten, että $u \in C^2(\bar{\Omega})$ on sallittu ja minimoija. Edellä olleen nojalla

$$\int_\Omega \varphi \operatorname{div}\big(|\nabla u|^{p-2}\nabla u\big)\, dm = -\int_\Omega |\nabla u|^{p-2}\langle \nabla u, \nabla \varphi\rangle \, dm = 0$$

kaikilla $\varphi \in C_0^2(\Omega)$. Tästä voimme päätellä, että u on 2. kertaluvun osittaisdifferentiaaliyhtälön

$$\operatorname{div}\big(|\nabla u(x)|^{p-2}\nabla u(x)\big) = 0 \quad \forall x \in \Omega \tag{1.4}$$

ratkaisu.

Huomautus 1.5. Itseasiassa pätee myös kääntäen: Jos $u \in C^2(\Omega)$ toteuttaa (1.4):n, niin se toteuttaa selvästi myös (1.3):n. Samoin jos (1.3) pätee funktiolle $u \in C^1(\bar{\Omega})$, niin silloin u on minimoija. (HT: Todista jälkimmäinen käyttäen arviota

$$|x|^p - |y|^p > p|y|^{p-2}\langle y, x-y\rangle, \quad x, y \in \mathbb{R}^n,\ x \neq y.$$

Todista myös yo. arvio.)

Opetus: Jos haluamme löytää minimointiongelman ratkaisun ja/tai ratkaista osittaisdifferentiaaliyhtälöitä, joudumme työskentelemään sellaisessa (järkevässä) funktioavaruudessa, josta kyseinen ratkaisu voi löytyä. Sobolev-avaruudet ovat juuri tällaisia funktioavaruuksia. Myös reuna-arvot $u|\partial\Omega = h|\partial\Omega$ on tulkittava ”Sobolev-avaruus mielessä”.

1.6 Ekvivalentteja määritelmiä

Olkoon $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ avoin ja $1 \le p < \infty$. Kun $u \in C^1(\Omega)$, niin merkitään

$$\|u\|_{1,p} = \|u\|_p + \||\nabla u|\|_p.$$

Määritelmä 1.7. *Sobolev-avaruus* $W^{1,p}(\Omega)$ on $C^1(\Omega)$:n täydellistymä normin $\|\cdot\|_{1,p}$ suhteen. Toisin sanoen, $u \in W^{1,p}(\Omega)$, jos ja vain jos $u \in L^p(\Omega)$ ja on olemassa jono $u_i \in C^1(\Omega)$ ja ($\mathbb{R}^n$-arvoinen) $v \in L^p(\Omega;\mathbb{R}^n)$ s.e.

$$\begin{aligned} u_i &\to u \quad L^p(\Omega)\text{:ssa ja} \\ \nabla u_i &\to v \quad L^p(\Omega;\mathbb{R}^n)\text{:ssä,} \end{aligned}$$

eli $\|u_i - u\|_p \to 0$ ja $\||\nabla u_i - v|\|_p \to 0$. Merkitään $v = \nabla u$ ja kutsutaan sitä u:n *(Sobolev-)gradientiksi*. Lisäksi merkitsemme

$$\|u\|_{1,p,\Omega} = \|u\|_{1,p} = \|u\|_p + \||\nabla u|\|_p,$$

kun $u \in W^{1,p}(\Omega)$.

Merkitään $U \Subset \Omega$, kun U on sellainen avoin joukko, että $\bar{U} \subset \Omega$ on kompakti. Sanomme, että $u \in W^{1,p}_{\text{loc}}(\Omega)$, jos $u \in W^{1,p}(U)$ kaikilla $U \Subset \Omega$.

Huomautus 1.8. Herää pari kysymystä:

(a) Onko v ja siten ∇u yksikäsitteinen? Tarkemmin sanoen: Jos $v_i \in C^1(\Omega)$ ja $w \in L^p(\Omega;\mathbb{R}^n)$ ovat myös sellaisia, että

$$\begin{aligned} v_i \to u &\quad L^p(\Omega)\text{:ssa ja} \\ \nabla v_i \to w &\quad L^p(\omega;\mathbb{R}^n)\text{:ssä,} \end{aligned}$$

niin onko $w = v$ ($L^p(\Omega;\mathbb{R}^n)$:n alkiona)?

(b) Jos $u \in C^1(\Omega)$, niin onko tavallinen gradientti $\nabla u =$ Sobolev-gradientti?

Havainto: Jos vastaus (a):han on "kyllä", niin myös (b):n vastaus on "kyllä". (Valitaan jonoksi $u_i = u \; \forall i$.) Osoitetaan, että vastaus molempiin on "kyllä". Gradientin yksikäsitteisyyteen riittää osoittaa:

$$\left.\begin{array}{c} u_i \in C^1(\Omega),\ u_i \to 0\ L^p(\Omega)\text{:ssa} \\ \nabla u_i \to v\ L^p(\Omega;\mathbb{R}^n)\text{:ssä} \end{array}\right\} \;\Rightarrow\; v = 0. \tag{1.9}$$

Todistetaan tämä osittaisintegroinnilla. Olkoon $\varphi \in C^1_0(\Omega)$. Laajennetaan se C^1-funktioksi $\varphi\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ asettamalla $\varphi|(\mathbb{R}^n \setminus \Omega) = 0$. Käyttämällä Fubinin lausetta (ja analyysin peruslausetta) nähdään, että

$$\int_\Omega D_1\varphi(x)\,dm_n(x) = \int_{\mathbb{R}^n} D_1\varphi(x)\,dm_n(x) = \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \left(\int_{\mathbb{R}} D_1\varphi(t,y)\,dt\right) dm_{n-1}(y) = 0,$$

sillä

$$\int_{\mathbb{R}} D_1\varphi(t,y)\,dt = 0$$

kaikilla $y \in \mathbb{R}^{n-1}$. Yllä kirjoitimme pisteen $x \in \mathbb{R}^n$ muodossa $x = (t,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{n-1}$. Samoin nähdään, että

$$\int_\Omega D_j\varphi\,dm = 0 \quad \forall j = 1,\ldots,n.$$

Eritysesti, jos $u \in C^1(\Omega)$ ja $\varphi \in C^1_0(\Omega)$, niin

$$0 = \int_\Omega D_j(u\varphi)\,dm = \int_\Omega (uD_j\varphi + \varphi D_i u)\,dm,$$

joten

$$\int_\Omega \varphi D_j u\,dm = -\int_\Omega uD_j\varphi\,dm \tag{1.10}$$

Olkoon sitten $\varphi \in C^1_0(\Omega)$ mielivaltainen sekä $u_i \in C^1(\Omega)$ ja $v = (v_1,\ldots,v_n) \in L^p(\Omega;\mathbb{R}^n)$ kuten (1.9):ssä. Nyt

$$\int_\Omega \varphi D_k u_i\,dm = -\int_\Omega u_i D_k\varphi\,dm \quad \forall i \in \mathbb{N},\ \forall k \in \{1,\ldots,n\}.$$

Siis

$$\begin{aligned}
\Big|\int_\Omega \varphi D_k u_i\,dm\Big| &= \Big|\int_\Omega u_i D_k\varphi\,dm\Big| \\
&\le \int_\Omega |u_i||D_k\varphi|\,dm \\
&\le \Big(\int_\Omega |u_i|^p\,dm\Big)^{1/p} \underbrace{\Big(\int_\Omega |D_k\varphi|^q\,dm\Big)^{1/q}}_{<\infty} \to 0,
\end{aligned}$$

kun $i\to\infty$. Yllä q on p:n Hölder-konjugaatti ($q=\infty$, jos $p=1$). Koska $\nabla u_i \to v$ $L^p(\Omega;\mathbb{R}^n)$:ssä, niin $D_k u_i \to v_k$ $L^p(\Omega)$:ssa $\forall k\in\{1,\dots,n\}$. Näin ollen

$$\begin{aligned}
\Big|\int_\Omega \varphi v_k\,dm\Big| &= \Big|\int_\Omega \varphi(v_k - D_k u_i)\,dm + \int_\Omega \varphi D_k u_i\,dm\Big| \\
&\le \int_\Omega |\varphi||v_k - D_k u_i|\,dm + \Big|\int_\Omega \varphi D_k u_i\,dm\Big| \\
&\le \underbrace{\Big(\int_\Omega |\varphi|^q\,dm\Big)^{1/q}}_{<\infty} \underbrace{\Big(\int_\Omega |v_k - D_k u_i|^p\,dm\Big)^{1/p}}_{\to 0} + \underbrace{\Big|\int_\Omega \varphi D_k u_i\,dm\Big|}_{\to 0} \\
&\to 0,
\end{aligned}$$

kun $i\to\infty$. Siis

$$\int_\Omega \varphi v_k\,dm = 0 \quad \forall \varphi \in C_0^1(\Omega). \tag{1.11}$$

Tästä voimme päätellä, että $v_k(x)=0$ m.k. $x\in\Omega$, $\forall k\in\{1,\dots,n\}$, eli $v=0$ m.k. Olemme siten todistaneet Sobolev-gradientin yksikäsitteisyyden. (HT: Todista, että (1.11) $\Rightarrow$ $v_k=0$ m.k.)

Lause 1.12. *Sobolev-avaruus $W^{1,p}(\Omega)$ on Banach-avaruus.*

Todistus. Selvästi $W^{1,p}(\Omega)$ on vektoriavaruus ja $\|\cdot\|_{1,p}$ on normi. Olkoon (u_i) Cauchy-jono $W^{1,p}(\Omega)$:ssa. Silloin (u_i) on Cauchy-jono $L^p(\Omega)$:ssa ja (∇u_i) on Cauchy-jono $L^p(\Omega;\mathbb{R}^n)$:ssä. Siten on olemassa $u\in L^p(\Omega)$ ja $v\in L^p(\Omega;\mathbb{R}^n)$ siten, että

$$\|u_i - u\|_p \to 0 \quad \text{ja} \quad \||\nabla u_i - v|\|_p \to 0.$$

Osoitettava vielä, että $v=\nabla u$ (Sobolev-gradientti). Koska $u_i\in W^{1,p}(\Omega)$, on olemassa jono funktioita $u_{i,j}\in C^1(\Omega)$ s.e.

$$\|u_{i,j} - u_i\|_p \to 0 \quad \text{ja} \quad \||\nabla u_{i,j} - \nabla u_i|\|_p \to 0,$$

kun $j\to\infty$. Jokaisella $i\in\mathbb{N}$ valitaan $j_i\in\mathbb{N}$ s.e.

$$\|u_{i,j_i} - u_i\|_p < 1/i \quad \text{ja} \quad \||\nabla u_{i,j_i} - \nabla u_i|\|_p < 1/i.$$

Nyt

$$\begin{gathered}
\|u_{i,j_i} - u\|_p \le \|u_{i,j_i} - u_i\|_p + \|u_i - u\|_p \to 0 \quad \text{ja} \\
\||\nabla u_{i,j_i} - v|\|_p \le \||\nabla u_{i,j_i} - \nabla u_i|\|_p + \||\nabla u_i - v|\|_p \to 0,
\end{gathered}$$

kun $i\to\infty$. Siten $v=\nabla u$. $\square$

Määritelmä 1.13. Sanomme, että

1. $u_i \to u$ $W^{1,p}(\Omega)$:ssa, jos $\|u_i - u\|_{1,p,\Omega} \to 0$, ja

2. $u_i \to u$ $W^{1,p}_{\mathrm{loc}}(\Omega)$:ssa, jos $\|u_i - u\|_{1,p,U} \to 0$ kaikilla $U \Subset \Omega$.

Yhtälön (1.10) motivoimana määrittelemme:

Määritelmä 1.14. Olkoon $u \in L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ ja $i \in \{1,\dots,n\}$. Sanomme, että $g_i \in L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ on u:n *heikko i:s osittaisderivaatta*, jos

$$\int_\Omega \varphi g_i \, dm = -\int_\Omega u D_i \varphi \, dm$$

kaikilla $\varphi \in C^1_0(\Omega)$. Merkitsemme $g_i = D_i u$

Huomautus 1.15. (a) Jos heikko i:s osittaisderivaatta on olemassa, niin se on yksikäsitteinen. Vrt. (1.11):n todistus.

(b) Jos $u \in C^1(\Omega)$, niin (tavallinen osittaisderivaatta) $D_i u$ on myös u:n heikko i:s osittaisderivaatta.

(c) Sanomme, että $(D_1 u, \dots, D_n u)$ on u:n heikko gradientti, jos jokainen heikko osittaisderivaatta $D_i u$, $i = 1,\dots,n$, on olemassa.

Lause 1.16. *Jos $u \in W^{1,p}(\Omega)$, $1 \le p < \infty$, niin Sobolev-gradientti ∇u on u:n heikko gradientti.*

Todistus. Merkitään $\nabla u = (v_1,\dots,v_n)$. Hölderin epäyhtälöstä seuraa, että $v_k \in L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ $\forall k = 1,\dots,n$. Olkoon $\varphi \in C^1_0(\Omega)$ ja $u_i \in C^1(\Omega)$ s.e. $u_i \to u$ $W^{1,p}(\Omega)$:ssa. Silloin

$$\begin{aligned}
&\Big|\int_\Omega \varphi v_k \, dm + \int_\Omega u D_k \varphi \, dm\Big| \\
=&\Big|\int_\Omega \varphi v_k \, dm + \int_\Omega u D_k \varphi \, dm - \overbrace{\Big(\int_\Omega \varphi D_k u_i \, dm + \int_\Omega u_i D_k \varphi \, dm\Big)}^{=0}\Big| \\
=&\Big|\int_\Omega \varphi (v_k - D_k u_i) \, dm + \int_\Omega (u - u_i) D_k \varphi \, dm\Big| \\
\le& \int_\Omega |\varphi||v_k - D_k u_i| \, dm + \int_\Omega |u - u_i||D_k \varphi| \, dm \\
\le& \underbrace{\Big(\int_\Omega |\varphi|^q \, dm\Big)^{1/q}}_{<\infty} \underbrace{\Big(\int_\Omega |v_k - D_k u_i|^p \, dm\Big)^{1/p}}_{\to 0} + \underbrace{\Big(\int_\Omega |u - u_i|^p \, dm\Big)^{1/p}}_{\to 0} \underbrace{\Big(\int_\Omega |D_k \varphi|^q \, dm\Big)^{1/q}}_{<\infty} \\
\to& 0, \quad \text{kun } i \to \infty.
\end{aligned}$$

Siis

$$\int_\Omega \varphi v_k \, dm = -\int_\Omega u D_k \varphi \, dm \quad \forall \varphi \in C^1_0(\Omega). \qquad \square$$

Palautetaan Reaalianalyysi I-kurssilta mieliin L^p-funktioiden approksimointi C^∞-funktioilla. Olkoot $\eta \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$\eta(t) = \begin{cases} \exp\left(\frac{1}{t^2-1}\right), & \text{kun } |t| < 1, \\ 0, & \text{kun } |t| \ge 1, \end{cases}$$

ja $\varphi_i\colon \mathbb{R}^n \to [0,\infty[$,

$$\varphi_i(x) = a_i \eta(i|x|), \tag{1.17}$$

missä $i \in \mathbb{N}$ ja a_i on vakio s.e.

$$\int_{\mathbb{R}^n} \varphi_i \, dm = 1 \quad \forall i \in \mathbb{N}.$$

Tällöin $\varphi_i \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$. Merkitään $\Omega_i = \{x \in \Omega\colon \operatorname{dist}(x, \partial\Omega) > 1/i\}$, kun $i \in \mathbb{N}$. Jos $u \in L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$, niin määritellään $u_i = u * \varphi_i\colon \Omega_i \to \mathbb{R}$,

$$u_i(x) = \int_\Omega u(y)\varphi_i(x-y)dy\,.$$

Lause 1.18. *Olkoon $u \in L^p_{\mathrm{loc}}(\Omega)$, $1 \le p < \infty$. Oletetaan, että u:lla on olemassa heikot osittaisderivaatat $D_k u \in L^p_{\mathrm{loc}}(\Omega)$, $k = 1, \ldots, n$. Merkitään $u_i = u * \varphi_i$. Silloin*

(a) $u_i \in C^\infty(\Omega_i)$,

(b) $D_k u_i = D_k u * \varphi_i$, *missä $D_k u$ on u:n heikko k:s osittaisderivaatta, $k = 1, \ldots, n$,*

(c) $u \in W^{1,p}_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ *ja* $u_i \to u$ $W^{1,p}_{\mathrm{loc}}(\Omega)$*:ssa.*

Todistus. Reaalianalyysin kurssilla todistettiin (ks. [Ho2, L. 2.26, Huom. 2.28]), että $u_i \in C^\infty(\Omega_i)$. Siten (a) pätee. Samoin osoitettiin, että

$$D_k u_i(x) = u * D_k\varphi_i(x).$$

Kiinnitetään $x \in \Omega_i$ ja merkitään $h(y) = x - y$ ja $\psi_i = \varphi_i \circ h$, jolloin $\psi_i(y) = \varphi_i(x-y)$. Nyt $\psi_i \in C^\infty(\Omega)$. Ketjusäännön nojalla

$$D_k\psi_i(y) = -D_k\varphi_i(x-y),$$

missä $D_k\varphi_i(x-y)$ tarkoittaa (tietenkin) funktion $D_k\varphi_i$ arvoa pisteessä $x - y$. Nyt

$$\begin{aligned}
D_k u_i(x) = u * D_k\varphi_i(x) &= \int_\Omega u(y) D_k\varphi_i(x-y)\,dy \\
&= -\int_\Omega u(y) D_k\psi_i(y)\,dy \\
&\overset{(i)}{=} \int_\Omega D_k u(y)\psi_i(y)\,dy \\
&= \int_\Omega D_k u(y)\varphi_i(x-y)\,dy = D_k u * \varphi_i(x).
\end{aligned}$$

Kohdassa (i) käytettiin heikon osittaisderivaatan määritelmää. Näin ollen (b) on todistettu.

Reaalianalyysi I:ssä todistettiin myös, että $u * \varphi_i \to u$ $L^p(U)$:ssa aina kun $U \subset \Omega$ on avoin joukko, jolla $\bar{U} \subset \Omega$ on kompakti (ks. [Ho2, L. 2.34]). Samoin $D_k u * \varphi_i \to D_k u$ $L^p(U)$:ssa. Siten funktioille $u_i \in C^1(\Omega)$ ja $v = (D_1 u, \ldots, D_n u) \in L^p_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ pätee

$$u_i \to u \ L^p_{\mathrm{loc}}(\Omega)\text{:ssa ja } \nabla u_i \to v \ L^p_{\mathrm{loc}}(\Omega)\text{:ssa.}$$

Siis $u \in W^{1,p}_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ ja $u_i \to u$ $W^{1,p}_{\mathrm{loc}}(\Omega)$:ssa eli (c) pätee. □

Lemma 1.19. *Olkoon $u \in W^{1,p}(\Omega)$ ja $\varphi \in C_0^1(\Omega)$. Silloin $\varphi u \in W^{1,p}(\Omega)$ ja $\varphi\nabla u + u\nabla\varphi$ on φu:n Sobolev gradientti.*

Todistus. Koska $\varphi \in C_0^1(\Omega)$, on olemassa $M \in \mathbb{R}$ s.e.

$$|\varphi(x)| \leq M \text{ ja } |\nabla\varphi(x)| \leq M \quad \forall x \in \Omega.$$

Siten $\varphi\nabla u + u\nabla\varphi \in L^p(\Omega; \mathbb{R}^n)$. Olkoon $u_i \in C^1(\Omega)$ s.e. $u_i \to u$ $W^{1,p}(\Omega)$:ssa. Nyt

$$\|\varphi u_i - \varphi u\|_p \leq M\|u_i - u\|_p \to 0$$

ja

$$\begin{aligned}\||\nabla(\varphi u_i) - (\varphi\nabla u + u\nabla\varphi)|\|_p &= \||\varphi\nabla u_i + u_i\nabla\varphi - \varphi\nabla u - u\nabla\varphi|\|_p \\ &\leq \||\varphi(\nabla u_i - \nabla u)|\|_p + \||(u_i - u)\nabla\varphi|\|_p \\ &\leq M\||\nabla u_i - \nabla u|\|_p + M\|u_i - u\|_p \to 0. \quad \square\end{aligned}$$

Seuraava lause antaa ekvivalentin määritelmän Sobolev-avaruudelle.

Lause 1.20. *Olkoon $u \in L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$. Tällöin $u \in W^{1,p}(\Omega)$, $1 \leq p < \infty$, $\iff$ $u \in L^p(\Omega)$ ja u:lla on olemassa heikot osittaisderivaatat $D_k u \in L^p(\Omega)$, $k = 1, \ldots, n$.*

Todistus. Implikaatio $\Rightarrow$ seuraa Lauseesta 1.16.
$\boxed{\Leftarrow}$ Merkitään $v = (D_1 u, \ldots, D_n u)$. On osoitettava, että on olemassa jono funktioita $u_j \in C^1(\Omega)$ siten, että

$$\|u_j - u\|_p \to 0 \quad \text{ja} \quad \||\nabla u_j - v|\|_p \to 0.$$

Merkitään $\forall k \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned}&\Omega_k = \{x \in \Omega\colon \operatorname{dist}(x, \partial\Omega) > 1/k\} \cap B(0, k), \\ &\Omega_0 = \emptyset, \\ &U_k = \Omega_{k+1} \setminus \bar{\Omega}_{k-1}.\end{aligned}$$

Olkoon $(\zeta_k)_{k=1}^\infty$ jono funktioita s.e.

$$\begin{aligned}&\zeta_k \in C_0^1(U_k), \quad 0 \leq \zeta_k \leq 1, \\ &\sum_{k=1}^\infty \zeta_k(x) = 1 \ \forall x \in \Omega.\end{aligned}$$

Lauseesta 1.18 seuraa, että $u \in W^{1,p}(U_k)$ ja siten Lemman 1.19 nojalla $u\zeta_k \in W^{1,p}(U_k)$. Lisäksi $\operatorname{spt}(u\zeta_k) \subset U_k$. Näin ollen $\forall \varepsilon > 0$ ja $\forall k \in \mathbb{N}$ kohti $\exists i_{\varepsilon,k} \in \mathbb{N}$ s.e.

$$\begin{aligned}&\operatorname{spt}\big((u\zeta_k) * \varphi_{i_{\varepsilon,k}}\big) \subset U_k, \\ &\|(u\zeta_k) * \varphi_{i_{\varepsilon,k}} - u\zeta_k\|_p < \varepsilon 2^{-k}, \\ &\||\nabla\big((u\zeta_k) * \varphi_{i_{\varepsilon,k}}\big) - \nabla(u\zeta_k)|\|_p < \varepsilon 2^{-k},\end{aligned}$$

missä φ_i on kuten kaavassa (1.17). Sovelletaan edellä ollutta jokaisella $j \in \mathbb{N}$ arvoon $\varepsilon = 1/j$ ja määritellään

$$u_j = \sum_{k=1}^\infty (u\zeta_k) * \varphi_{i_{\varepsilon,k}}. \quad (\varepsilon = 1/j)$$

Jokaisella $x \in \Omega$ on olemassa sellainen ympäristö, jossa yo. summassa on vain äärellisen monta nollasta poikkeavaa termiä. Siten $u_j \in C^1(\Omega)$. Koska

$$u = \sum_{k=1}^{\infty} u\zeta_k,$$

niin

$$\begin{aligned} \|u_j - u\|_p &\le \sum_{k=1}^{\infty} \|(u\zeta_k) * \varphi_{i_{\varepsilon,k}} - u\zeta_k\|_p < \varepsilon = 1/j, \\ \||\nabla u_j - v|\|_p &\le \sum_{k=1}^{\infty} \||\nabla\big((u\zeta_k) * \varphi_{i_{\varepsilon,k}}\big) - \nabla(u\zeta_k)|\|_p < \varepsilon = 1/j. \end{aligned}$$

Siten $u \in W^{1,p}(\Omega)$, $v = \nabla u$, ja $u_j \to u$ $W^{1,p}(\Omega)$:ssa. □

Nyt voimme osoittaa, että monet tavalliset derivoimissäännöt pätevät myös heikoille osittaisderivaatoille.

Lause 1.21. *1. ("Leibnizin sääntö") Olkoot $u, h \in W^{1,p}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$. Silloin $uh \in W^{1,p}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ ja*

$$D_k(uh) = uD_kh + hD_ku \quad \text{m.k.} \tag{1.22}$$

2. ("Ketjusääntö") Jos $u \in W^{1,p}(\Omega)$, $f \in C^1(\mathbb{R})$, $f' \in L^\infty(\mathbb{R})$ ja $f(0) = 0$, niin $f \circ u \in W^{1,p}(\Omega)$ ja

$$D_k(f \circ u) = (f' \circ u)D_ku \quad \text{m.k.} \tag{1.23}$$

(Jos $m(\Omega) < \infty$, niin oletus $f(0) = 0$ on tarpeeton.)

3. Jos $u \in W^{1,p}(\Omega)$, niin $u^+, u^-, |u| \in W^{1,p}(\Omega)$ ja

$$\begin{aligned} \nabla u^+ &= \chi_{\{u>0\}} \nabla u \quad \text{m.k.}, \\ \nabla u^- &= -\chi_{\{u<0\}} \nabla u \quad \text{m.k.}, \\ \nabla |u| &= \begin{cases} \nabla u, & \text{m.k. joukossa } \{x \in \Omega\colon u(x) > 0\}; \\ 0, & \text{m.k. joukossa } \{x \in \Omega\colon u(x) = 0\}; \\ -\nabla u, & \text{m.k. joukossa } \{x \in \Omega\colon u(x) < 0\}. \end{cases} \end{aligned}$$

4. $\nabla u = 0$ m.k. joukossa $\{x \in \Omega\colon u(x) = 0\}$.

Todistus. 1. Selvästi $uh \in L^p(\Omega)$ ja $uD_kh + hD_ku \in L^p(\Omega)$, joten riittää todistaa kaava (1.22). Olkoon $\psi \in C_0^1(\Omega)$ mielivaltainen ja $U \Subset \Omega$ s.e. $\operatorname{spt}\psi \subset U$. Merkitäään $u_i = u * \varphi_i$ ja $h_i = h * \varphi_i$, missä φ_i on kuten kaavassa (1.17). Tällöin

$$\begin{aligned} u_i &\to u \quad L^p(U)\text{:ssa ja } L^q(U)\text{:ssa}, \\ h_i &\to h \quad L^p(U)\text{:ssa ja } L^q(U)\text{:ssa}, \\ D_ku_i &\to D_ku \quad L^p(U)\text{:ssa ja} \\ D_kh_i &\to D_kh \quad L^p(U)\text{:ssa}, \end{aligned}$$

joten

$$\begin{aligned}
&u_ih_i \to uh \quad L^1(U)\text{:ssa ja} \\
&u_iD_kh_i + h_iD_ku_i \to uD_kh + hD_ku \quad L^1(U)\text{:ssa.}
\end{aligned}$$

Näin ollen (1.10):n nojalla

$$\begin{aligned}
\int_\Omega uhD_k\psi\,dm &= \int_U uhD_k\psi\,dm \\
&= \lim_{i\to\infty}\int_U u_ih_iD_k\psi\,dm \\
&= -\lim_{i\to\infty}\int_U (u_iD_kh_i + h_iD_ku_i)\psi\,dm \\
&= -\int_U (uD_kh + hD_ku)\psi\,dm \\
&= -\int_\Omega (uD_kh + hD_ku)\psi\,dm.
\end{aligned}$$

Siis (1.22) pätee. (HT: Perustele konvergenssit.)

2. Ensin todetaan, että $f\circ u \in L^p(\Omega)$ ja $(f'\circ u)D_ku \in L^p(\Omega)$ (yksityiskohdat HT). Olkoot ψ, U, ja u_i kuten edellä. Tällöin

$$\begin{aligned}
\int_\Omega (f\circ u)D_k\psi\,dm &= \int_U (f\circ u)D_k\psi\,dm \\
&= \lim_{i\to\infty}\int_U (f\circ u_i)D_k\psi\,dm \\
&= -\lim_{i\to\infty}\int_U \psi(f'\circ u_i)D_ku_i\,dm \\
&= -\int_U \psi(f'\circ u)D_ku\,dm \\
&= -\int_\Omega \psi(f'\circ u)D_ku\,dm.
\end{aligned}$$

Siis (1.23) pätee. (HT: Perustele konvergenssit.)

3. Kiinnitetään $\varepsilon > 0$ ja määritellään $f_\varepsilon\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$,

$$f_\varepsilon(t) = \begin{cases} (t^2+\varepsilon^2)^{1/2} - \varepsilon, & \text{jos } t \geq 0; \\ 0, & \text{jos } t < 0. \end{cases}$$

Nyt $f_\varepsilon \in C^1(\mathbb{R})$, $f'_\varepsilon \in L^\infty(\mathbb{R})$, joten ketjusäännöstä (1.23) seuraa, että $\forall\psi \in C^1_0(\Omega)$

$$\int_\Omega (f_\varepsilon\circ u)D_k\psi\,dm = -\int_\Omega \psi(f'_\varepsilon\circ u)D_ku\,dm.$$

Antamalla $\varepsilon \to 0$ saadaan

$$\int_\Omega u^+D_k\psi\,dm = -\int_\Omega \psi\chi_{\{u>0\}}D_ku\,dm.$$

Näin ollen ensimmäinen kaava 3:ssa pätee. Samoin muut pätevät, sillä $u^- = (-u)^+$ ja $|u| = u^+ + u^-$.

4. Tämä kohta seuraa 3:sta, sillä $\nabla u = \nabla u^+ - \nabla u^-$. $\square$

1.24 Epäyhtälöitä

Sobolevin avaruuksien teoriassa eräät epäyhtälöt ovat äärimmäisen tärkeitä. Tällaisia ovat esim. Poincarén epäyhtälö ja Sobolevin epäyhtälö. Emme tällä kurssilla (valitettavasti) käsittele näitä kovin tarkkaan. Esitämme kuitenkin muutamia, joiden todistuksiin riittää Diff. II:n ja Reaalianalyysin tiedot. Tarkoitus on samalla oppia myös tyyppillisiä menetelmiä. Aloitetaan Poincarén tyyppisellä epäyhtälöllä. Oletamme koko ajan, että $n \geq 2$. Merkitsemme $B(x,r) = \{y \in \mathbb{R}^n : |x - y| < r\}$.

Lemma 1.25. *Jokaista $1 \leq p < \infty$ kohti on olemassa vakio $C = C(n,p)$ siten, että*

$$\int_{B(x,r)} |u(y) - u(z)|^p \, dy \leq C r^{n+p-1} \int_{B(x,r)} \frac{|\nabla u(y)|^p}{|y - z|^{n-1}} \, dy \tag{1.26}$$

kaikilla $B(x,r) \subset \mathbb{R}^n$, $u \in C^1\big(B(x,r)\big)$ ja $z \in B(x,r)$.

Todistus. Jos $y, z \in B(x,r)$, niin

$$u(y) - u(z) = \int_0^1 \langle \nabla u\big(z + t(y - z)\big), y - z \rangle \, dt.$$

Siten Hölderin epäyhtälön nojalla

$$|u(y) - u(z)|^p \leq |y - z|^p \int_0^1 |\nabla u\big(z + t(y - z)\big)|^p \, dt.$$

Merkitään

$$\tilde{u} = u \chi_{B(x,r)} \quad \text{ja} \quad g = |\nabla u| \chi_{B(x,r)},$$

jolloin voidaan olettaa, että $\tilde{u}$ ja g ovat määritelty koko $\mathbb{R}^n$:ssä. Nyt

$$\int_{B(x,r)} |u(y) - u(z)|^p \, dy = \int_{B(z,2r)} |\tilde{u}(y) - \tilde{u}(z)|^p \, dy. \tag{1.27}$$

Merkintöjen yksinkertaistamiseksi voidaan edelleen olettaa, että $z = 0$, jolloin

$$|\tilde{u}(y) - \tilde{u}(0)|^p \leq |y|^p \int_0^1 g^p(ty) \, dt.$$

Muussa tapauksessa tehdään sopiva muuttujanvaihto. Arvioidaan integraalia (1.27) käyttäen pallokoordinaatteja $y = (\theta, s) \in \mathbb{S} \times [0, \infty[$, $\mathbb{S} = S^{n-1}(0,1)$:

$$
\begin{aligned}
\int_{B(0,2r)} |\tilde u(y)-\tilde u(0)|^p\,dy &= \int_0^{2r}\int_{\mathbb{S}} |\tilde u(\theta,s)-\tilde u(0)|^p\,d\theta\, s^{n-1}\,ds\\
&\le \int_0^{2r}\int_{\mathbb{S}} s^p\int_0^1 g^p(\theta,ts)\,dt\,d\theta\, s^{n-1}\,ds\\
&\overset{\tau=st}{=} \int_0^{2r} s^{n+p-2}\int_{\mathbb{S}}\int_0^s g^p(\theta,\tau)\,d\tau\,d\theta\,ds\\
&= \int_0^{2r} s^{n+p-2}\int_{\mathbb{S}}\int_0^s \frac{g^p(\theta,\tau)}{\tau^{n-1}}\tau^{n-1}\,d\tau\,d\theta\,ds\\
&= \int_0^{2r} s^{n+p-2}\Big(\int_{B(0,s)} \frac{g^p(w)}{|w|^{n-1}}\,dw\Big)\,ds\\
&\le \int_0^{2r} s^{n+p-2}\Big(\int_{B(0,2r)} \frac{g^p(w)}{|w|^{n-1}}\,dw\Big)\,ds\\
&= \int_0^{2r} s^{n+p-2}\Big(\int_{B(x,r)} \frac{|\nabla u(y)|^p}{|y|^{n-1}}\,dy\Big)\,ds\\
&= \frac{2^{n+p-1}}{n+p-1} r^{n+p-1}\int_{B(x,r)} \frac{|\nabla u(y)|^p}{|y|^{n-1}}\,dy. \qquad \square
\end{aligned}
$$

Otetaan käyttöön merkintä

$$
f_A = \fint_A f(y)\,dy = \frac{1}{m(A)}\int_A f(y)\,dy,
$$

kun $A \subset \mathbb{R}^n$ on mitallinen, $m(A) > 0$ ja f on integroituva. Soveltamalla epäyhtälöä (1.26) tapauksessa $p = 1$ saadaan seuraava (Rieszin) potentiaaliarvio.

Korollari 1.28. *On olemassa vakio $C = C(n)$ siten, että*

$$
|u(z) - u_{B(x,r)}| \le C\int_{B(x,r)} \frac{|\nabla u(y)|}{|y-z|^{n-1}}\,dy \tag{1.29}
$$

kaikilla $B(x,r)\subset\mathbb{R}^n$, $u\in C^1\big(B(x,r)\big)$ ja $z\in B(x,r)$.

Todistus. Väite seuraa (1.26):ta, sillä

$$
\begin{aligned}
|u(z)-u_{B(x,r)}| &= \Big|u(z) - \fint_{B(x,r)} u(y)\,dy\Big|\\
&= \Big|\fint_{B(x,r)} \big(u(z)-u(y)\big)\,dy\Big|\\
&\le \fint_{B(x,r)} |u(z)-u(y)|\,dy\\
&= \frac{1}{cr^n}\int_{B(x,r)} |u(z)-u(y)|\,dy. \qquad \square
\end{aligned}
$$

Määritelmä 1.30. Olkoon $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$ ei-negatiivinen. Sen (1. kertaluvun) *Rieszin potentiaali* on funktio

$$I_1 f(x) = (|y|^{1-n} * f)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{f(y)}{|x-y|^{n-1}}\, dy.$$

Määritelmä 1.31. Sanomme, että mitallinen funktio $f\colon \mathbb{R}^n \to \dot{\mathbb{R}}$ kuuluu *heikkoon L^p-avaruuteen weak-$L^p(\mathbb{R}^n)$*, jos on olemassa vakio $c = c_f$ siten, että

$$m\big(\{x \in \mathbb{R}^n \colon |f(x)| > t\}\big) \le ct^{-p} \quad \forall t > 0.$$

Kun $1 \le p < n$, niin lukua

$$p^* = \frac{np}{n-p}$$

sanotaan p:n *Sobolev-konjugaatiksi*. Sille pätee

$$\frac{1}{p^*} = \frac{1}{p} + \frac{1}{n}, \quad p^* > p.$$

Lause 1.32. *Sublineaarinen kuvaus $f \mapsto I_1|f|$ kuvaa $L^1(\mathbb{R}^n)$:n heikkoon $L^{n/(n-1)}$-avaruuteen weak-$L^{n/(n-1)}(\mathbb{R}^n)$ ja $L^p(\mathbb{R}^n)$:n avaruuteen $L^{p^*}(\mathbb{R}^n)$, kun $1 < p < n$. Itse asiassa on olemassa vakio $c = c(n,p)$ siten, että*

$$\|I_1|f|\|_{p^*} \le c\|f\|_p, \quad 1 < p < n, \tag{1.33}$$

ja

$$m\big(\{x \in \mathbb{R}^n \colon I_1|f(x)| > t\}\big) \le \frac{c\|f\|_1^{n/(n-1)}}{t^{n/(n-1)}}. \tag{1.34}$$

Todistus. Todistuksessa esiintyvä c on yleinen merkintä vakiolle, joka riippuu korkeintaan n:stä ja p:sta, ja sen arvo voi muuttua riviltä toiselle siirryttäessä. Olkoon $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, $1 \le p < n$. Voimme olettaa, että $f \ge 0$. Kun $\delta > 0$, niin kirjoitetaan

$$\begin{aligned} I_1 f(x) &= \int_{B(x,\delta)} \frac{f(y)}{|x-y|^{n-1}}\, dy + \int_{\mathbb{R}^n \setminus B(x,\delta)} \frac{f(y)}{|x-y|^{n-1}}\, dy \\ &= A(x) + B(x). \end{aligned}$$

Ensimmäistä termiä voidaan arvioida maksimaalifunktiotekniikalla. Merkitään $A_j = B(x, 2^{-j}\delta) \setminus B(x, 2^{-j-1}\delta)$, $j = 0, 1, \ldots$. Nyt

$$\begin{aligned} A(x) &= \sum_{j=0}^{\infty} \int_{A_j} \frac{f(y)}{|x-y|^{n-1}}\, dy \\ &\le \sum_{j=0}^{\infty} (2^{-j-1}\delta)^{1-n} \int_{B(x,2^{-j}\delta)} f(y)\, dy \\ &= c \sum_{j=0}^{\infty} 2^{-j}\delta \fint_{B(x,2^{-j}\delta)} f(y)\, dy \\ &\le c\delta M f(x), \end{aligned}$$

missä Mf on f:n Hardy-Littlewood maksimaalifunktio (ks. [Ho2]). Jälkimmäistä termiä voidaan arvioida (tapauksessa $p > 1$) Hölderin epäyhtälöllä

$$B(x) \leq \|f\|_p \Big(\int_{\mathbb{R}^n \setminus B(x,\delta)} |x-y|^{(1-n)q} \, dy \Big)^{1/q},$$

missä $q = p/(p-1)$ on p:n Hölder-konjugaatti. Tapauksessa $p = 1$ käytämme arviota

$$B(x) \leq \delta^{1-n} \int_{\mathbb{R}^n} f(y) \, dy = \|f\|_1 \delta^{1-n}.$$

Jos $p > 1$, niin

$$\int_{\mathbb{R}^n \setminus B(x,\delta)} |x-y|^{(1-n)q} \, dy = \int_{\mathbb{S}} \int_\delta^\infty t^{(1-n)p/(p-1)} t^{n-1} \, dt \, d\theta = c\delta^{(p-n)/(p-1)}.$$

Siten

$$B(x) \leq c\|f\|_p \delta^{(p-n)/p}$$

kaikilla $1 \leq p < \infty$. Näin ollen

$$I_1 f(x) \leq c \left(\|f\|_p \delta^{1-n/p} + \delta M f(x) \right).$$

Minimoidaan oikea puoli valitsemalla

$$\delta = \left(\frac{(\frac{n}{p} - 1)\|f\|_p}{Mf(x)} \right)^{p/n},$$

jolloin saadaan arvio

$$I_1 f(x) \leq c \|f\|_p^{p/n} M f(x)^{1-p/n}.$$

Jos $p > 1$, niin käyttämällä Hardy-Littlewoodin lausetta (so. $\|Mf\|_p \leq c\|f\|_p$, ks. [Ho2]) saadaan arvio

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} |I_1 f(x)|^{np/(n-p)} \, dx &\leq c\|f\|_p^{p^2/(n-p)} \int_{\mathbb{R}^n} |Mf(x)|^p \, dx \\ &\leq c\|f\|_p^{np/(n-p)}. \end{aligned}$$

Jos $p = 1$, niin Hardy-Littlewoodin lauseen mukaan

$$m\big(\{x \in \mathbb{R}^n \colon Mf(x) > t\}\big) \leq \frac{c\|f\|_1}{t}, \quad \forall t > 0,$$

joten

$$\begin{aligned} m\big(\{x \in \mathbb{R}^n \colon I_1 f(x) > t\}\big) &\leq m\Big(\Big\{x \in \mathbb{R}^n \colon Mf(x) > \Big(ct/\|f\|_1^{1/n}\Big)^{n/(n-1)}\Big\}\Big) \\ &\leq \frac{c\|f\|_1^{n/(n-1)}}{t^{n/(n-1)}}. \quad \square \end{aligned}$$

Muokkaamalla yo. todistusta saadaan seuraava (lokaali) arvio kaikilla $1 < p < \infty$.

Lause 1.35. *Olkoon* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *avoin,* $m(\Omega) < \infty,\ 1 < \tilde{p} \le p < n\tilde{p}$ *ja* $\kappa = n\tilde{p}/(n\tilde{p} - p)$. *Tällöin on olemassa vakio* $c = c(n, p, \tilde{p})$ *s.e.*

$$\|I_1|f|\|_{\kappa p} \le c\, m(\Omega)^{\frac{\tilde{p}-1}{n\tilde{p}}} \|f\|_p$$

kaikilla $f \in L^p(\Omega),\ \operatorname{spt} f \subset \Omega$.

Todistus. Koska $\operatorname{spt} f \subset \Omega$, niin

$$I_1|f|(x) = \int_\Omega \frac{f(y)}{|x-y|^{n-1}}\, dy.$$

Siten termille $B(x)$ pätee arvio

$$B(x) \le \|f\|_p \Big(\int_{\Omega \setminus B(x,\delta)} |x-y|^{(1-n)q}\, dy \Big)^{1/q}.$$

Jos $\tilde{p} = p$, niin käytetään arviota

$$\int_{\Omega \setminus B(x,\delta)} |x-y|^{(1-n)q}\, dy \le \delta^{(1-n)q} m(\Omega).$$

Jos $p > \tilde{p}$, niin käyttämällä toistamiseen Hölderin epäyhtälöä saadaan

$$\int_{\Omega \setminus B(x,\delta)} |x-y|^{(1-n)q}\, dy \le \left(\int_{\Omega \setminus B(x,\delta)} |x-y|^{(1-n)q\alpha}\, dy \right)^{1/\alpha} m(\Omega)^{(\alpha-1)/\alpha},$$

missä $\alpha = (p-1)/(p-\tilde{p})$. Tämän jälkeen jatketaan kuten aiemmin valitsemalla nyt

$$\delta = \left(\frac{(\frac{n\tilde{p}}{p} - 1)\|f\|_p m(\Omega)^{(\tilde{p}-1)/p}}{Mf(x)} \right)^{\frac{p}{n\tilde{p}}}.$$

Yksityiskohdat jätetään harjoitustehtäväksi. □

Yhdistämällä Korollari 1.28 ja Lauseet 1.32 ja 1.35 saadaan ns. *Sobolev-Poincaré epäyhtälöt*.

Lause 1.36. *Jokaisella* $1 \le p < n$ *on olemassa vakio* $c = c(n, p)$ *siten, että*

$$\left(\int_{B(x,r)} |u(y) - u_{B(x,r)}|^{p^*}\, dy \right)^{1/p^*} \le c \left(\int_{B(x,r)} |\nabla u(y)|^p\, dy \right)^{1/p} \tag{1.37}$$

kaikilla $B(x, r) \subset \mathbb{R}^n$ *ja kaikilla* $u \in W^{1,p}(B(x, r))$.

Todistus. Merkitään lyhyemmin $B = B(x, r)$. Osoitetaan arviot ensin funktioille $u \in C^1(B) \cap W^{1,p}(B)$.

Jos $1 < p < n$, niin väite seuraa Korollari 1.28:sta ja Lause 1.32:sta.

Tapauksessa $p = 1,\ 1^* = n/(n-1)$, joudumme käyttämään ns. katkaisutekniikkaa, sillä Korollari 1.28:sta ja heikon tyypin epäyhtälöstä (1.34) saadaan vain arvio

$$\begin{aligned} m\big(\{|u - u_B| > t\}\big) &\le m\big(\{I_1|\nabla u| > t/c\}\big) \\ &\le c\,(\|\nabla u\|_1/t)^{1^*}. \end{aligned}$$

Ideana on osittaa B erillisiin joukkoihin

$$B_j = \{2^j < |u - u_B| < 2^{j+1}\},\ j \in \mathbb{Z},$$

ja (yrittää) arvioida

$$\begin{aligned}\int_B |u-u_B|^{1^*}\,dm &\le \sum_{j\in\mathbb{Z}} 2^{(j+1)1^*} m(B_j)\\ &\overset{(i)}{\le} c\sum_{j\in\mathbb{Z}} 2^{(j+1)1^*}\|\chi_{B_j}\nabla u\|_1^{1^*} 2^{-j1^*}\\ &\le c\|\nabla u\|_1^{1^*}.\end{aligned}$$

Ongelmana on askel (i). Tämän ratkaisemiseksi valitaan ensin sellainen $b \in \mathbb{R}$, että

$$m\big(\{u \ge b\}\big) \ge m(B)/2 \quad \text{ja} \quad m\big(\{u \le b\}\big) \ge m(B)/2,$$

ja tehdään havainto (HT 2/3)

$$\begin{aligned}\left(\int_B |u-u_B|^{1^*}\,dm\right)^{1/1^*} &\le 2\inf_{c\in\mathbb{R}}\left(\int_B |u-c|^{1^*}\,dm\right)^{1/1^*}\\ &\le 2\left(\int_B |u-b|^{1^*}\,dm\right)^{1/1^*}.\end{aligned}$$

Merkitään

$$v_+ = \max(u-b,0) \quad \text{ja} \quad v_- = \max(b-u,0),$$

jolloin

$$\int_B |u-b|^{1^*}\,dm = \int_B v_+^{1^*}\,dm + \int_B v_-^{1^*}\,dm.$$

Merkitään lyhyemmin $v = v^+$ ja lisäksi

$$v_{t_1}^{t_2} = \min\big(\max(0, v-t_1), t_2-t_1\big),$$

kun $0 < t_1 < t_2 < \infty$. Jos $u(x) \le b$, niin $v_{t_1}^{t_2}(x) = 0$, joten

$$m\big(\{v_{t_1}^{t_2} = 0\}\big) \ge m\big(\{u \le b\}\big) \ge m(B)/2.$$

Harjoitustehtävä 2/2:n mukaan $\forall t > 0$ pätee

$$m\big(\{v_{t_1}^{t_2} > t\}\big) \le 2\inf_{c\in\mathbb{R}} m\big(\{|v_{t_1}^{t_2} - c| > t/2\}\big).$$

Siten

$$\begin{aligned}\sup_{t\ge 0} m\big(\{v_{t_1}^{t_2} > t\}\big)t^{1^*} &\le \sup_{t\ge 0} 2\inf_{c\in\mathbb{R}} m\big(\{|v_{t_1}^{t_2} - c| > t/2\}\big)(t/2)^{1^*}2^{1^*}\\ &\le 2^{1^*+1}\sup_{t\ge 0} m\big(\{|v_{t_1}^{t_2} - (v_{t_1}^{t_2})_B| > t/2\}\big)(t/2)^{1^*}\\ &\le c2^{1^*+1}\||\nabla u|\chi_{\{t_1<v<t_2\}}\|_1^{1^*}.\end{aligned}$$

Nyt voimme arvioida

$$\begin{aligned}
\int_B v^{1^*}\,dm &\le \sum_{k\in\mathbb{Z}} 2^{k1^*} m\big(\{2^{k-1} < v \le 2^k\}\big)\\
&\le \sum_{k\in\mathbb{Z}} 2^{k1^*} m\big(\{v \ge 2^{k-1}\}\big)\\
&= \sum_{k\in\mathbb{Z}} 2^{k1^*} m\big(\{v_{2^{k-2}}^{2^{k-1}} \ge 2^{k-2}\}\big)\\
&\le c2^{3\cdot 1^*+1} \sum_{k\in\mathbb{Z}} \left(\int_B |\nabla u|\chi_{\{2^{k-2}<v\le 2^{k-1}\}}\,dm\right)^{1^*}\\
&\le c2^{3\cdot 1^*+1} \left(\sum_{k\in\mathbb{Z}} \int_B |\nabla u|\chi_{\{2^{k-2}<v\le 2^{k-1}\}}\,dm\right)^{1^*}\\
&= c2^{3\cdot 1^*+1} \left(\int_B |\nabla u|\,dm\right)^{1^*}.
\end{aligned}$$

Sama arvio pätee v_-:lle, joten (1.37) on voimassa. Itse asiassa käytimme yllä heikon tyypin arviota (1.34) "katkaistuille" funktioille, vaikka todistimme sen vain C^1-funktioille. Arvion (1.34) todistus toimii kuitenkin myös katkaistuille funktioille.

Olkoon sitten $u \in W^{1,p}(B)$ ja $u_i \in W^{1,p}(B) \cap C^1(B)$ s.e. $u_i \to u$ $W^{1,p}(B)$:ssä. Soveltamalla arviota (1.37) erotuksiin $u_i - u_j$ nähdään, että (u_i) on Cauchy-jono $L^{p^*}(B)$:ssä. Siten $u \in L^{p^*}(B)$ ja toteuttaa arvion (1.37). Yksityiskohdat jätetään harjoitustehtäväksi. $\square$

Epäyhtälö (1.37) voidaan kirjoittaa muodossa

$$\left(\fint_{B(x,r)} |u(y) - u_{B(x,r)}|^{p^*}\,dy\right)^{1/p^*} \le cr \left(\fint_{B(x,r)} |\nabla u(y)|^p\,dy\right)^{1/p}.$$

Tällainen epäyhtälö pätee kaikilla $1 < p < \infty$. Nimittäin Korollari 1.28:sta ja Lause 1.35:sta saadaan seuraava lause.

Lause 1.38. *Olkoon $1 < \tilde{p} \le p < n\tilde{p}$ ja $\kappa = n\tilde{p}/(n\tilde{p} - p)$. Tällöin on olemassa vakio $c = c(n, p, \tilde{p})$ s.e.*

$$\left(\fint_{B(x,r)} |u(y) - u_{B(x,r)}|^{\kappa p}\,dy\right)^{\frac{1}{\kappa p}} \le cr \left(\fint_{B(x,r)} |\nabla u(y)|^p\,dy\right)^{1/p} \tag{1.39}$$

kaikilla $B(x,r) \subset \mathbb{R}^n$, $u \in W^{1,p}\big(B(x,r)\big)$.

Huomautus 1.40.

1. Yllä oleva arvio on hyödyllinen tapauksessa $p = n$, sillä silloin κn saadaan mielivaltaisen suureksi valitsemalla $\tilde{p}$ tarpeeksi läheltä 1:stä. Kuitenkaan tästä *ei* pidä päätellä, että funktio $u \in W^{1,n}(\Omega)$ kuuluisi avaruuteen $L^\infty(\Omega)$ (ks. HT 2/4).

2. Tapauksessa $p = n$ pätee ns. *Trudingerin epäyhtälö:* On olemassa vakiot $c_1 = c_1(n)$ ja $c_2 = c_2(n)$ siten, että

$$\fint_B \exp\left(\frac{c_1|u(y) - u_B|}{\|\nabla u\|_n}\right)^{n/(n-1)} dy \le c_2$$

kaikilla $B = B(x,r) \subset \mathbb{R}^n$ ja $u \in W^{1,n}(B)$. Emme todista tätä.

3. Jos $u \in W^{1,n}(\mathbb{R}^n)$ ja $B(x,r) \subset \mathbb{R}^n$, niin (1.39):n ja Hölderin epäyhtälön nojalla

$$\fint_{B(x,r)} |u(y) - u_{B(x,r)}|\, dy \le \left(\fint_{B(x,r)} |u(y) - u_{B(x,r)}|^{\kappa n}\, dy \right)^{\frac{1}{\kappa n}} \le \left(\fint_{B(x,r)} |\nabla u|^n\, dm \right)^{1/n}$$
$$\le c \left(\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u|\, dm \right)^{1/n} < \infty.$$

Siten $u \in \mathrm{BMO}(\mathbb{R}^n)$ (=bounded mean oscillation).

Määritelmä 1.41. Olkoot (X, d_1) ja (Y, d_2) metrisiä avaruuksia ja $0 < \alpha < 1$. Sanomme, että kuvaus $f\colon X \to Y$ on *Hölder-jatkuva eksponentilla* α, jos on olemassa vakio L s.e.

$$d_2\big(f(x), f(y)\big) \le L d_1(x,y)^\alpha$$

kaikilla $x, y \in X$. Sanomme myös, että $f\colon X \to Y$ on *lokaalisti Hölder-jatkuva eksponentilla* α, jos jokaisella X:n pisteellä on olemassa ympäristö, jossa f on Hölder-jatkuva eksponentilla α.

Tapauksessa $p > n$ pätee seuraava *Morreyn epäyhtälö.*

Lause 1.42. *(a) Jokaisella $n < p < \infty$ on olemassa vakio $c = c(n,p)$ siten, että*

$$|u(y) - u(z)| \le c\, r \left(\fint_B |\nabla u|^p\, dm \right)^{1/p} \tag{1.43}$$

kaikilla $B = B(x,r) \subset \mathbb{R}^n$, kaikilla $u \in W^{1,p}(B)$ ja m.k. $y, z \in B$.

(b) Jos $u \in W^{1,p}(\Omega)$ ja $n < p < \infty$, niin raja-arvo

$$\lim_{r \to 0} \fint_{B(x,r)} u(y)\, dy =: u^*(x) \tag{1.44}$$

on olemassa kaikilla $x \in \Omega$. Lisäksi $u = u^*$ m.k. ja u^* on lokaalisti Hölder-jatkuva eksponentilla $1 - n/p$.

Tod. Olkoon $u \in C^1(B) \cap W^{1,p}(B)$, $p > n$. Tällöin Korollari 1.28:n nojalla

$$\begin{aligned}
&|u(y) - u(z)| \le |u(y) - u_B| + |u(z) - u_B| \\
&\le c \left(\int_B \frac{|\nabla u(w)|}{|w-y|^{n-1}}\, dw + \int_B \frac{|\nabla u(w)|}{|w-z|^{n-1}}\, dw \right) \\
&\le c \left(\int_B |\nabla u|^p\, dm \right)^{1/p} \left(\left(\int_B |w-y|^{\frac{(1-n)p}{p-1}}\, dw \right)^{\frac{p-1}{p}} + \left(\int_B |w-z|^{\frac{(1-n)p}{p-1}}\, dw \right)^{\frac{p-1}{p}} \right).
\end{aligned}$$

Toisaalta käyttämällä pallokoordinaatteja saadaan arviot

$$\begin{aligned}
\int_B |w-y|^{\frac{(1-n)p}{p-1}}\, dw &\le \int_{B(y,2r)} |w-y|^{\frac{(1-n)p}{p-1}}\, dw \\
&= c \int_0^{2r} s^{\frac{(1-n)p}{p-1}} s^{n-1}\, ds \\
&= c r^{\frac{p-n}{p-1}}
\end{aligned}$$

ja

$$\int_B |w-z|^{\frac{(1-n)p}{p-1}}\,dw \le cr^{\frac{p-n}{p-1}}.$$

Siten

$$|u(y)-u(z)| \le cr^{\frac{p-n}{p}} \left(\int_B |\nabla u|^p\,dm\right)^{1/p} = cr \left(\fint_B |\nabla u|^p\,dm\right)^{1/p}.$$

Jos $u \in W^{1,p}(B)$, niin approksimoimalla u:ta sileillä funktioilla $W^{1,p}(B)$:ssä nähdään, että (1.43) pätee m.k. $y, z \in B$.

Olkoon sitten $u \in W^{1,p}(\Omega)$, $p > n$. Määritellään funktio $\bar u \colon \Omega \to \mathbb{R}$,

$$\bar u(x) = \limsup_{r\to 0} \fint_{B(x,r)} u\,dm.$$

(Perustele, miksi $\bar u(x) \in \mathbb{R}$ $\forall x \in \Omega$.) Tällöin Lebesguen differentioituvuuslauseen mukaan $u = \bar u$ m.k. Olkoon $x \in \Omega$ ja $B(x,2r) \subset \Omega$. Tällöin kaikilla $y \in B(x,r)$ pätee (yksityiskohdat HT)

$$\begin{aligned}
|\bar u(x) - \bar u(y)| &\le c|x-y| \left(\fint_{B(x,2|x-y|)} |\nabla u|^p\,dm\right)^{1/p} \\
&\le c|x-y|^{1-n/p} \left(\int_{B(x,2|x-y|)} |\nabla u|^p\,dm\right)^{1/p} \\
&\le c|x-y|^{1-n/p} \left(\int_\Omega |\nabla u|^p\,dm\right)^{1/p}.
\end{aligned}$$

Siten $\bar u$ on lokaalisti Hölder-jatkuva eksponentilla $1 - n/p$. Koska $\bar u$ on jatkuva, niin raja-arvo

$$\bar u(x) = \lim_{r\to 0} \fint_{B(x,r)} \bar u\,dm = \lim_{r\to 0} \fint_{B(x,r)} u\,dm$$

on olemassa $\forall x \in \Omega$. □

Määritelmä 1.45. Olkoon $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ avoin ja $1 \le p < \infty$. Sobolev-avaruus $W_0^{1,p}(\Omega)$ on $C_0^1(\Omega)$:n täydellistymä normin $\|\cdot\|_{1,p}$ suhteen.

Lähes suoraan Korollari 1.28:sta saadaan arvio

$$|u(x)| \le c \int_\Omega \frac{|\nabla u(y)|}{|x-y|^{n-1}}\,dy \tag{1.46}$$

kaikilla $u \in C_0^1(\Omega)$ ja $x \in \Omega$. Tällöin nimittäin $\operatorname{spt} u$ on kompakti ja valitsemalla $r > 0$ niin suureksi, että $\operatorname{spt} u \subset B(x,r)$ sekä asettamalla $u|\mathbb{R}^n \setminus \Omega = 0$ saadaan

$$|u(x) - u_{B(x,r)}| \le c \int_{B(x,r)} \frac{|\nabla u(y)|}{|x-y|^{n-1}}\,dy = c \int_\Omega \frac{|\nabla u(y)|}{|x-y|^{n-1}}\,dy.$$

Toisaalta

$$u_{B(x,r)} = \fint_{B(x,r)} u\,dm \le cr^{-n}\int_\Omega u\,dm \to 0,$$

kun $r \to \infty$. Siten (1.46) pätee. Näin ollen saamme Sobolev-Poincaré epäyhtälöt funktioille $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$:

Lause 1.47. *(a) Jokaisella* $1 \le p < n$ *on olemassa vakio* $c = c(n,p)$ *s.e.*

$$\left(\int_\Omega |u|^{p^*}\,dm\right)^{1/p^*} \le c\left(\int_\Omega |\nabla u|^p\,dm\right)^{1/p}$$

kaikilla $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$.

(b) Olkoon $1 < \tilde p \le p < n\tilde p$ *ja* $\kappa = n\tilde p/(n\tilde p - p)$. *Tällöin on olemassa vakio* $c = c(n,p,\tilde p)$ *s.e.*

$$\left(\fint_{B(x,r)} |u|^{\kappa p}\,dm\right)^{\frac{1}{\kappa p}} \le cr\left(\fint_{B(x,r)} |\nabla u|^p\,dm\right)^{1/p}$$

kaikilla $B(x,r) \subset \mathbb{R}^n,\ u \in W_0^{1,p}\big(B(x,r)\big)$.

Huomautus 1.48. Tässä luvussa käsiteltiin vain joitain Sobolevin avaruuksiin liittyviä ilmiöitä ja esimerkiksi tärkeät kompaktisuustulokset on jätetty käsittelemättä. Mainitaan kuitenkin seuraava, jossa oletus $p > 1$ on välttämätön. Jos (u_j) on rajoitettu jono $W^{1,p}(\Omega)$:ssa ja $p > 1$ (so. $\|u_j\|_{1,p} \le c < \infty$), niin on olemassa osajono (u_{j_i}) ja $u \in W^{1,p}(\Omega)$ s.e. $u_{j_i} \to u$ heikosti $L^p(\Omega)$:ssa ja $\nabla u_{j_i} \to \nabla u$ heikosti $L^p(\Omega;\mathbb{R}^n)$:ssä. Jos $u_j \in W_0^{1,p}(\Omega)$, niin $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$. Tämä johtuu siitä, että $W^{1,p}(\Omega)$ on refleksiivinen, jos $p > 1$ (ks. Funktionaalianalyysin kurssi).

2 Lipschitz kuvaukset

Tässä luvussa tutkimme mm. $\mathbb{R}^n$:n Lipschitz-funktioiden differentioituvuutta, Lipschitz-kuvausten jatkamista sekä metristen avaruuksien upotuslauseita. (Lähdemateriaalit: [EG], [He1], [He2], [HKM], [HKST], [K1].)

Olkoot (X,d_1) ja (Y,d_2) metrisiä avaruuksia. Palautetaan mieliin, että kuvaus $f\colon X \to Y$ on *Lipschitz*, jos on olemassa vakio L siten, että

$$d_2\big(f(x),f(y)\big) \le Ld_1(x,y) \quad \forall x,y \in X. \tag{2.1}$$

Sanomme tällöin, että f on L-Lipschitz. Kuvaus $f\colon X \to Y$ on *lokaalisti Lipschitz*, jos jokaisella X:n pisteellä on ympäristö, jossa f on Lipschitz. Jos L-Lipschitz kuvauksella $f\colon X \to Y$ on käänteiskuvaus $f^{-1}\colon Y \to X$, joka on myös L-Lipschitz, niin f:ää kutsutaan *L-bilipschitz* kuvaukseksi. Kuvaus $f\colon X \to Y$ on *isometria*, jos

$$d_2\big(f(x),f(y)\big) = d_1(x,y) \quad \forall x,y \in X.$$

2.2 $\mathbb{R}^n$:n Lipschitz-funktioiden differentioituvuus

Todistamme seuraavaksi Rademacherin lauseen edellä ollutta Morreyn epäyhtälöä käyttäen. Tätä varten tutkitaan ensin Lipschitz-funktioiden kuulumista Sobolevin avaruuksiin.

Lause 2.3. *Olkoon $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ avoin ja $u\colon \Omega \to \mathbb{R}$ lokaalisti Lipschitz. Tällöin $u \in W^{1,p}_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ kaikilla $p \geq 1$.*

Tod. Selvästi u on jatkuva, joten $u \in L^p_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ $\forall p \geq 1$. Riittää osoittaa, että u:lla on heikot osittaisderivaatat $D_k u \in L^p_{\mathrm{loc}}(\Omega)$, $k = 1, \ldots, n$, $\forall p \geq 1$. Olkoon $U \Subset \Omega$. Koska u on lokaalisti Lipschitz, niin on olemassa vakio L s.e. $u|U$ on L-Lipschitz. Merkitään $x = (t, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{n-1}$. Kiinnitetään $y \in \mathbb{R}^{n-1}$ s.e. $\mathbb{R} \times \{y\} \cap U \neq \emptyset$. Tällöin funktio $\varphi_y\colon I \to \mathbb{R}$, $\varphi_y(t) = u(t, y)$, on L-Lipschitz jokaisella suljetulla välillä I, jolla $I \times \{y\} \subset U$. Erityisesti φ_y on absoluuttisesti jatkuva ja siten derivaatta $\varphi_y'(t) = D_1 u(t, y)$ on olemassa m.k. $t \in I$ (ks. Reaalianalyysi I [Ho2]). Lisäksi $|\varphi_y'(t)| \leq L$ m.k. $t \in I$. Funktiot

$$\overline{D}_1 u(x) := \limsup_{i \to \infty} \frac{u(t + 1/i, y) - u(t, y)}{1/i}$$

ja

$$\underline{D}_1 u(x) := \liminf_{i \to \infty} \frac{u(t + 1/i, y) - u(t, y)}{1/i}$$

ovat mitallisia, sillä ne ovat pisteittäisiä raja-arvoja jatkuvista funktioista (= erotusosamääristä). Erityisesti joukko, jossa osittaisderivaatta $D_1 u$ on olemassa (ts. $\{x\colon \underline{D}_1 u(x) = \overline{D}_1 u(x) \in \mathbb{R}\}$) on mitallinen. Fubinin lauseesta seuraa nyt, että $D_1 u$ on olemassa m.k. U:ssa ja $|D_1 u| \leq L$ m.k. Siis $D_1 u \in L^p(U)$ $\forall p \geq 1$, joten $D_1 u \in L^p_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ $\forall p \geq 1$. Vielä on perusteltava, että $D_1 u$ on u:n heikko 1. osittaisderivaatta. Tämä seuraa siitä, että absoluuttisesti jatkuville funktioille pätee osittaisintegrointikaava (ks. Reaalianalyysi I, HT 8/6 (v. 2003)). Samoin voidaan käsitellä muut osittaisderivaatat $D_k u$. $\square$

Huomautus 2.4. Myös käänteinen tulos pätee. Toisin sanoen, jos $u \in L^\infty_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ ja sillä on heikot osittaisderivaatat $D_k u \in L^\infty_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ $\forall k = 1, \ldots, n$, niin tällöin u:n ekvivalenssiluokassa on edustaja, joka on lokaalisti Lipschitz.

Seuraava on Calderónin yleistys Rademacherin lauseesta.

Lause 2.5. *Olkoon $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ avoin ja $u \in W^{1,p}_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ jollakin $p > n$. Tällöin u on differentioituva m.k. Ω:ssa.*

Tod. Olkoon $B \Subset \Omega$ mielivaltainen kuula, jolloin $u \in W^{1,p}(B)$. Lebesguen differentioituvuuslauseen mukaan

$$\lim_{r \to 0} \fint_{B(x_0, r)} |\nabla u(x) - \nabla u(x_0)|^p \, dy = 0 \tag{2.6}$$

melkein kaikilla $x_0 \in B$. Valitaan tällainen piste ja määritellään funktio

$$v(x) = u(x) - u(x_0) - \langle \nabla u(x_0), x - x_0 \rangle.$$

Tällöin $v \in W^{1,p}(B)$ ja $\nabla v(x) = \nabla u(x) - \nabla u(x_0)$ m.k. $x \in B$. Morreyn epäyhtälöstä (1.43) sovellettuna funktioon v saadaan

$$
\begin{aligned}
|u(y) - u(x_0) - \langle \nabla u(x_0), y - x_0 \rangle| &= |v(y)| = |v(y) - v(x_0)| \\
&\le cr \left(\fint_{B(x_0,2r)} |\nabla v(x)|^p \, dx \right)^{1/p} \\
&= cr \left(\fint_{B(x_0,2r)} |\nabla u(x) - \nabla u(x_0)|^p \, dx \right)^{1/p},
\end{aligned}
$$

missä $r = |y - x_0|$. Nyt (2.6):n nojalla

$$
\frac{|u(y) - u(x_0) - \langle \nabla u(x_0), y - x_0 \rangle|}{|y - x_0|} \to 0,
$$

kun $r \to 0$. Lisäksi kuvaus $h \mapsto \langle \nabla u(x_0), h \rangle$ on lineaarinen kuvaus $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, joten u on differentioituva x_0:ssa ja siten m.k. Ω:ssa. $\square$

Huomautus 2.7. Ehto $p > n$ on tarkka, sillä on olemassa funktio $u \in W^{1,n}(\Omega)$, $\Omega \Subset \mathbb{R}^n$, joka *ei* ole jatkuva *missään* Ω:n pisteessä, eikä näin ollen voi olla differentioituva missään Ω:n pisteessä. Tällainen funktio saadaan konstruoitua esimerkiksi seuraavasti: Numeroidaan kaikki Ω:n rationaalipisteet $\{q_1, q_2, \ldots\}$ ja määritellään $u \colon \Omega \to \dot{\mathbb{R}}$,

$$
u(x) = \sum_{i=1}^{\infty} 2^{-i} \log\log \left(1 + \frac{1}{|x - q_i|} \right).
$$

Nyt $u \in W^{1,n}(\Omega)$, mutta ei ole jatkuva missään pisteessä. (Yksityiskohdat HT.)

Lauseista 2.3 ja 2.5 seuraa nyt välittömästi.

Korollari 2.8 (Rademacherin lause)**.** *Olkoon $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ avoin ja $u \colon \Omega \to \mathbb{R}$ lokaalisti Lipschitz. Silloin u on differentioituva m.k. Ω:ssa.*

Huomautus 2.9. Rademacherin lause pätee myös lokaalisti Lipschitz kuvauksille $f \colon \Omega \to \mathbb{R}^m$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, sillä jokainen f:n koordinaattifunktio on differentioituva m.k.

2.10 Lipschitz-vakiot Lip ja lip

Olkoon (X, d) metrinen avaruus. Otetaan käyttöön (yleinen) *merkintätapa*

$$
d(x, y) =: |x - y|, \quad x, y \in X,
$$

vaikkei X olekaan vektoriavaruus.

Olkoon $f \colon X \to Y$ Lipschitz kuvaus. Merkitään $\operatorname{LIP} f$:llä pienintä vakiota L, jolla (2.1) pätee. Toisin sanoen,

$$
\operatorname{LIP} f = \inf\{L \colon f \text{ on } L\text{-Lipschitz}\}.
$$

Helposti nähdään, että tällöin f on $\operatorname{LIP} f$-Lipschitz. Seuraavat pisteittäiset Lipschitz-vakiot tulevat karkeasti ottaen vastaamaan gradientin normia.

Määritelmä 2.11. Olkoon (X,d) metrinen avaruus ja $f\colon X\to\mathbb{R}$. Määritellään f:n *ylempi pisteittäinen Lipschitz-vakio* funktiona $\operatorname{Lip} f\colon X\to[0,+\infty]$,

$$\begin{aligned}\operatorname{Lip} f(x) &= \limsup_{r\to 0}\left(\sup_{y\in B(x,r)}\frac{|f(x)-f(y)|}{r}\right)\\ &= \lim_{r\to 0}\sup_{0<s<r} F_s(x),\end{aligned}$$

missä

$$F_s(x)=\sup_{y\in B(x,s)}\frac{|f(y)-f(x)|}{s}.$$

Samoin määritellään f:n *alempi pisteittäinen Lipschitz-vakio* funktiona $\operatorname{lip} f\colon X\to[0,+\infty]$,

$$\begin{aligned}\operatorname{lip} f(x) &= \liminf_{r\to 0}\left(\sup_{y\in B(x,r)}\frac{|f(x)-f(y)|}{r}\right)\\ &= \lim_{r\to 0}\inf_{0<s<r} F_s(x).\end{aligned}$$

Lemma 2.12. *Jos $f\colon X\to\mathbb{R}$ on jatkuva, niin $\operatorname{Lip} f$ ja $\operatorname{lip} f$ ovat Borel-funktioita.*

Tod. Osoitetaan ensin, että F_s on alhaalta puolijatkuva, ts. $\{x\colon F_s(x)>t\}$ on avoin $\forall t\in\mathbb{R}$. Riittää tarkastella arvoja $t\ge 0$. Kiinnitetään $t\ge 0$ ja olkoon $x_0\in\{x\colon F_s(x)>t\}$. Tällöin on olemassa $y'\in B(x,s)$ s.e. $|f(y')-f(x_0)|>st$. Valitaan $\varepsilon>0$ s.e. $|f(y')-f(x_0)|>st+\varepsilon$. Koska f on jatkuva x_0:ssä, on olemassa $r\in(0,s-|x_0-y'|]$ s.e. $|f(y)-f(x_0)|<\varepsilon$ $\forall y\in B(x_0,r)$. Toisaalta, jos $y\in B(x_0,r)$, niin $y'\in B(y,s)$ ja

$$\begin{aligned}|f(y)-f(y')| &\ge |f(y')-f(x_0)|-|f(x_0)-f(y)|\\ &> st+\varepsilon-\varepsilon=st.\end{aligned}$$

Siis $F_s(y)>t$ $\forall y\in B(x_0,r)$, joten

$$B(x_0,r)\subset\{x\colon F_s(x)>t\}$$

ja siten F_s on alhaalta puolijatkuva. Tästä seuraa, että myös $\sup_{0<s<r} F_s$ on alhaalta puolijatkuva (HT) ja siten Borel. Koska

$$\operatorname{Lip} f(x)=\lim_{r\to 0}\sup_{0<s<r}F_s(x)=\lim_{i\to\infty}\sup_{0<s<1/i}F_s(x),$$

on $\operatorname{Lip} f$ Borel. Osoitetaan lopuksi, että

$$\inf_{0<s<r}F_s(x)=\inf_{\substack{0<s<r\\ s\in\mathbb{Q}}}F_s(x), \tag{2.13}$$

jolloin myös $\inf_{0<s<r}F_s$, ja siten $\operatorname{lip} f$ on Borel. Selvästi

$$\inf_{0<s<r}F_s(x)\le\inf_{\substack{0<s<r\\ s\in\mathbb{Q}}}F_s(x).$$

Toisaalta

$$sF_s\ge(s-\varepsilon)F_{s-\varepsilon}\quad\forall\varepsilon>0,$$

joten jokaista $x,\ s\in(0,r)$ ja $\varepsilon>0$ kohti on olemassa $s'\in(0,r)\cap\mathbb{Q}$ s.e.

$$F_s(x)\ge(1-\varepsilon)F_{s'}(x).$$

Antamalla $\varepsilon\to 0$ nähdään, että (2.13) pätee. $\square$

2.14 Lipschitz-kuvausten jatkaminen

Lause 2.15 (McShane-Whitney jatkolause). *Olkoon X metrinen avaruus, $A \subset X$ ja $f\colon A \to \mathbb{R}$ L-Lipschitz. Tällöin on olemassa L-Lipschitz funktio $F\colon X \to \mathbb{R}$ s.e. $F|A = f$.*

Tod. Jokaisella $a \in A$ määritellään L-Lipschitz funktio $f^a\colon X \to \mathbb{R}$,

$$f^a(x) = f(a) + L|a - x|, \quad x \in X.$$

Määritellään F asettamalla

$$F(x) = \inf_{a \in A} f^a(x), \quad x \in X.$$

Selvästi $F(x) < \infty$ $\forall x \in X$. Kiinnitetään $a_0 \in A$, jolloin nähdään, että

$$\begin{aligned} f(a) + L|a - x| &\geq f(a) + L|a - a_0| - L|a_0 - x| \\ &\geq f(a_0) - L|a_0 - x|. \end{aligned}$$

Siten $F(x) > -\infty$ kaikilla $x \in X$. Koska jokainen f^a on L-Lipschitz ja $F(x) > -\infty$ $\forall x$, myös F on L-Lipschitz. Lisäksi jokaisella $x \in A$

$$F(x) \leq f^x(x) = f(x) \leq f(y) + L|x - y| = f^y(x) \quad \forall y \in A,$$

joten $F|A = f$. □

Korollari 2.16. *Olkoon X metrinen avaruus, $A \subset X$ ja $f\colon A \to \mathbb{R}^n$ L-Lipschitz. Silloin on olemassa $\sqrt{n}L$-Lipschitz kuvaus $F\colon X \to \mathbb{R}^n$ s.e. $F|A = f$.*

Tod. Sovelletaan Lausetta 2.15 koordinaattifunktioihin. □

Huomautus 2.17. Lause 2.15 pätee myös tapauksessa $X \subset \mathbb{R}^m$, $f\colon X \to \mathbb{R}^n$, mutta todistus on paljon vaikeampi (ns. *Kirszbraunin lause*).

Jos käytetään $\mathbb{R}^n$:ssä ℓ^∞-normia $\|\cdot\|_\infty$, $\|(x_1, \ldots, x_n)\|_\infty = \max\{|x_i|\colon i = 1, \ldots, n\}$, niin kerroin $\sqrt{n}$ on tarpeeton Korollari 2.16:ssa. Itseasiassa pätee yleisempi tulos. Sitä varten palautetaan mieliin merkintä

$$\ell^\infty(Y) = \{s\colon Y \to \mathbb{R}\colon \sup_{y \in Y}|s(y)| < \infty\},$$

kun Y on mikä tahansa joukko. Nyt $\ell^\infty(Y)$ varustettuna normilla $\|s\|_\infty = \sup_{y \in Y}|s(y)|$ on Banach avaruus.

Korollari 2.18. *Olkoon X metrinen avaruus, $A \subset X$, Y mikä tahansa joukko ja $f\colon A \to \ell^\infty(Y)$ L-Lipschitz kuvaus. Tällöin on olemassa L-Lipschitz kuvaus $F\colon X \to \ell^\infty(Y)$ s.e. $F|A = f$.*

Tod. Jokainen $\ell^\infty(Y)$:n piste s voidaan tulkita "jonoksi" $\big(s(y)\big)_{y \in Y}$. Siten voimme tulkita kuvauksen $f\colon A \to \ell^\infty(Y)$ kuvauksena, jonka "koordinaattifunktioita" ovat reaaliarvoiset funktiot $f_y\colon A \to \mathbb{R}$, $a \mapsto f(a)(y)$, $y \in Y$. Sovelletaan sitten Lausetta 2.15 näihin koordinaattifunktioihin. □

2.19 Metristen avaruuksien upotukset

Olkoot X ja Y topologisia avaruuksia. Sanomme, että kuvaus $f\colon X \to Y$ on *upotus*, jos $f\colon X \to f(X)$ on homeomorfismi. [*Huom.* $f(X)$:ssä relatiivitopologia.] Erityisesti jokainen isometria on upotus.

Lause 2.20 (Kuratowski)**.** *Jokainen metrinen avaruus X voidaan isometrisesti upottaa Banach-avaruuteen $\ell^\infty(X)$.*

Tod. Kiinnitetään $x_0 \in X$. Jokaisella $y \in X$, määritellään kuvaus $f_y\colon X \to \mathbb{R}$,

$$f_y(x) = |x - y| - |x - x_0|.$$

Kolmioepäyhtälöstä seuraa, että

$$\begin{aligned} |f_y(x)| &\le |y - x_0| \quad \text{ja} \\ |f_y(x) - f_{y'}(x)| &= \big||x - y| - |x - y'|\big| \le |y - y'| \end{aligned}$$

kaikilla $x \in X$. Siten f_y on rajoitettu eli $f_y \in \ell^\infty(X)$ ja $\|f_y - f_{y'}\|_\infty \le |y - y'|$. Toisaalta

$$|f_y(y) - f_{y'}(y)| = |y - y'|,$$

joten $\|f_y - f_{y'}\|_\infty = |y - y'|$. □

Kuratowskin upotuslauseen heikkous on siinä, että maalijoukko $\ell^\infty(X)$ riippuu X:stä. Jos X on separoituva, voidaan maalijoukoksi valita Banach-avaruus $\ell^\infty = \ell^\infty(\mathbb{N})$. Muistutetaan, että topologinen avaruus X on *separoituva*, jos on olemassa numeroituva tiheä osajoukko $\{x_1, x_2 \dots\} \subset X$.

Lause 2.21 (Fréchet)**.** *Jokainen separoituva metrinen avaruus X voidaan isometrisesti upottaa Banach-avaruuteen ℓ^∞.*

Tod. Kiinnitetään numeroituva tiheä osajoukko $\{x_0, x_1, x_2, \dots\} \subset X$. Silloin kuvaus

$$x \mapsto \big(|x - x_1| - |x_1 - x_0|, |x - x_2| - |x_2 - x_0|, \dots\big)$$

määrittelee isometrisen upotuksen $X \to \ell^\infty$. (Yksityiskohdat HT.) □

Huomautus 2.22. Edellisen lauseen ”heikkous” on, ettei ℓ^∞ ole separoituva. Banach on todistanut, että jokainen separoituva metrinen avaruus uppoaa isometrisesti separoituvaan Banach-avaruuteen $\big(C([0,1]), \|\cdot\|_\infty\big)$. Emme todista tätä.

Määritelmä 2.23. Sanomme, että metrinen avaruus X on *tuplaava* (eli *kahdentava*), jos on olemassa vakio $c \in \mathbb{N}$ s.e. jokainen joukko, jonka halkaisija on d, voidaan peittää c:llä joukolla, joiden halkaisija on korkeintaan $d/2$.

Lemma 2.24. *Jokainen tuplaava metrinen avaruus on separoituva.*

Tod. Kiinnitetään $y_0 \in X$ ja merkitään $X_k = X \cap B(y_0, k)$. Koska $X = \cup_{k \in \mathbb{N}} X_k$, riittää löytää numeroituva tiheä X_k:n osajoukko $\forall k \in \mathbb{N}$. Selvästi jokainen X_k on tuplaava metrinen avaruus vakiolla c ja X_k:n halkaisija on korkeintaan $2k$. Voimme siten olettaa, että X on rajoitettu. Olkoon $d = \operatorname{diam} X$. Voimme peittää X:n joukoilla $A_{1,1}, \dots, A_{1,c}$ s.e. $\operatorname{diam} A_{1,i} \le d/2$. Jokainen $A_{1,i}$ voidaan edelleen peittää c:llä joukolla, joiden halkaisijat ovat korkeintaan $d/2^2$. Yleisesti X voidaan peittää joukoilla $A_{i,1}, \dots, A_{i,c^i}$ s.e $\operatorname{diam} A_{i,j} \le d/2^i$. Valitaan pisteet $x_{i,j} \in A_{i,j}$ jokaisella $i \in \mathbb{N}$, $j = 1, \dots, c^i$. Tällöin joukko

$$S = \cup_{i,j} \{x_{i,j}\}$$

on numeroituva ja tiheä. □

Lemma 2.25. *Jos (X,d) on metrinen avaruus ja $0<\alpha<1$, niin (X,d^α) on metrinen avaruus.*

Tod. HT □

Sanomme, että (X,d^α) on (X,d):n *lumihiutale versio*.

Lause 2.26 (Assouad)**.** *Jos (X,d) on tuplaava metrinen avaruus, niin sen jokainen lumihiutale versio (X,d^α) voidaan bi-lipschitz upottaa johonkin euklidiseen avaruuteen $\mathbb{R}^N$. Lisäksi N riippuu vain α:sta ja (X,d):n tuplausvakiosta c.*

Lykkäämme Assouadin lauseen todistusta myöhemmäksi. Todistusta varten tarvitsemme lisää määritelmiä ja lemmoja. Palautetaan ensiksi mieleen Zornin lemma (ks. esim. Algebra, Topologia II).

Lemma 2.27 (Zornin lemma)**.** *Olkoon $(Y,\leq)$ osittain järjestetty joukko. Jos jokaisella Y:n ketjulla on yläraja Y:ssä, niin Y:ssä on ainakin yksi maksimaalinen alkio.*

Määritelmä 2.28. Olkoon X metrinen avaruus ja $\varepsilon>0$. Sanomme, että X:n osajoukko A on *ε-verkko,* jos

$$|x-y|\geq\varepsilon,\quad \forall x,y\in A,\ x\neq y.$$

Maksimaalinen ε-verkko $N=N(X,\varepsilon)$ on mikä tahansa ε-verkko, joka on maksimaalinen inkluusion $\subset$ suhteen. Tällöin

$$X=\bigcup_{x\in N}B(x,\varepsilon).$$

Lemma 2.29. *Jokaisella metrisellä avaruudella on olemassa maksimaalinen ε-verkko jokaisella $\varepsilon>0$.*

Tod. Väite voidaan todistaa Zornin lemman avulla. Merkitään X:n ε-verkkojen joukkoa $\mathcal{N}_\varepsilon(X)$:llä. Tällöin $(\mathcal{N}_\varepsilon(X),\subset)$ on osittain järjestetty joukko ($\mathcal{N}_\varepsilon(X)\neq\emptyset$, jos $X\neq\emptyset$). Jos $\mathcal{K}=\{A_\alpha\colon\alpha\in\mathcal{A}\}\subset\mathcal{N}_\varepsilon(X)$ on ketju (ts. täysin järjestetty joukko), niin

$$\bigcup_\alpha A_\alpha\in\mathcal{N}_\varepsilon(X)$$

on $\mathcal{K}$:n yläraja. Zornin lemman nojalla $\mathcal{N}_\varepsilon(X)$:ssä on (ainakin yksi) maksimaalinen alkio N. Perustellaan vielä edellä ollut väite $\cup_\alpha A_\alpha\in\mathcal{N}_\varepsilon(X)$. Olkoot $x,y\in\cup_\alpha A_\alpha,\ x\neq y$. Silloin $x\in A_\alpha$ ja $y\in A_\beta$ joillakin indekseillä $\alpha,\beta\in\mathcal{A}$. Koska $\mathcal{K}$ on ketju, pätee joko $A_\alpha\subset A_\beta$ tai $A_\beta\subset A_\alpha$. Erityisesti $A_\alpha\cup A_\beta$ on ε-verkko, joten $|x-y|\geq\varepsilon$. □

Huomautus 2.30.

1. Edellä *ei* vaadita, että maksimaalinen ε-verkko olisi numeroituva. Esimerkki metrisestä avaruudesta, jonka jokainen maksimaalinen ε-verkko on ylinumeroituva, on $(\mathbb{R}\times\mathbb{R},d)$, missä d on metriikka

$$d(z,z')=\begin{cases}|y-y'|, & \text{jos } z=(x,y), z'=(x,y');\\ |y|+|x-x'|+|y'|, & \text{jos } z=(x,y), z'=(x',y'), x\neq x'.\end{cases}$$

2. Joskus kirjallisuudessa määritellään ε-verkko *äärellisenä* osajoukkona $F\subset X$ s.e.

$$X=\bigcup_{x\in F}B(x,\varepsilon).$$

3. Kutsumme (tällä kurssilla) joukkoa $F \subset X$ *ε-tiheäksi*, jos

$$X = \bigcup_{x \in F} B(x, \varepsilon).$$

Jälkimmäiseen huomautukseen liittyy seuraava käsite. Käytämme sitä myöhemmin Lemman 2.32 kautta.

Määritelmä 2.31. Metrinen avaruus X on *totaalisesti rajoitettu* (eli *prekompakti*), jos jokaisella $\varepsilon > 0$ on olemassa äärellinen ε-tiheä joukko $F \subset X$.

Lemma 2.32. *Metrinen avaruus on kompakti, jos ja vain jos se on totaalisesti rajoitettu ja täydellinen.*

Tod. Jos metrinen avaruus X on kompakti, niin se on selvästi totaalisesti rajoitettu ja täydellinen (Topologia I:n tiedot). Oletetaan kääntäen, että X on totaalisesti rajoitettu ja täydellinen. Olkoon (y_i) jono X:n pisteitä. Koska X on totaalisesti rajoitettu, on olemassa äärellinen (1-tiheä) joukko $\{x_1, \ldots, x_{k_1}\}$ s.e. $X = \cup_{i=1}^{k_1} B(x_i, 1)$. Siten on olemassa kuula $B(x_i, 1)$, joka sisältää äärettömän monta jonon (y_i) pistettä. Poimitaan nämä y_i:t ja merkitään niiden muodostamaa osajonoa $(y_{1,i})$:llä. Edelleen on olemassa äärellinen 1/2-tiheä joukko ja siten kuula $B(x, 1/2)$, joka sisältää äärettömän monta jonon $(y_{1,i})$ pistettä. Merkitään näiden muodostamaa osajonoa $(y_{2,i})$:llä ja jatketaan prosessia. Yleisesssä vaiheessa on olemassa äärellinen 2^{-j}-tiheä joukko ja siten 2^{-j}-säteinen kuula, joka sisältää äärettömän monta jonon $(y_{j-1,i})$:n pistettä. Merkitään näiden muodostamaa osajonoa $(y_{j,i})$:llä. Nyt diagonaalijono $(y_{i,i})$ on Cauchy-jono ja se suppenee X:n täydellisyyden nojalla. Siis X on kompakti. $\square$

Lemma 2.33. *Olkoon Z metrinen avaruus, jonka jokaisessa suljetussa kuulassa $\bar{B}(z, r)$ on korkeintaan $M \in \mathbb{N}$ alkiota. Silloin on olemassa kuvaus $f \colon Z \to \{1, \ldots, M\}$ s.e. $f(z) \neq f(z')$, jos $|z - z'| \leq r$.*

Tod. Olkoon $\mathcal{F}$ kaikkien niiden kuvausten $g \colon Z_g \to \{1, \ldots, M\}$, $Z_g \subset Z$, joukko, joilla $g(z) \neq g(z')$, jos $z, z' \in Z_g$ ja $|z - z'| \leq r$. Selvästi $\mathcal{F} \neq \emptyset$. Määritellään $\mathcal{F}$:ään osittainen järjestys $\leq$,

$$g \leq g' \iff Z_g \subset Z_{g'} \text{ ja } g'|Z_g = g.$$

Olkoon $\mathcal{K} \subset \mathcal{F}$ ketju. Olkoon

$$Z' = \bigcup_{g \in \mathcal{K}} Z_g$$

ja määritellään $h \colon Z' \to \{1, \ldots, M\}$ yhtälöllä $h(z) = g(z)$, jos $z \in Z_g$. Kuvaus h on hyvin määritelty, koska $\mathcal{K}$ on ketju. Lisäksi $h(z) \neq h(z')$, jos $|z - z'| \leq r$, joten $h \in \mathcal{F}$. Nyt h on $\mathcal{K}$:n yläraja, sillä $Z_g \subset Z'$ $\forall g \in \mathcal{K}$. Zornin lemman mukaan $\mathcal{F}$:ssä on olemassa maksimaalinen alkio $f \colon Z_f \to \{1, \ldots, M\}$, jolle siis pätee, että $f(z) \neq f(z')$, jos $|z - z'| \leq r$. Oletetaan, että $Z_f \neq Z$ ja valitaan $z_0 \in Z \setminus Z_f$. Koska $z_0 \in \bar{B}(z_0, r) \setminus Z_f$ ja oletuksen mukaan $\operatorname{card} \bar{B}(z_0, r) \leq M$, niin $\operatorname{card}(Z_f \cap \bar{B}(z_0, r)) \leq M - 1$. Valitaan $k \in \{1, \ldots, M\}$ s.e. $f(z) \neq k$ kaikilla $z \in Z_f \cap \bar{B}(z_0, r)$. Jatketaan f kuvaukseksi $f' \colon Z_f \cup \{z_0\} \to \{1, \ldots, M\}$ asettamalla $f'(z_0) = k$ ja $f'(z) = f(z)$, kun $z \in Z_f$. Nyt $f' \in \mathcal{F}$ ja $f \leq f'$, mikä on ristiriita f:n maksimaalisuuden kanssa. Siis on oltava $Z_f = Z$. $\square$

Lemma 2.34. *Olkoon (X, d) metrinen avaruus. Oletetaan, että jollakin $m \in \mathbb{N}$ on olemassa jono funktioita $\varphi_j \colon X \to \mathbb{R}^m$, $j \in \mathbb{Z}$, ja vakiot $A, B > 0$ ja $0 < \tau < 1$ s.e.*

(1) $|\varphi_j(s) - \varphi_j(t)| \geq A$, *jos* $\tau^{j+1} < d(s, t) \leq \tau^j$, *ja*

(2) $|\varphi_j(s) - \varphi_j(t)| \le B \min\{\tau^{-j} d(s,t), 1\}$ *kaikilla* $s, t \in X$.

Tällöin jokaista $0 < \varepsilon < 1$ *kohti on olemassa* L*-bilipschitz upotus* $f\colon (X, d^\varepsilon) \to \mathbb{R}^n$ *jollakin* $n \in \mathbb{N}$. *Lisäksi bilipschitz vakio* L *ja dimensio* n *riippuvat vain annetusta datasta:* $m, A, B, \tau, \varepsilon$.

Lemman 2.34 samoin kuin Assouadin lauseen todistukset lisätään tähän myöhemmin (kunhan ne on ensin käsitelty luennolla).

3 Metristen avaruuksien suppeneminen

(Lähdemateriaali: [BBI], [DS], [Gr], [He2], [Pe].)

3.1 Hausdorff-etäisyys

Olkoon X metrinen avaruus, $S \subset X$ ja $\varepsilon > 0$. Joukko

$$S(\varepsilon) = \{x \in X\colon \operatorname{dist}(x, S) < \varepsilon\}$$

on S:n ε-ympäristö. Toisin sanoen

$$S(\varepsilon) = \bigcup_{x \in S} B(x, \varepsilon).$$

Määritelmä 3.2. Joukkojen $A \subset X$ ja $B \subset X$ välinen *Hausdorff-etäisyys* on

$$d_H(A, B) = \inf\{r > 0\colon A \subset B(r), B \subset A(r)\}.$$

Joskus merkitsemme myös $d_H^X = d_H$. Jos $A \ne \emptyset$, niin $d_H(A, \emptyset) = \infty$. Asetamme $d_H(\emptyset, \emptyset) = 0$.

Lemma 3.3. *Jos* $A, B, C \subset X$, *niin* $d_H(A, B) \le d_H(A, C) + d_H(C, B)$.

Tod. Voidaan olettaa, että $d_H(A, C) < \infty$ ja $d_H(C, B) < \infty$. Valitaan $r > 0$ ja $s > 0$ s.e.

$$A \subset C(r), \quad C \subset A(r), \quad C \subset B(s), \quad B \subset C(s). \tag{3.4}$$

Tällöin $C(r) \subset \big(B(s)\big)(r) \subset B(s + r)$, joten $A \subset B(s + r)$. Samoin $C(s) \subset \big(A(r)\big)(s)$, joten $B \subset A(r + s)$. Näin ollen $d_H(A, B) \le s + r$. Ottamalla inf yli sellaisten r:ien ja s:ien, joille (3.4) pätee, saadaan väite. $\square$

Huomautus 3.5.

1. Helposti nähdään, että $d_H(A, B) = \max\{\sup_{a \in A} \operatorname{dist}(a, B), \sup_{b \in B} \operatorname{dist}(b, A)\}$.
2. Jos $r > 0$, niin $d_H(A, B) \le r \iff \operatorname{dist}(a, B) \le r\ \forall a \in A$ ja $\operatorname{dist}(b, A) \le r\ \forall b \in B$.
3. d_H ei välttämättä ole metriikka, sillä voi olla $d_H(A, B) = \infty$ (esim. $X = \mathbb{R}^2$, A on suora $y = x$ ja B on suora $y = -x$), tai $d_H(A, B) = 0$, vaikka $A \ne B$ (esim. $X = \mathbb{R} = A$, $B = \mathbb{Q}$).

Merkitään X:n kompaktien epätyhjien osajoukkojen joukkoa $\mathcal{C}(X)$:llä.

Lemma 3.6. *Jos* $A, B \subset X$ *ovat suljettuja ja* $A \ne B$, *niin* $d_H(A, B) > 0$. *Erityisesti* d_H *määrittelee metriikan* $\mathcal{C}(X)$*:ssä.*

Tod. Olkoot $A, B \subset X$ suljettuja ja $A \ne B$. Voimme olettaa, että $A \setminus B \ne \emptyset$. Olkoon $x \in A \setminus B$. Koska B on suljettu, on olemassa $r > 0$ s.e. $B(x, r) \cap B = \emptyset$. Tällöin $x \notin B(r)$, joten $d_H(A, B) \ge r > 0$. Selvästi d_H on ei-negatiivinen, symmetrinen, ja $d_H(A, A) = 0$. Koska metrisessä avaruudessa jokainen kompakti joukko on rajoitettu, on $d_H(A, B)$ äärellinen, jos $A \in \mathcal{C}(X)$ ja $B \in \mathcal{C}(X)$. Kolmioepäyhtälö todistettiin Lemmassa 3.3. Näin ollen d_H määrittelee metriikan $\mathcal{C}(X)$:ssä. $\square$

Lause 3.7. *Jos X on kompakti, niin $(\mathcal{C}(X), d_H)$ on kompakti.*

Tod. Lemman 2.32 nojalla riittää osoittaa, että $(\mathcal{C}(X), d_H)$ on täydellinen ja totaalisti rajoitettu. Olkoon $(S_i)_{i\in\mathbb{N}}$ Cauchy-jono $\mathcal{C}(X)$:ssä. Merkitään

$$S = \{x \in X\colon B(x,r) \cap S_i \neq \emptyset \ \forall r > 0, \text{ äärettömän monella } i\text{:n arvolla}\}.$$

Osoitetaan, että $S \in \mathcal{C}(X)$ ja $d_H(S_i, S) \to 0$. Jos $y \in X \setminus S$, niin on olemassa $r > 0$ ja $i_r \in \mathbb{N}$ s.e. $B(y,r) \cap S_i = \emptyset \ \forall i \geq i_r$. Tällöin $B(z, r/2) \cap S_i = \emptyset \ \forall i \geq i_r$ ja $\forall z \in B(y, r/2)$. Näin ollen $B(y, r/2) \subset X \setminus S$, joten S on suljettu. Koska X on kompakti, on myös S kompakti.

Kiinnitetään $\varepsilon > 0$ ja olkoon $i_0 \in \mathbb{N}$ sellainen, että

$$d_H(S_i, S_j) < \varepsilon \quad \forall i, j \geq i_0.$$

Jos $x \in S$, niin on olemassa $j \geq i_0$ s.e. $B(x, \varepsilon) \cap S_j \neq \emptyset$. Siis $|x - y| < \varepsilon$ jollakin $y \in S_j$. Koska $d_H(S_i, S_j) < \varepsilon \ \forall i \geq i_0$, niin $\operatorname{dist}(y, S_i) < \varepsilon$ ja

$$\operatorname{dist}(x, S_i) \leq |x - y| + \operatorname{dist}(y, S_i) < 2\varepsilon \ \forall i \geq i_0.$$

Siis $S \subset S_i(2\varepsilon) \ \forall i \geq i_0$.

Olkoon sitten $i \geq i_0$ ja $x \in S_i$. Olkoon $i_1 = i$ ja jokaisella $k \in \mathbb{N}$ valitaan $i_k \in \mathbb{N}$ s.e. $i_{k+1} > i_k$ ja $d_H(S_j, S_n) < \varepsilon/2^k \ \forall j, n \geq i_k$. Olkoon $x_1 = x$ ja jokaisella $k > 1$ valitaan pisteet $x_k \in S_{i_k}$ rekursiivisesti s.e. $|x_{k+1} - x_k| < \varepsilon/2^k$. Näin voidaan tehdä, sillä $S_{i_k} \subset S_{i_{k+1}}(\varepsilon/2^k)$. Nyt (x_k) on Cauchy-jono, sillä $\forall n \geq 1$

$$|x_{k+n} - x_k| < \sum_{j=k}^{\infty} \varepsilon/2^j = \varepsilon/2^{k-1},$$

joka saadaan mielivaltaisen pieneksi kasvattamalla k:ta. Koska X on täydellinen, on olemassa $y = \lim x_k \in X$. Lisäksi $y \in S$ konstruktion perusteella. Nyt

$$|x - y| = \lim_k |x - x_k| \leq \lim_k \sum_{j=1}^{k-1} |x_j - x_{j+1}| < 2\varepsilon.$$

Näin ollen $S_i \subset S(2\varepsilon) \ \forall i \geq i_0$.

Olemme osoittaneet, että $d_H(S_i, S) \to 0$ ja $S \in \mathcal{C}(X)$, joten $(\mathcal{C}(X), d_H)$ on täydellinen.

Olkoon $\varepsilon > 0$ ja olkoon $N \subset X$ äärellinen ε-tiheä joukko. Osoitetaan, että

$$\mathcal{C}(X) \subset \bigcup_{S \in \mathcal{P}(N)} \underbrace{\{C \in \mathcal{C}(X)\colon d_H(C, S) < 2\varepsilon\}}_{= B_H(S, 2\varepsilon)}, \tag{3.8}$$

jolloin olemme näyttäneet, että $\mathcal{P}(N)$ on äärellinen 2ε-tiheä $\mathcal{C}(X)$:n osajoukko eli $(\mathcal{C}(X), d_H)$ on totaalisesti rajoitettu. Olkoon $K \in \mathcal{C}(X)$ ja

$$S_K = \{x \in N\colon \operatorname{dist}(x, K) < \varepsilon\} \in \mathcal{P}(N).$$

Jokaisella $y \in K$, on olemassa $x \in N$ s.e. $|x - y| < \varepsilon$, koska N on ε-tiheä. Tällöin $x \in S_K$, sillä $\operatorname{dist}(x, K) \leq |x - y| < \varepsilon$. Siten $\operatorname{dist}(y, S_K) < \varepsilon \ \forall y \in K$, joten $K \subset S_K(\varepsilon)$. Toisaalta S_K:n määritelmän mukaan $\operatorname{dist}(x, K) < \varepsilon \ \forall x \in S_K$, joten $S_K \subset K(\varepsilon)$. Siis $d_H(K, S_K) < 2\varepsilon$. Tämä pätee jokaisella $K \in \mathcal{C}(X)$, joten (3.8) pätee. □

Korollari 3.9. *Olkoon X kompakti ja $S_i \in \mathcal{C}(X)$, $i \in \mathbb{N}$. Tällöin on olemassa osajono (S_{i_j}) ja $S \in \mathcal{C}(X)$ s.e. $S_{i_j} \to S$ $\mathcal{C}(X)$:ssä (eli $d_H(S_{i_j}, S) \to 0$).*

Merkitään
$$\mathcal{B}(X) = \{A \subset X \colon A \text{ suljettu, rajoitettu ja epätyhjä}\}.$$
Lemman 3.6 ja Lauseen 3.7 todistuksista saadaan seuraava tulos.

Lause 3.10. *(a) Hausdorff-etäisyys d_H määrittelee $\mathcal{B}(X)$:ään metriikan.*

(b) Jos X on täydellinen, niin $(\mathcal{B}(X), d_H)$ on täydellinen.

Myös käänteinen tulos on voimassa. Sitä varten todistetaan aputulos.

Lemma 3.11. *Olkoot $A, B \subset X$ ja $\operatorname{diam} A < \infty$. Silloin*
$$|\operatorname{diam} A - \operatorname{diam} B| \le 2d_H(A, B),$$
ts. kuvaus $A \mapsto \operatorname{diam} A$ on 2-Lipschitz.

Tod. Voi olettaa, että myös $\operatorname{diam} B < \infty$. Tällöin $\forall r > 0$, jolla $A \subset B(r)$ ja $B \subset A(r)$, pätee
$$\begin{aligned}\operatorname{diam} A &\le \operatorname{diam} B(r) \le \operatorname{diam} B + 2r\\ \operatorname{diam} B &\le \operatorname{diam} A(r) \le \operatorname{diam} A + 2r,\end{aligned}$$
joten
$$|\operatorname{diam} A - \operatorname{diam} B| \le 2r.$$
Siis $|\operatorname{diam} A - \operatorname{diam} B| \le 2d_H(A, B)$. □

Määritellään kuvaus $i \colon X \to \mathcal{B}(X)$, $i(x) = \{x\}$. Selvästi $d_H(\{x\}, \{y\}) = |x - y|$, joten i on isometrinen upotus (metriseen avaruuteen $(\mathcal{B}(X), d_H)$).

Lause 3.12. *(a) Jos $(\mathcal{B}(X), d_H)$ on täydellinen, niin myös X on täydellinen.*

(b) Jos $(\mathcal{B}(X), d_H)$ on kompakti, niin myös X on kompakti.

Tod. Oletetaan, että $(\mathcal{B}(X), d_H)$ on täydellinen. Olkoon (x_j) Cauchy-jono X:ssä, jolloin $\big(i(x_j)\big)$ on Cauchy-jono $\mathcal{B}(X)$:ssä. Siten $i(x_j) \to A \in \mathcal{B}(X)$. Lemman 3.11 nojalla $\operatorname{diam} A = 0$, joten $A = \{x\} = i(x)$. Tästä seuraa, että $x_j \to x$. Siten X on täydellinen. Oletetaan sitten, että $(\mathcal{B}(X), d_H)$ on kompakti ja olkoon (x_j) jono X:ssä. Tällöin on olemassa osajono (x_{j_k}) ja $A \in \mathcal{B}(X)$ s.e. $i(x_{j_k}) \to A$. Samoin kuin edellä päätellään, että $A = i(x)$ jollakin $x \in X$ ja siten $x_{j_k} \to x$. Siis X on kompakti. □

3.13 Gromov-Hausdorff-etäisyys

Määritelmä 3.14. Metristen avaruuksien X ja Y *Gromov-Hausdorff-etäisyys* on
$$d_{\mathrm{GH}}(X, Y) = \inf_{Z, \varphi, \psi} d_H^Z(\varphi X, \psi Y),$$
missä Z on metrinen avaruus ja $\varphi \colon X \to Z$, $\psi \colon Y \to Z$ ovat isometrisia upotuksia.

Separoituvien metristen avaruuksien tapauksessa Z:ksi voidaan valita ℓ^∞.

Lemma 3.15. *Jos X ja Y ovat separoituvia metrisiä avaruuksia, niin*
$$d_{\mathrm{GH}}(X, Y) = \inf_{\varphi, \psi} d_H^{\ell^\infty}(\varphi X, \psi Y),$$
missä $\varphi \colon X \to \ell^\infty$ ja $\psi \colon Y \to \ell^\infty$ ovat isometrisia upotuksia.

Tod. HT □

Olkoon $\{X_\alpha\}_{\alpha\in\mathcal{A}}$ kokoelma joukkoja. Muistutetaan, että näiden *pistevieras yhdiste* on joukko

$$\bigsqcup_{\alpha\in\mathcal{A}} X_\alpha = \{(x,\alpha)\colon \alpha\in\mathcal{A},\ x\in X_\alpha\}.$$

Samaistamme tästä lähtien X_α:n ja $X_\alpha\times\{\alpha\}$:n ilman eri mainintaa. Jos (X_i,d_i), $i=1,2$, on metrinen avaruus, niin $X_1\sqcup X_2$:n metriikkaa d sanotaan *sallituksi,* jos $d|X_i\times X_i = d_i$. Tällöin (samaistus) $X_i\to X_i\times\{i\}\subset X_1\sqcup X_2$ on isometria. Nyt saamme ekvivalentin määritelmän.

Lemma 3.16. *Jos (X_1,d_1) ja (X_2,d_2) ovat metrisiä avaruuksia, niin*

$$d_{\mathrm{GH}}(X_1,X_2) = \inf_d d_H^{(W,d)}(X_1,X_2),$$

missä inf *otetaan yli kaikkien $W = X_1\sqcup X_2$:n sallittujen metriikkojen d.*

Tod. Selvästi $d_{\mathrm{GH}}(X_1,X_2)\le \inf_d d_H^W(X_1,X_2)$, sillä vasemmalla puolella on otettu inf yli suuremman joukon. Kiinnitetään $\varepsilon>0$. Olkoon (Z,d_Z) metrinen avaruus ja $\varphi_i\colon X_i\to Z$, $i=1,2$, isometrinen upotus s.e.

$$d_H^Z(\varphi_1X_1,\varphi_2X_2)\le d_{\mathrm{GH}}(X_1,X_2)+\varepsilon.$$

Jokaisella $\delta>0$ määritellään joukkoon $W = X_1\sqcup X_2$ sallittu metriikka d_δ s.e.

$$\begin{aligned} d_\delta(x_i,y_i) &= d_Z\big(\varphi_i(x_i),\varphi_i(y_i)\big) = d_i(x_i,y_i),\ x_i,y_i\in X_i,\\ d_\delta(x_1,x_2) = d_\delta(x_2,x_1) &= d_Z\big(\varphi_1(x_1),\varphi_2(x_2)\big)+\delta,\ x_i\in X_i,\ i=1,2. \end{aligned}$$

Silloin

$$\begin{aligned} \inf_d d_H^{(W,d)}(X_1,X_2) &\le d_H^{(W,d_\delta)}(X_1,X_2)\\ &\le d_H^Z(\varphi_1X_1,\varphi_2X_2)+\delta\\ &\le d_{\mathrm{GH}}(X_1,X_2)+\varepsilon+\delta. \end{aligned}$$

Antamalla $\delta\to 0$ ja $\varepsilon\to 0$ saadaan väite. □

Huomautus 3.17. 1. Osoitetaan, että jokaista metristä avaruutta (X_1,d_1) ja (X_2,d_2) kohti on olemassa sallittu metriikka d joukossa $X_1\sqcup X_2$. Tällöin siis $d|X_i\times X_i = d_i$ ja riittää määritellä pisteiden $x_1\in X_1$ ja $x_2\in X_2$ välinen etäisyys niin, ettei kolmioepäyhtälö tuhoudu. Tätä varten kiinnitetään $a\in X_1$, $b\in X_2$ ja $\delta>0$ ja asetetaan

$$d(x_1,x_2) = d(x_2,x_1) = d_1(x_1,a)+d_2(b,x_2)+\delta,$$

kun $x_i\in X_i = X_i\times\{i\}$. Helposti nähdään, että d toteuttaa kolmioepäyhtälön ja on siten sallittu metriikka. Edellä olleesta seuraa, että jokaisella metrisellä avaruudella X ja Y on olemassa Määritelmässä 3.14 esiintyvä kolmikko Z, φ ja ψ.

2. Jos X ja Y ovat isometriset, niin $d_{\mathrm{GH}}(X,Y)=0$. Käänteinen ei päde, kuten yksinkertainen esimerkki $X=[0,1]$ ja $Y=[0,1]\cap\mathbb{Q}$ osoittaa.

Lemma 3.18. *Jos (X_i,d_i), $i=1,2,3$, on metrinen avaruus, niin*

$$d_{\mathrm{GH}}(X_1,X_3)\le d_{\mathrm{GH}}(X_1,X_2)+d_{\mathrm{GH}}(X_2,X_3).$$

Tod. Olkoot $d_{1,2}$ ja $d_{2,3}$ sallittuja metriikkoja $X_1 \sqcup X_2$:ssa ja vastaavasti $X_2 \sqcup X_3$:ssa. Jokaisella $\delta > 0$ olkoon d_δ sallittu metriikka joukossa $(X_1 \sqcup X_2) \sqcup (X_2 \sqcup X_3)$ (metriikoiden $d_{1,2}$ ja $d_{2,3}$ suhteen) s.e. pisteiden $a = (a, 2) \in X_1 \sqcup X_2$ ja $b = (b, 2) \in X_2 \sqcup X_3$ etäisyys on $d_\delta(a, b) = d_2(a, b) + \delta$. (HT. Tarkista, että saadaan sallittu metriikka.) Merkitään X_2':lla sitä kopiota X_2:sta, joka kuuluu $X_1 \sqcup X_2$:een ja X_2'':lla sitä, joka kuuluu $X_2 \sqcup X_3$:een. Käyttämällä Lemman 3.3 kolmioepäyhtälöä metrisessä avaruudessa $(X_1 \sqcup X_2) \sqcup (X_2 \sqcup X_3)$ saadaan

$$\begin{aligned} d_{GH}(X_1, X_3) &\le d_H^{d_\delta}(X_1, X_3) \le d_H^{d_\delta}(X_1, X_2') + d_H^{d_\delta}(X_2', X_2'') + d_H^{d_\delta}(X_2'', X_3) \\ &\le d_H^{1,2}(X_1, X_2) + d_H^{2,3}(X_2, X_3) + \delta. \end{aligned}$$

Antamalla $\delta \to 0$ ja ottamalla inf yli kaikkien sallitujen metriikkojen $d_{1,2}$ ja $d_{2,3}$ saadaan väite. □

Määritelmä 3.19. Olkoot X ja Y metrisiä avaruuksia ja $\varepsilon > 0$. Sanomme, että kuvaus $f : X \to Y$ on *ε-lähi-isometria,* jos $\big(f(X)\big)(\varepsilon) = Y$ ja

$$|x - z| - \varepsilon \le |f(x) - f(z)| \le |x - z| + \varepsilon \quad \forall x, z \in X.$$

Lemma 3.20. *Olkoot X ja Y metrisiä avaruuksia ja $\varepsilon > 0$.*

1. *Jos $d_{\mathrm{GH}}(X, Y) < \varepsilon$, niin on olemassa 2ε-lähi-isometria $f : X \to Y$.*
2. *Jos on olemassa ε-lähi-isometria $f : X \to Y$, niin $d_{\mathrm{GH}}(X, Y) \le 2\varepsilon$.*

Tod. 1. Koska $d_{\mathrm{GH}}(X, Y) < \varepsilon$, on olemassa $X \sqcup Y$:n sallittu metriikka d s.e. $d_H^d(X, Y) < \varepsilon$. Merkitään $d(a, b) = |a - b|$. Jokaista $x \in X$ kohti voidaan valita $y_x \in Y$ s.e. $|x - y_x| < \varepsilon$. Asetetaan $f(x) = y_x$. Kolmioepäyhtälöstä seuraa, että

$$\begin{aligned} |f(x) - f(z)| &= |y_x - y_z| \\ &\le |y_x - x| + |x - z| + |z - y_z| \\ &\le |x - z| + 2\varepsilon \end{aligned}$$

ja

$$\begin{aligned} |f(x) - f(z)| &= |y_x - y_z| \\ &\ge |x - z| - |z - y_z| - |y_x - x| \\ &\ge |x - z| - 2\varepsilon. \end{aligned}$$

Koska $Y \subset X(\varepsilon)$, niin jokaista $y \in Y$ kohti on olemassa $x \in X$ s.e. $|x - y| < \varepsilon$. Tällöin $|y - f(x)| \le |y - x| + |x - f(x)| < 2\varepsilon$. Siis f on 2ε-lähi-isometria.

2. Jos $f : X \to Y$ on ε-lähi-isometria, niin määritellään $X \sqcup Y$:hyn sallittu metriikka d asettamalla

$$d(x, y) = \inf_{z \in X} \big(|x - z| + \varepsilon + |f(z) - y|\big),$$

kun $x \in X$ ja $y \in Y$. Sen osoittaminen, että tämä todellakin on metriikka ja että $d_H^d(X, Y) \le 2\varepsilon$ jää harjoitustehtäväksi. □

Merkitään

$$\mathcal{C}_I = \{X : X \text{ kompakti epätyhjä metrinen avaruus}\} / \operatorname{isom},$$

missä $X \operatorname{isom} Y$, jos ja vain jos X ja Y ovat isometrisia. Toisin sanoen, $\mathcal{C}_I$ on kompaktien metristen avaruuksien isometrialuokkien joukko.

Lause 3.21. *Gromov-Hausdorff-etäisyys määrittelee metriikan $\mathcal{C}_I$:hin.*

Tod. Symmetrisyys on selvä, kolmioepäyhtälö todistettiin edellä ja $d_{\mathrm{GH}}(X,Y)=0$, jos X ja Y ovat isometrisia. Lisäksi, jos $\operatorname{diam} X \le D < \infty$ ja $\operatorname{diam} Y \le D$, niin $d_{\mathrm{GH}}(X,Y) \le D/2$. Tämä nähdään valitsemalla $X \sqcup Y$:n sallittu metriikka d, jolla $d(x,y)=D/2$ kaikilla $x \in X,\ y \in Y$. Jäljellä on osoittaa, että kompaktit metriset avaruudet X ja Y ovat isometrisia, jos $d_{\mathrm{GH}}(X,Y)=0$. Lemman 3.20 nojalla on olemassa 2^{-j}-lähi-isometria $f_j\colon X \to Y$ jokaisella $j \in \mathbb{N}$. Olkoon $S=\{x_1,x_2,\dots\}$ numeroituva, tiheä X:n osajoukko (huom. X separoituva). Koska Y on kompakti, on olemassa (f_j):n osajono $(f_{j,1})$ ja piste $y_1 \in Y$ s.e. $f_{j,1}(x_1) \to y_1$. Merkitään $y_1 = f(x_1)$. Edelleen on on olemassa $(f_{j,1})$:n osajono $(f_{j,2})$ ja piste $f(x_2) \in Y$ s.e. $f_{j,2}(x_2) \to f(x_2)$. Jatketaan samalla tavalla ja käydään läpi kaikki S:n pisteet siirtymällä joka vaiheessa osajonon osajonoon. Nyt diagonaalijono $(f_{j,j})$ suppenee S:ssä kohti rajafunktiota $f\colon S \to Y$. Tällöin f on isometria (X:n tiheältä osajoukolta S) Y:n tiheälle osajoukolle $f(S)$. Tällainen kuvaus voidaan jatkaa isometriaksi $f\colon X \to f(X)$. Lisäksi $f(X)$ on kompakti Y:n tiheä osajoukko, joten on oltava $f(X)=Y$. □

Huomautus 3.22. Edellä ollutta lausetta voidaan yleistää seuraavasti: Olkoot X ja Y metrisiä avaruuksia s.e. X on kompakti, Y täydellinen ja $d_{DG}(X,Y)=0$. Sillon X ja Y ovat isometrisia. Tämä voidaan todistaa konstruoimalla ensin jokaisella $\varepsilon > 0$ äärellinen maksimaalinen ε-verkko Y:lle, jolloin Y on välttämättä kompakti. Jos sen sijaan oletetaan, että X ja Y ovat täydellisiä ja $d_{\mathrm{GH}}(X,Y)=0$, niin tästä ei välttämättä seuraa, että X ja Y ovat isometrisia (ei edes, vaikka oletettaisiin lisäksi X ja Y separoituviksi ja lokaalisti kompakteiksi). Tähän on Eero Saksmanin antama vastaesimerkki: Olkoot

$$X=\bigsqcup_{i=1}^{\infty} I_i \quad \text{ja} \quad Y=\bigsqcup_{i=1}^{\infty} J_i,$$

missä $I_i=[0,q_i],\ J_i=[0,r_i]$ ja $\{q_i\colon i\in\mathbb{N}\}$ ja $\{r_i\colon i \in \mathbb{N}\}$ ovat pistevieraita $(0,1)$:n tiheä osajoukkoja. Määritellään X:ään metriikka, jonka rajoittuma kuhunkin I_i:hin on tavallinen euklidiinen metriikka, mutta pisteiden $x \in I_i,\ y \in I_j,\ i \ne j$, etäisyys on 10. Samanlainen metriikka määritellään Y:hyn. Nyt X ja Y ovat täydellisiä, $d_{\mathrm{GH}}(X,Y)=0$, mutta X ja Y eivät ole isometrisia.

Todistetaan seuraavaksi tärkeä *Gromovin kompaktisuuslause* (v. 1980).

Lause 3.23 (Gromovin kompaktisuuslause)**.** *Olkoon $\mathcal{X}=\mathcal{X}(D,N)$ kokoelma metrisiä avaruuksia X, jotka toteuttavat ehdot*

(a) $\operatorname{diam} X \le D$,

(b) $\operatorname{card} N_\varepsilon(X) \le N(\varepsilon)$ *jokaisella X:n ε-verkolla $N_\varepsilon(X)$,*

missä D on äärellinen vakio ja $N\colon (0,\infty) \to (0,\infty)$. Silloin jokaisella $\mathcal{X}$:n jonolla (X_i) on olemassa osajono, joka suppenee Gromov-Hausdorff mielessä kohti kompaktia metristä avaruutta $X \in \mathcal{X}$.

Tod. Olkoon $\{(X_i,d_i)\}_{i=1}^{\infty}$ jono $\mathcal{X}$:ssä. Jokaisella $i \in \mathbb{N}$ valitaan kasvava jono X_i:n maksimaalisia 2^{-j}-verkkoja $N_{i,j},\ j \in \mathbb{N}$, ts. $N_{i,j} \subset N_{i,j+1}$. Tällaisen jonon olemassaolo voidaan todistaa Zornin lemman avulla kuten Lemma 2.29 (ks. Huomautus 3.26).

Siirtymällä osajonoon voidaan olettaa, että $\operatorname{card} N_{i,1} \equiv n_1 \le N(1/2)$ kaikilla i. [Luonnollisia lukuja välillä $[0,N(1/2)]$ on vain äärellinen määrä, joten jollakin $n \in [0,N(1/2)]$ $\operatorname{card} N_{i,1}=n$ äärettömän monella i. Poimitaan näitä vastaavat X_i:t ja hylätään muut.] Olkoon $Y_1=\{1,2,\dots,n_1\}$. Valitaan bijektiot

$$\psi_{i,1}\colon Y_1 \to N_{i,1}$$

ja määritellään Y_1:een metriikat $\delta_{i,1}$,

$$\delta_{i,1}(x,y) = d_i\big(\psi_{i,1}(x), \psi_{i,1}(y)\big), \quad x, y \in Y_1.$$

Nyt $\delta_{i,1}(x,y) \in [1/2, D]$ kaikilla $x, y \in Y_1$, $x \neq y$. Käymällä läpi kaikki äärellisen monta paria $(x,y) \in Y_1 \times Y_1$, $x \neq y$, ja siirtymällä tarvittaessa joka vaiheessa osajonoihin, löydetään osajono (merk. edelleen $(\delta_{i,1})$) s.e. $\delta_{i,1} \to e_1$, missä e_1 on metriikka Y_1:ssä, $e_1(x,y) \in [1/2, D]$, $x \neq y$.

Siirtymällä edelleen osajonoon voidaan olettaa, että $\operatorname{card} N_{i,2} = n_2 \leq N(2^{-2})$ kaikilla i. Jatketaan bijektiot $\psi_{i,1} \colon Y_1 \to N_{i,1}$ bijektioiksi $\psi_{i,2} \colon Y_2 \to N_{i,2}$, missä $Y_2 = \{1, 2, \ldots, n_1, n_1 + 1, \ldots, n_2\}$, ja jatketaan metriikat $\delta_{i,1}$ Y_2:n metriikoiksi $\delta_{i,2}$ kuten edellä. Jälleen löydetään $(\delta_{i,2})$:n osajono (merk. edelleen $(\delta_{i,2})$), joka suppenee kohti Y_2:n metriikkaa e_2, $e_2(x,y) \in [2^{-2}, D]$, $x \neq y$. Lisäksi $e_2 | Y_1 \times Y_1 = e_1$.

Jatkamalla samalla tavalla saadaan metriset avaruudet (Y_j, e_j), missä

$$\begin{gathered} Y_j = \{1, 2, \ldots, n_1, n_1 + 1, \ldots, n_2, n_2 + 1, \ldots, n_j\}, \quad n_j \equiv \operatorname{card} N_{i,j}, \\ e_j(x,y) \in [2^{-j}, D], \ \forall x \neq y \quad \text{ja} \\ e_j | Y_{j-1} \times Y_{j-1} = e_{j-1}. \end{gathered}$$

Nyt metrisille avaruuksille (Y_j, e_j) pätee, että jokaisella $j \in \mathbb{N}$ on olemassa i_j s.e.

$$|e_j(x,y) - \delta_{i_j,j}(x,y)| < 2^{-j},$$

kaikilla $x, y \in Y_j$. [Ylärajalla 2^{-j} ei ole mitään tekemistä aiempien 2^{-j}-verkkojen kanssa. Yhtä hyvin olisimme voineet vaatia tarkkuudeksi 10^{-j} tms.] Toisin sanoen, on olemassa X_{i_j}, jota merkitään X_j:llä, maksimaalinen 2^{-j}-verkko $N_j = N_{i_j,j} \subset X_j$ ja bijektio $\psi_j = \psi_{i_j,j} \colon Y_j \to N_j$ s.e.

$$\big|d_j\big(\psi_j(x), \psi_j(y)\big) - e_j(x,y)\big| < 2^{-j}.$$

Lemman 3.20 nojalla

$$d_{\mathrm{GH}}\big((N_j, d_j), (Y_j, e_j)\big) \leq 2 \cdot 2^{-j}.$$

Toisaalta $d_{\mathrm{GH}}\big((X_j, d_j), (N_j, d_j)\big) \leq 2^{-j}$.

Voidaan olettaa, että $n_j \to \infty$, kun $j \to \infty$. [Muussa tapauksessa on olemassa äärettömän monta X_i, joilla $\operatorname{card} X_i = n_\infty < \infty$. Nämä suppenevat Gromov-Hausdorff mielessä kohti äärellistä metristä avaruutta (Y, e) kuten yllä.] Osoitetaan seuraavaksi, että on olemassa $\mathbb{N}$:n metriikka d s.e. $(Y_j, e_j) \to (\mathbb{N}, d)$ Gromov-Hausdorff mielessä. Jos tässä onnistutaan, niin silloin

$$\begin{aligned} d_{\mathrm{GH}}&\big((X_j, d_j), (\mathbb{N}, d)\big) \\ &\leq d_{\mathrm{GH}}\big((X_j, d_j), (N_j, d_j)\big) + d_{\mathrm{GH}}\big((N_j, d_j), (Y_j, e_j)\big) + d_{\mathrm{GH}}\big((Y_j, e_j), (\mathbb{N}, d)\big) \\ &\to 0, \end{aligned}$$

eli $X_j \to (\mathbb{N}, d)$ Gromov-Hausdorff mielessä, kun $j \to \infty$.

Koska e_{j+1} jatkaa e_j:n ja $\cup_j Y_j = \mathbb{N}$, niin ainut ehdokas metriikaksi d on

$$d(x,y) = e_j(x,y),$$

missä j on tarpeeksi suuri, jotta $x, y \in Y_j$. Koska (Y_j, e_j) uppoaa $(\mathbb{N}, d)$:hen isometrisesti, riittää näyttää, että

$$\sup_{x \in \mathbb{N} \setminus Y_j} \operatorname{dist}(x, Y_j) = \sup_{x \in \mathbb{N} \setminus Y_j} \inf_{y \in Y_j} d(x,y) \to 0,$$

kun $j \to \infty$. Jos $x \in \mathbb{N} \setminus Y_j$, niin silloin $x \in Y_m$ jollakin $m > j$. Väitämme, että on olemassa pisteet $p_k \in Y_k,\ k = j, \dots, m-1,\ p_m = x$ s.e.

$$d(p_{k+1}, p_k) \le 2 \cdot 2^{-k}, \tag{3.24}$$

jolloin

$$\begin{aligned} \operatorname{dist}(x, Y_j) &\le d(x, p_j) = d(p_m, p_j) \\ &\le d(p_m, p_{m-1}) + d(p_{m-1}, p_{m-2}) + \dots + d(p_{j+1}, p_j) \\ &\le 2 \sum_{k=j}^{m-1} 2^{-k} < 4 \cdot 2^{-j} \end{aligned}$$

ja siten

$$\sup_{x \in \mathbb{N} \setminus Y_j} \operatorname{dist}(x, Y_j) \le 4 \cdot 2^{-j} \to 0,$$

kun $j \to \infty$. Todistetaan arviota (3.24) koskeva väite. Koska $N_{i,k} \subset N_{i,k+1}$ ja $N_{i,k}$ on maksimaalinen 2^{-k}-verkko, on jokaista $p_{k+1} \in Y_{k+1}$ kohti olemassa $q \in N_{i,k}$ s.e. $d_i(\psi_{i,k+1}(p_{k+1}), q) \le 2^{-k}$. Silloin $p_k := \psi_{i,k+1}^{-1}(q) \in Y_k$ ja

$$\delta_{i,k+1}(p_{k+1}, p_k) \le 2^{-k}. \tag{3.25}$$

Toisaalta jokaisella k on olemassa $i = i_k$ s.e.

$$|e_{k+1}(p_{k+1}, p_k) - \delta_{i_k,k+1}(p_{k+1}, p_k)| \le 2^{-k},$$

josta yhdessä (3.25):n kanssa seuraa, että $d(p_{k+1}, p_k) = e_{k+1}(p_{k+1}, p_k) \le 2 \cdot 2^{-k}$. Kaiken kaikkiaan olemme osoittaneet, että $(X_j, d_j) \to (\mathbb{N}, d)$ Gromov-Hausdorff mielessä.

Perustellaan vielä lopuksi, miksi raja-avaruus voidaan valita kompaktiksi. Jos $(\bar{\mathbb{N}}, \bar{d})$ on $(\mathbb{N}, d)$:n täydellistymä, niin $d_{\mathrm{GH}}\big((\mathbb{N}, d), (\bar{\mathbb{N}}, \bar{d})\big) = 0$ (ks. Huomautus 3.26). Tästä seuraa, että $X_j \to (\bar{\mathbb{N}}, \bar{d})$ Gromov-Hausdorff mielessä. Lisäksi $(\bar{\mathbb{N}}, \bar{d})$ on totaalisti rajoitettu (HT), joten se on täydellisenä ja totaalisesti rajoitettuna joukkona kompakti. Harjoitustehtäväksi jää osoittaa, että $(\bar{\mathbb{N}}, \bar{d}) \in \mathcal{X}$. □

Huomautus 3.26.

1. Jos $N_\varepsilon \subset X$ on maksimaalinen ε-verkko ja $0 < \varepsilon' < \varepsilon$, niin on olemassa X:n maksimaalinen ε'-verkko $N_{\varepsilon'}$ s.e. $N_\varepsilon \subset N_{\varepsilon'}$. Tämä voidaan todistaa Zornin lemmalla kuten Lemma 2.29. Merkitään N_ε:n sisältävien ε'-verkkojen joukkoa $\mathcal{N}_{\varepsilon'}(X)$:llä. Se on epätyhjä, koska $N_\varepsilon \in \mathcal{N}_{\varepsilon'}(X)$. Toistamalla nyt Lemman 2.29 todistus saadaan, että on olemassa X:n maksimaalinen ε'-verkko $N_{\varepsilon'} \supset N_\varepsilon$.

2. Itse asiassa $\mathcal{X}(D, N)$:n jäsenet ovat totaalisesti rajoitettuja ja siten separoituvia, joten edellä olleen kaltaisten verkkojen olemassaolo voidaan todeta konstruktiivisesti.

3. Täydellistämällä jokainen X_i olisimme voineet olettaa metriset avaruudet kompakteiksi. Jos nimittäin $\bar{X}$ on X:n täydellistymä, niin X voidaan isometrisesti upottaa $\bar{X}$:n tiheäksi osajoukoksi. Erityisesti pätee $d_{\mathrm{GH}}(X, \bar{X}) = 0$.

3.27 Ei-kompaktien metristen avaruuksien Gromov-Hausdorff suppeneminen

Määritelmä 3.28. *Ankkuroitu metrinen avaruus* on pari (X, p) (tai kolmikko (X, d, p)), missä X (tai oikeammin (X, d)) on metrinen avaruus ja $p \in X$.

Huomautus 3.29. Englanninkielinen nimi on *pointed metric space*. Käännökset "pisteellinen, pisteytetty" tai muut vastaavat eivät kuulosta hyviltä, siksi olen päätynyt ankkurointiin, varsinkin kun siitä on pohjimmiltaan kyse.

Määritelmä 3.30. Jono $\big((X_i, p_i)\big)$ ankkuroituja metrisiä avaruuksia suppenee Gromov-Hausdorff mielessä (tai GH-suppenee) kohti ankkuroitua metristä avaruutta (X, p), jos jokaista $r > 0$ ja $\varepsilon > 0$ kohti on olemassa sellainen $i_0 \in \mathbb{N}$, että kaikilla $i \geq i_0$ on olemassa kuvaus $f_i \colon B(p_i, r) \to X$, jolle pätee:

(1) $f_i(p_i) = p$,

(2) $|x - y| - \varepsilon \leq |f_i(x) - f_i(y)| \leq |x - y| + \varepsilon \quad \forall x, y \in B(p_i, r)$,

(3) $B(p, r - \varepsilon) \subset \big(f_i B(p_i, r)\big)(\varepsilon)$, ts. kuula $B(p, r - \varepsilon)$ sisältyy joukon $f_i B(p_i, r)$ ε-ympäristöön.

Tällöin merkitään $(X_i, p_i) \xrightarrow{\text{GH}} (X, p)$ ja $(X, p) = \mathrm{GH} - \lim_{i\to\infty}(X_i, p_i)$.

Ehdoista (1) ja (2) seuraa, että

$$f_i B(p_i, r) \subset B(p, r + \varepsilon).$$

Yllä oleva määritelmä on sopusoinnussa kompaktien metristen avaruuksien Gromov-Hausdorff suppenemisen kanssa seuraavalla tavalla.

Lemma 3.31. *Olkoot X ja X_i, $i \in \mathbb{N}$, kompakteja metrisiä avaruuksia.*

(a) Jos $\operatorname{diam} X_i \leq C < \infty$ kaikilla i ja $(X_i, p_i) \xrightarrow{\text{GH}} (X, p)$, niin $d_{\text{GH}}(X_i, X) \to 0$.

(b) Jos $d_{\text{GH}}(X_i, X) \to 0$ ja $p \in X$, niin on olemassa sellaiset pisteet $p_i \in X_i$, että $(X_i, p_i) \xrightarrow{\text{GH}} (X, p)$.

Tod. (a): Oletetaan, että $\operatorname{diam} X_i \leq C < \infty$ kaikilla i ja $(X_i, p_i) \xrightarrow{\text{GH}} (X, p)$. Valitaan $r > 2\max\{C, \operatorname{diam} X\}$. Jokaista $\varepsilon \in (0, \max\{C, \operatorname{diam} X\})$ kohti on olemassa $i_\varepsilon \in \mathbb{N}$ s.e. kaikilla $i \geq i_\varepsilon$ on olemassa ε-lähi-isometriat

$$f_i \colon \underbrace{B(p_i, r)}_{= X_i} \to \big(f_i B(p_i, r)\big)(\varepsilon),$$

joille pätee $f_i(p_i) = p$ ja

$$X = B(p, r - \varepsilon) \subset \big(f_i B(p_i, r)\big)(\varepsilon).$$

Siten f_i on ε-lähi-isometria $X_i \to X$, ja Lemman 3.20 nojalla $d_{\text{GH}}(X_i, X) \leq 2\varepsilon$, kun $i \geq i_\varepsilon$. Toisin sanoen, $d_{\text{GH}}(X_i, X) \to 0$.

(b): Oletetaan, että $d_{\text{GH}}(X_i, X) \to 0$ ja $p \in X$. Jokaista $n \in \mathbb{N}$ kohti on olemassa $i_n \in \mathbb{N}$ s.e. $d_{\text{GH}}(X_i, X) \leq 1/n$ kaikilla $i \geq i_n$. Voidaan olettaa, että $i_{n+1} > i_n$. Kun $i \in \{i_n, \ldots, i_{n+1} - 1\}$, niin Lemman 3.20 mukaan on olemassa $2/n$-lähi-isometriat $g_i \colon X_i \to X$. Lisäksi on olemassa pisteet $p_i \in X_i$ s.e. $|g_i(p_i) - p| < 2/n$, sillä $X = (g_i X_i)(2/n)$. Kun $i \in \{1, \ldots, i_1 - 1\}$, niin valitaan pisteet $p_i \in X_i$ mielivaltaisesti. Määritellään kuvaukset $f_i \colon X_i \to X$ asettamalla

$$f_i(x) = \begin{cases} g_i(x), & \text{kun } x \neq p_i, \\ p, & \text{kun } x = p_i \end{cases}$$

ja osoitetaan, että nämä kelpaavat. Olkoon $\varepsilon > 0$ ja $n \in \mathbb{N}$ s.e. $8/n < \varepsilon$. Kun $i \geq i_n$, niin kaikilla $x, y \in X_i \setminus \{p_i\}$ pätee

$$|x-y| - \varepsilon/4 \leq |x-y| - 2/n \leq \underbrace{|f_i(x) - f_i(y)|}_{=|g_i(x)-g_i(y)|} \leq |x-y| + 2/n \leq |x-y| + \varepsilon/4,$$

$$\begin{aligned}
|f_i(x) - f_i(p_i)| &= |g_i(x) - p| \\
&\leq |g_i(x) - g_i(p_i)| + |g_i(p_i) - p| \\
&\leq |x - p_i| + 2/n + 2/n \\
&\leq |x - p_i| + \varepsilon/2, \\
|f_i(x) - f_i(p_i)| &\geq |g_i(x) - g_i(p_i)| - |g_i(p_i) - p| \\
&\geq |x - p_i| - 2/n - 2/n \\
&\geq |x - p_i| - \varepsilon/2.
\end{aligned}$$

Osoitetaan vielä, että $B(p, r-\varepsilon) \subset \big(f_i B(p_i, r)\big)(\varepsilon)$ kaikilla $r > 0$. Jokaisella $y \in B(p, r-\varepsilon)$ ja $i \geq i_n$ on olemassa $x \in X_i$ s.e. $|g_i(x) - y| < 2/n < \varepsilon/4$. Jos $x \neq p_i$, niin $f_i(x) = g_i(x)$ eli $y \in B(f_i(x), \varepsilon/4)$. Lisäksi

$$\begin{aligned}
|x - p_i| &\leq \varepsilon/2 + |f_i(x) - f_i(p_i)| \\
&= \varepsilon/2 + |g_i(x) - p| \\
&\leq \varepsilon/2 + |g_i(x) - y| + |y - p| \\
&< \varepsilon/2 + \varepsilon/4 + r - \varepsilon < r,
\end{aligned}$$

joten $y \in \big(f_i B(p_i, r)\big)(\varepsilon)$. Jos $x = p_i$, niin

$$\begin{aligned}
|y - f_i(p_i)| &\leq |y - g_i(p_i)| + |g_i(p_i) - f_i(p_i)| \\
&= |y - g_i(x)| + |g_i(p_i) - p| \\
&< \varepsilon/4 + \varepsilon/4 < \varepsilon.
\end{aligned}$$

Myös nyt $y \in \big(f_i B(p_i, r)\big)(\varepsilon)$. □

Huomautus 3.32. 1. Näiden luentomuistiinpanojen aiemmassa versiossa oli Lemman 3.31 (a)-kohdassa paikkaansa pitämätön väite ja sille väärä "todistus" (vrt. [BBI, Exercise 8.1.2]). Nimittäin (a)-kohta *ei* päde ilman oletusta $\operatorname{diam} X_i \leq C < \infty$ kaikilla i. Esimerkiksi kelpaa $X_i = \{0, i\}$, $d_i(0, i) = i$, ja $X = \{0\}$. Tällöin $(X_i, 0) \xrightarrow{\text{GH}} (X, 0)$, sillä jokaisella $r > 0$ ja kaikilla $i > r$ on olemassa jopa isometria $f_i \colon B_{d_i}(0, r) = \{0\} \to \{0\} = X$. Kuitenkin $d_{\text{GH}}(X_i, X) = i/2 \to \infty$. Kiitokset Aleksander Nuijalle virheen huomaamisesta ja vastaesimerkistä.

2. Usein kirjallisuudessa esiintyy seuraava (hieman virheellinen) määritelmä ankkuroitujen metristen avaruuksien (X_i, p_i) suppenemiselle. Nimittäin saatetaan sanoa, että

$$(X_i, p_i) \xrightarrow{\text{GH}} (X, p),$$

jos

$$d_{\text{GH}}\big(\bar{B}_{X_i}(p_i, r), \bar{B}_X(p, r)\big) \to 0 \quad \forall r > 0. \tag{3.33}$$

[Tässä $\bar{B}_{X_i}(p_i, r) = \{x \in X_i \colon |x - p_i| \leq r\}$.] Tällainen vaatimus ei kuitenkaan ole sopusoinnussa kompaktien metristen avaruuksien Gromov-Hausdorff suppenemisen kanssa. On olemassa (erittäin yksinkertaisia) esimerkkejä metrisistä avaruuksista X_i, $i \in \mathbb{N}$, ja X s.e. $d_{\mathrm{GH}}(X_i, X) \to 0$, mutta ehto (3.33) *ei* toteudu millään pisteillä $p_i \in X_i$, $p \in X$. [Harjoitustehtävänä on keksiä tällaisia esimerkkejä.]

3. Jos $(X_i, p_i) \xrightarrow{\mathrm{GH}} (X, p)$, niin $\forall r > 0$ ja $\forall \varepsilon > 0$ on olemassa ε-lähi-isometria $f_i \colon B(p_i, r) \to \big(f_i B(p_i, r)\big)(\varepsilon) \subset X$ kunhan i on riittävän suuri. Lisäksi

$$B(p, r - \varepsilon) \subset \big(f_i B(p_i, r)\big)(\varepsilon) \subset B(p, r + 2\varepsilon).$$

   Jos X on ns. sisäinen metrinen avaruus, voidaan tästä edelleen päätellä, että

$$d_{\mathrm{GH}}\big(B(p_i, r), B(p, r)\big) \to 0$$

   kaikilla $r > 0$. Sisäinen metrinen avaruus määritellään alla.

Palautetaan mieliin, että *polku* metrisessä (tai yleisemmin topologisessa) avaruudessa X on jatkuva kuvaus $\gamma \colon [a, b] \to M$.

Määritelmä 3.34. Olkoon (X, d) metrinen avaruus ja $\gamma \colon [a, b] \to X$ polku. Polun γ *pituus* on

$$\ell(\gamma) = \sup \sum_{i=1}^{k} d\big(\gamma(t_i), \gamma(t_{i-1})\big),$$

missä sup otetaan yli kaikkien välin $[a, d]$ äärellisten jakojen $a = t_0 \leq t_1 \leq \cdots \leq t_k = b$. Polku γ on *suoristuva,* jos $\ell(\gamma) < \infty$.

Määritelmä 3.35. Sanomme, että metrinen avaruus X on *sisäinen* (polkumetrinen avaruus, intrinsic metric space, length space), jos kaikilla $x, y \in X$

$$d(x, y) = \inf_{\gamma} \ell(\gamma),$$

missä inf otetaan yli kaikkien x:n ja y:n yhdistävien polkujen γ, ts. $\gamma \colon [a, b] \to X$, $\gamma(a) = x, \gamma(b) = y$.

Lemma 3.36. *Olkoot (X_i, p_i), $i \in \mathbb{N}$, ja (X, p) ankkuroituja metrisiä avaruuksia s.e. $(X_i, p_i) \xrightarrow{\mathrm{GH}} (X, p)$. Jos X on sisäinen, niin $d_{\mathrm{GH}}\big(B(p_i, r), B(p, r)\big) \to 0$ kaikilla $r > 0$.*

Tod. HT

Määritelmä 3.37. Ankkuroidut metriset avaruudet (X, p) ja (Y, q) ovat *(ankkuroidusti) isometriset,* jos on olemassa isometria $f \colon X \to Y$ s.e. $f(p) = q$.

Määritelmä 3.38. Metrinen avaruus X on *rajoitetusti kompakti (pallokompakti, proper),* jos X:n rajoitetut suljetut joukot ovat kompakteja.

Yhtäpitävästi voitaisiin edellä vaatia, että X:n suljetut kuulat ovat kompakteja.

Seuraava tulos on Lauseen 3.21 vastine.

Lause 3.39. *Olkoot (Y, p) ja (Z, q) rajoitetusti kompakteja jonon $\big((X_i, p_i)\big)_{i=1}^{\infty}$ Gromov-Hausdorff raja-avaruuksia. Tällöin (Y, p) ja (Z, q) ovat ankkuroidusti isometriset.*

Tod. Jokaisella $k \in \mathbb{N}$ ja $j \in \mathbb{N}$ on olemassa $i = i_{k,j}$ ja 2^{-j}-lähi-isometriat

$$f\colon \underbrace{B(p_i, 2^k)}_{\subset X_i} \to Y_{k,j} = \big(fB(p_i, 2^k)\big)(2^{-j}) \subset Y$$

ja

$$g\colon B(p_i, 2^k) \to Z_{k,j} = \big(gB(p_i, 2^k)\big)(2^{-j}) \subset Z$$

siten, että

$$\begin{gathered} f(p_i) = p, \quad g(p_i) = q, \\ B(p, 2^k - 2^{-j}) \subset Y_{k,j} \subset B(p, 2^k + 2^{-j+1}), \\ B(q, 2^k - 2^{-j}) \subset Z_{k,j} \subset B(q, 2^k + 2^{-j+1}). \end{gathered}$$

Nyt voidaan konstruoida 2^{-j+2}-lähi-isometria

$$h = h_{k,j}\colon Y_{k,j} \to Z_{k,j},$$

s.e. $h(p) = q$. Koska kuvaukset f ja g *eivät* ole bijektioita, on syytä tehdä konstruktio yksityiskohtaisesti. Jos $y \in Y_{k,j}$, niin on olemassa (ainakin yksi) $x_y \in B(p_i, 2^k)$ s.e. $|f(x_y) - y| < 2^{-j}$. Asetetaan $h(y) = g(x_y)$. Erityisesti vaaditaan, että $h(p) = q$. Jos $y_1, y_2 \in Y_{k,j}$, niin

$$\begin{aligned} &\big||x_1 - x_2| - |y_1 - y_2|\big| \\ &\le \big||x_1 - x_2| - |f(x_1) - f(x_2)|\big| + \big||f(x_1) - f(x_2)| - |y_1 - y_2|\big| \\ &< 2^{-j} + |f(x_1) - y_1| + |f(x_2) - y_2| \\ &< 3 \cdot 2^{-j} \end{aligned}$$

kaikilla niillä $x_1, x_2 \in B(p_i, 2^k)$, joilla $f(x_1) \in B(y_1, 2^{-j})$ ja $f(x_2) \in B(y_2, 2^{-j})$. Näin ollen

$$\big||h(y_1) - h(y_2)| - |y_1 - y_2|\big| < 4 \cdot 2^{-j}.$$

Jos $z \in Z_{k,j}$, niin on olemassa $x' \in B(p_i, 2^k)$ s.e. $|g(x') - z| < 2^{-j}$. Merkitään $y = f(x')$ ja arvioidaan pisteiden z ja $h(y)$ etäisyyttä. Jos $x \in B(p_i, 2^k)$ s.e. $|f(x) - y| < 2^{-j}$, niin

$$|x - x'| \le |f(x) - f(x')| + 2^{-j} < 2 \cdot 2^{-j},$$

joten erityisesti

$$\begin{aligned} |h(y) - z| &= |g(x_y) - z| \\ &\le |g(x_y) - g(x')| + |g(x') - z| \\ &< |x_y - x'| + 2^{-j} + 2^{-j} \\ &< 4 \cdot 2^{-j}. \end{aligned}$$

Olemme todistaneet, että h on $4 \cdot 2^{-j}$-lähi-isometria. Loppuosa todistuksesta sujuu samaan tapaan kuin Lauseen 3.21 todistuksessa. Koska Y on rajoitetusti kompakti, se on separoituva, joten on olemassa tiheä osajoukko $S = \{p, y_1, y_2, \ldots\} \subset Y$. Diagonaalipäättelyllä (ensin $j \to \infty$, sitten $k \to \infty$) saadaan isometria S:ltä Z:n tiheälle osajoukolle s.e. $p \mapsto q$. Tällainen isometria voidaan jatkaa ankkuroiduksi isometriaksi $X \to Y$. $\square$

Lause 3.40. *Olkoon* $N\colon (0,\infty)\times(0,\infty)\to[1,\infty)$ *ja* $\mathcal{X}=\mathcal{X}(N)$ *sellainen kokoelma ankkuroituja metrisiä avaruuksia* (X,d,p), *että jokaisella* $\varepsilon>0$, $\delta>0$ *ja* $r>0$ *kuula* $B(p,r)\subset X$ *voidaan peittää korkeintaan* $N(r,\varepsilon)$*:lla* $(\varepsilon+\delta)$*-säteisellä kuulalla, ts.*

$$B(p,r)\subset\bigcup_{j=1}^{k}B(x_j,\varepsilon+\delta),\ x_j\in X,\ k\le N(r,\varepsilon).$$

Silloin jokaisella $\mathcal{X}$*:n jonolla* $\big((X_i,d_i,p_i)\big)_{i=1}^{\infty}$ *on olemassa osajono* (X_{i_j},p_{i_j}) *ja* $(X,p)\in\mathcal{X}$ *s.e.* $(X_{i_j},p_{i_j})\xrightarrow{\mathrm{GH}}(X,p)$.

[*Huom.:* Yllä δ:n rooli on taata, että raja-avaruus $(X,p)\in\mathcal{X}$.]

Tod. Todistus on samanlainen kuin Lauseen 3.23 tapauksessa. Olkoon (X_i,p_i), $i\in\mathbb{N}$, jono $\mathcal{X}$:ssä. Jokaisella $i\in\mathbb{N}$ ja $j\in\mathbb{N}$ valitaan nyt $X_i\cap B(p_i,2^j)$:n maksimaaliset 2^{-j}-verkot $N_{i,j}$ s.e. $p_i\in N_{i,j}\subset N_{i,j+1}$. Lisäksi valitaan bijektiot $\psi_{i,1}\colon Y_1\to N_{i,1}$ s.e. $\psi_{i,1}(1)=p_i$. Loppuosa voidaan todistaa kuten Lause 3.23. Yksityiskohdat jätetään harjoitustehtäväksi. □

3.41 Filtterit, ultrafiltterit ja ultraraja-arvot

Määritelmä 3.42. Olkoon X mikä tahansa epätyhjä joukko. Sanomme, että kokoelma $\mathcal{F}\subset\mathcal{P}(X)$ on *filtteri* X*:ssä*, jos

(i) $X\in\mathcal{F}$,

(ii) $\emptyset\notin\mathcal{F}$,

(iii) $A,B\in\mathcal{F}\Rightarrow A\cap B\in\mathcal{F}$,

(iv) $A\subset B\subset X, A\in\mathcal{F}\Rightarrow B\in\mathcal{F}$.

Kokoelma $\mathcal{U}\subset\mathcal{P}(X)$ on *ultrafiltteri* X*:ssä*, jos

(a) $\emptyset\notin\mathcal{U}$,

(b) $A,B\in\mathcal{U}\Rightarrow A\cap B\in\mathcal{U}$,

(c) $A\subset B\subset X, A\in\mathcal{U}\Rightarrow B\in\mathcal{U}$.

(d) $A\subset X\Rightarrow$ joko $A\in\mathcal{U}$ tai $X\setminus A\in\mathcal{U}$.

Huomautus 3.43.

1. Filtterin ehdoista (ii) ja (iii) (vastaavasti ultrafiltterin ehdoista (a) ja (b)) seuraa, etteivät A ja $X\setminus A$ voi molemmat kuulua $\mathcal{F}$:ään (vastaavasti $\mathcal{U}$:hun).

2. Yhtäpitästi ultrafiltteri $\mathcal{U}$ voitaisiin määritellä maksimaalisena filtterinä (ts. jos $\mathcal{F}$ on sellainen filtteri, että $\mathcal{U}\subset\mathcal{F}$, niin silloin välttämättä $\mathcal{U}=\mathcal{F}$). (HT)

Määritelmä 3.44. Sanomme, että ultrafiltteri $\mathcal{U}$ on *vapaa* (engl. non-principal tai free), jos

$$\bigcap_{A\in\mathcal{U}}A=\emptyset.$$

Muussa tapauksessa $\mathcal{U}$ on sidottu (engl. principal).

Zornin lemman avulla voidaan osoittaa, että vapaita ultrafilttereitä on olemassa.

Yhtäpitävästi vapaa ultrafiltteri $\mathcal{U}$ joukossa X voidaan tulkita äärellisesti additiiviseksi todennäköisyysmitaksi $\omega\colon \mathcal{P}(X) \to \{0,1\}$ s.e.

$$\omega(A) = \begin{cases} 1, & A \in \mathcal{U}, \\ 0, & A \notin \mathcal{U}. \end{cases}$$

Silloin $\omega(A) = 0$, jos $A \subset X$ on äärellinen. Todistetaan jälkimmäinen väite. Tehdään vastaoletus, että on olemassa äärellinen joukko $A = \{a_1, \ldots, a_k\} \subset X$ s.e. $\omega(A) = 1$. Koska ω on äärellisesti additiivinen, on olemassa täsmälleen yksi $a_i \in A$ s.e. $\omega(\{a_i\}) = 1$ eli $\{a_i\} \in \mathcal{U}$. Nyt

$$\bigcap_{B \in \mathcal{U}} B \supset \{a_i\} \neq \emptyset, \tag{3.45}$$

mikä on mahdotonta, sillä $\mathcal{U}$ on vapaa. Yllä (3.45) pätee, sillä jos olisi olemassa $B \in \mathcal{U}$ s.e. $a_i \notin B$, niin saataisiin ristiriita

$$1 = \omega(X) \geq \omega(B \cup \{a_i\}) = \omega(B) + \omega(\{a_i\}) = 2.$$

Jatkossa rajoitumme tapaukseen $X = \mathbb{N}$. Vapaa ultrafiltteri poimii suppenevan osajonon seuraavalla tavalla:

Lemma 3.46. *Olkoon ω vapaa ultrafiltteri $\mathbb{N}$:ssä ja Y kompakti Hausdorff-avaruus. Tällöin jokaista jonoa $y_n \in Y$, $n \in \mathbb{N}$, kohti on olemassa yksikäsitteinen piste $y \in Y$ s.e.*

$$\omega(\{n \in \mathbb{N}\colon y_n \in U\}) = 1$$

jokaisella y:n ympäristöllä U. Merkitsemme

$$y = \lim_{\omega} y_n$$

ja kutsumme y:tä jonon (y_n) ultraraja-arvoksi (tai ω-raja-arvoksi).

Tod. Tehdään vastaoletus, että jokaisella $y \in Y$ on olemassa ympäristö U_y s.e.

$$\omega(\{n\colon y_n \in U_y\}) = 0.$$

Kompakti joukko Y voidaan peittää äärellisen monella tällaisella ympäristöllä, jolloin ω:n äärellisestä additiivisuudesta saadaan ristiriita $\omega(\mathbb{N}) = 0$. Yksikäsitteisyyden todistamiseksi tehdään niinikään vastaoletus, että on olemassa ω-raja-arvot y ja $y' \neq y$. Koska Y on Hausdorff, on olemassa näiden pisteiden erilliset ympäristöt U ja U'. Jälleen saadaan ristiriita, sillä

$$1 = \omega(\{n\colon y_n \in Y\}) \geq \omega(\{n\colon y_n \in U \cup U'\}) = \omega(\{n\colon y_n \in U\}) + \omega(\{n\colon y_n \in U'\}) = 2.$$

□

3.47 Ankkuroitujen metristen avaruuksien jonon ultraraja-avaruus

Olkoon ω vapaa ultrafiltteri $\mathbb{N}$:ssä ja olkoon (X_n, d_n, p_n) jono ankkuroituja metrisiä avaruuksia. Merkitään

$$X_\infty = \left\{ (x_n)\colon x_n \in X_n, \sup_n d_n(x_n, p_n) < \infty \right\}.$$

Havaitaan, että $(p_n) \in X_\infty$, joten $X_\infty \neq \emptyset$. Määritellään X_∞:ään pseudometriikka

$$\hat{d}_\omega\big((x_n),(y_n)\big) = \lim_\omega d_n(x_n,y_n). \tag{3.48}$$

Kolmioepäyhtälön nojalla

$$\sup_n d_n(x_n,y_n) \leq \sup_n d_n(x_n,p_n) + \sup_n d_n(y_n,p_n) < \infty,$$

joten arvot $d_n(x_n,y_n)$ kuuluvat johonkin $\mathbb{R}$:n kompaktiin osajoukkoon ja siten ω-raja-arvo (3.48):ssa on olemassa.

Määritellään seuraavaksi X_∞:ään ekvivalenssirelaatio

$$(x_n) \sim (y_n) \iff \lim_\omega d_n(x_n,y_n) = 0$$

ja varustetaan tekijäavaruus

$$X_\omega = X_\infty/{\sim}$$

metriikalla

$$d_\omega\big([(x_n)],[(y_n)]\big) = \lim_\omega d_n(x_n,y_n).$$

Huomautus 3.49. 1. d_ω on hyvin määritelty eli ei riipu valituista edustajista $(x_n),(y_n)$.

2. $p_\omega = \big[(p_n)\big] \in X_\omega$, joten $X_\omega \neq \emptyset$.

Määritelmä 3.50. Sanomme, että ankkuroitu metrinen avaruus $(X_\omega,d_\omega,p_\omega)$ on jonon (X_n,d_n,p_n) *ultraraja-avaruus* ja merkitään

$$(X_\omega,d_\omega,p_\omega) = \lim_\omega (X_n,d_n,p_n).$$

Lemma 3.51. (X_ω,d_ω) *on täydellinen.*

Tod. Olkoon (x_ω^j) Cauchy-jono (X_ω,d_ω):ssa. Valitaan x_ω^j:n edustaja (x_i^j), $x_i^j \in X_i$, jokaisella $j \in \mathbb{N}$. Merkitään $A_0 = \mathbb{N}$ ja olkoon

$$\tilde{A}_{k,j} = \big\{i \in \mathbb{N} \colon \big|d_\omega\big(x_\omega^j,x_\omega^k\big) - d_i\big(x_i^j,x_i^k\big)\big| < 2^{-k}\big\}$$

jokaisella $k \in \mathbb{N}$ ja $j \in \{1,\dots,k\}$. Tällöin $d_\omega(x_\omega^j,x_\omega^k)$:n määritelmän nojalla $\omega(\tilde{A}_{k,j}) = 1$ kaikilla $j \in \{1,\dots,k\}$ ja siten leikkaukselle

$$\tilde{A}_k = \bigcap_{j=1}^k \tilde{A}_{k,j}$$

pätee $\omega(\tilde{A}_k) = 1$. Olkoon sitten $A_1 = \tilde{A}_1$ ja induktiivisesti $A_k = \tilde{A}_k \cap A_{k-1}$. Siten $A_k \subset A_{k-1}$ ja $\omega(A_k) = 1$ kaikilla $k \in \mathbb{N}$. Määritellään jono $(y_i), y_i \in X_i$, asettamalla

$$y_i = \begin{cases} x_i^1, & i \in \mathbb{N} \setminus A_2, \\ x_i^k, & i \in A_k \setminus A_{k+1},\ k \geq 2. \end{cases}$$

Osoitetaan seuraavaksi, että $(y_i) \in X_\infty$ ja $d_\omega\big(x_\omega^j,[(y_i)]\big)$. Kiinnitetään $\varepsilon > 0$ ja valitaan $j_0 \in \mathbb{N}$ s.e.

$$d_\omega\big(x_\omega^j,x_\omega^k\big) + 2^{-j_0-1} < \varepsilon$$

kaikilla $k \geq j \geq j_0$. Näin voidaan tehdä, sillä (x_ω^j) on Cauchy-jono (X_ω, d_ω):ssa. Kun $i \in \mathbb{N} \setminus A_{j_0+1}$, niin

$$\sup_{i \in \mathbb{N} \setminus A_{j_0+1}} d_i(y_i, p_i) \leq \max\{\sup_{i \in \mathbb{N}} d_i(x_i^j, p_i) \colon j = 1, \ldots, j_0\} =: C < \infty.$$

Kun $i \in A_k \setminus A_{k+1}$ ja $k \geq j_0 + 1$, niin

$$\begin{aligned}
\sup_{i \in A_k \setminus A_{k+1}} d_i(y_i, p_i) &= \sup_{i \in A_k \setminus A_{k+1}} d_i(x_i^k, p_i) \\
&\leq \sup_{i \in A_k \setminus A_{k+1}} d_i(x_i^k, x_i^{j_0}) + \sup_{i \in A_k \setminus A_{k+1}} d_i(x_i^{j_0}, p_i) \\
&\leq \sup_{i \in A_k \setminus A_{k+1}} \left(d_\omega\big(x_\omega^k, x_\omega^{j_0}\big) + \underbrace{\big|d_\omega\big(x_\omega^k, x_\omega^{j_0}\big) - d_i\big(x_i^k, x_i^{j_0}\big)\big|}_{< 2^{-k} \leq 2^{-j_0-1}} \right) + C \\
&\leq \varepsilon + C < \infty.
\end{aligned}$$

Siten

$$\sup_{i \in \mathbb{N}} d_i(y_i, p_i) < \infty$$

eli $(y_i) \in X_\infty$. Merkitään $y_\omega = [(y_i)]$ ja osoitetaan, että $d_\omega\big(x_\omega^j, y_\omega\big) \to 0$, kun $j \to \infty$. Olkoon $j \geq j_0$. Tällöin

$$\begin{gathered}
d_i(x_i^j, y_i) = d_i(x_i^j, x_i^j) = 0 \quad \forall i \in A_j \setminus A_{j+1} \\
d_i(x_i^j, y_i) = d_i(x_i^j, x_i^{j+1}) < d_\omega(x_\omega^j, x_\omega^{j+1}) + 2^{-j-1} < \varepsilon \quad \forall i \in A_{j+1} \setminus A_{j+2}
\end{gathered}$$

ja yleisesti

$$d_i(x_i^j, y_i) = d_i(x_i^j, x_i^{j+n}) < d_\omega(x_\omega^j, x_\omega^{j+n}) + 2^{-j-n} < \varepsilon \quad \forall i \in A_{j+n} \setminus A_{j+n+1}.$$

Toisin sanoen

$$d_i(x_i^j, y_i) < \varepsilon \tag{3.52}$$

kaikilla $i \in A_j$. Koska $\omega(A_j) = 1$, seuraa (3.52):sta (helposti), että

$$d_\omega\big(x_\omega^j, y_\omega\big) = \lim_\omega d_i\big(x_i^j, y_i\big) \leq \varepsilon.$$

Siis $d_\omega\big(x_\omega^j, y_\omega\big) \to 0$, kun $j \to \infty$ ja (X_ω, d_ω) on siten täydellinen. □

Seuraavien väitteiden todistukset jätetään harjoitustehtäviksi.

Huomautus 3.53. Olkoon ω vapaa ultrafiltteri $\mathbb{N}$:ssä ja $(X_\omega, d_\omega, p_\omega)$ jonon (X_n, d_n, p_n) ultraraja-avaruus.

1. Jos jono (X_n, d_n, p_n) toteuttaa Lauseen 3.40 ehdot, niin

   $$(X_\omega, d_\omega, p_\omega) = \mathrm{GH} - \lim(X_{n_i}, d_{n_i}, p_{n_i})$$

   jollakin osajonolla (n_i).

2. Jos $(X_\omega, d_\omega, p_\omega)$ on rajoitetusti kompakti, niin on olemassa $S \subset \mathbb{N}$, $\omega(S) = 1$, s.e. S:ää vastaavalle osajonolle $\{n_i\} = S$ pätee

   $$(X_\omega, d_\omega, p_\omega) = \mathrm{GH} - \lim(X_{n_i}, d_{n_i}, p_{n_i}).$$

3. Jos metriset avaruudet (X_n, d_n) ovat sisäisiä, niin (X_ω, d_ω) on sisäinen.

3.54 Tangenttikartio ja asymptoottinen kartio

Jos (X,d) on metrinen avaruus ja $\lambda > 0$, niin merkintä λX tarkoittaa metristä avaruutta $(X, \lambda d)$. Vastaavasti $(\lambda X, p)$ tarkoittaa ankkuroitua metristä avaruutta $(X, \lambda d, p)$.

Määritelmä 3.55. Ankkuroitua metristä avaruutta (X,p) sanotaan *kartioksi,* jos $(\lambda X, p)$ on ankkuroidusti isometrinen (X,p):n kanssa $\forall \lambda > 0$.

Määritelmä 3.56. Olkoon (X,p) ankkuroitu metrinen avaruus. Sanomme, että ankkuroitu metrinen avaruus (T,o) on X:n *(Gromov-Hausdorff) tangenttikartio* p:ssä, jos

$$(T,o) = \mathrm{GH} - \lim_{i\to\infty} (\lambda_i X, p)$$

jollakin jonolla $\lambda_i \to \infty$.

Huomautus 3.57. (Gromov-Hausdorff) tangenttikartiota ei välttämättä ole olemassa (ks. seuraava esimerkki). Toisaalta, jos tangenttikartio on olemassa, niin sen ei tarvitse olla yksikäsitteinen.

Esimerkki 3.58. Olkoon

$$X = \{0\} \cup \bigcup_{n=1}^{\infty} \{1/n\} \times \mathbb{R}^n.$$

Määritellään X:ään ("Eukliidinen") metriikka d s.e.

$$d\big((1/n, x), (1/m, y)\big) = \left(\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{m} \right)^2 + \sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2 + \sum_{i=n+1}^{m} y_i^2 \right)^{1/2},$$

kun $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n,\ y = (y_1, \dots, y_m) \in \mathbb{R}^m,\ m \geq n$, ja

$$d\big(0, (1/n, x)\big) = \left(\left(\frac{1}{n} \right)^2 + \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \right)^{1/2}.$$

Tällöin X:llä ei ole olemassa Gromov-Hausdorff tangenttikartiota pisteessä 0. (Miksi?)

Rajoitetusti kompakti tangenttikartio on kartio Määritelmän 3.55 mielessä. Tämä seuraa Lauseesta 3.39 ja seuraavasta lemmasta.

Lemma 3.59. *Olkoon* $(X_i, p_i),\ i \in \mathbb{N}$, *jono ankkuroitua metrisiä avaruuksia ja* $(X_i, p_i) \xrightarrow{\mathrm{GH}} (X, p)$. *Silloin* $(\lambda X_i, p_i) \xrightarrow{\mathrm{GH}} (\lambda X, p)$ *kaikilla* $\lambda > 0$.

Tod. Kiinnitetään $\lambda > 0$. Jokaista $r > 0$ ja $\varepsilon > 0$ kohti on olemassa $i_0 \in \mathbb{N}$ s.e. jokaisella $i \geq i_0$ on olemassa kuvaukset $f_i \colon B(p_i, r/\lambda) \to X$ s.e.

$$\begin{gathered} f_i(p_i) = p, \\ |x-y| - \varepsilon/\lambda \leq |f_i(x) - f_i(y)| \leq |x-y| + \varepsilon/\lambda, \\ B(p, (r-\varepsilon)/\lambda) \subset \big(f_i B(p_i, r/\lambda)\big)(\varepsilon/\lambda). \end{gathered}$$

Kun sekä X:ssä että X_i:ssä käytetään metriikkaa $d_\lambda(x,y) = \lambda|x-y|$, saadaan kuvaukset $f_i \colon B_\lambda(p_i, r) \to X$ s.e.

$$\begin{gathered} f_i(p_i) = p, \\ \frac{1}{\lambda} d_\lambda(x,y) - \varepsilon/\lambda \leq \frac{1}{\lambda} d_\lambda(f_i(x), f_i(y)) \leq \frac{1}{\lambda} d_\lambda(x,y) + \varepsilon/\lambda, \\ B_\lambda(p, r-\varepsilon) \subset \big(f_i B_\lambda(p_i, r)\big)(\varepsilon). \end{gathered}$$

Siis $(\lambda X_i, p_i) \xrightarrow{\text{GH}} (\lambda X, p)$. □

Tangenttikartio p:ssä on lokaali käsite, jonka määrää mikä tahansa p:n ympäristö seuraavalla tavalla.

Lemma 3.60. *Jos U on p:n ympäristö, niin ankkuroitu metrinen avaruus (T, o) on U:n tangenttikartio p:ssä, jos ja vain jos (T, o) on X:n tangenttikartio p:ssä.*

Tod. Olkoon $r_0 > 0$ niin pieni, että $B(p, r_0) \subset U$. Väite seuraa nyt siitä, että annetulla $r > 0$ metristen avaruuksien λU ja λX p-keskiset r-säteiset kuulat ovat samoja, kunhan λ on tarpeeksi suuri. Tarkemmin sanoen, jos $\lambda \geq r/r_0$, niin

$$\begin{aligned} B_{\lambda U}(p, r) &= \{x \in U \colon \lambda|x - p| < r\} \\ &= \{x \in U \colon |x - p| < r/\lambda\} \\ &= \{x \in X \colon |x - p| < r/\lambda\} \\ &= B_{\lambda X}(p, r). \end{aligned}$$

□

Intuitiivisesti tangenttikartio p:ssä on se mitä nähtäisiin, jos pistettä p katsottaisiin äärettömästi suurentavalla mikroskoopilla.

Gromovin kompaktisuuslauseesta 3.40 saadaan seuraava.

Lause 3.61. *Olkoon X tuplaava metrinen avaruus ja $p \in X$. Silloin jokaisella jonolla (λ_i), $\lambda_i \to \infty$, on olemassa osajono (λ_{i_j}) ja rajoitetusti kompakti tuplaava ankkuroitu metrinen avaruus (T, o) s.e. $(\lambda_{i_j} X, p) \xrightarrow{\text{GH}} (T, o)$.*

Tod. [Idea:] Lauseen 3.40 oletus on voimassa jonolle $(\lambda_i X, p)$, $i \in \mathbb{N}$, sillä X on tuplaava. Siten on olemassa osajono (λ_{i_j}) ja ankkuroitu metrinen avaruus (T, o) siten, että $(\lambda_{i_j} X, p) \xrightarrow{\text{GH}} (T, o)$. Voimme olettaa, että T on täydellinen. Lisäksi on helppo nähdä, että T on tuplaava vakiolla, joka riippuu vain X:n tuplausvakiosta (HT). Siten T:n jokainen suljettu ja rajoitettu osajoukko on täydellinen ja totaalisti rajoitettu eli kompakti. Siis T on rajoitetusti kompakti. □

Usein on mielenkiintoisempaa tutkia, mitä tapahtuu $(\lambda X, p)$:lle, kun $\lambda \to 0$. Tällöin saadaan tietoa X:n "käyttäytymisestä äärettömyydessä", ts. miltä X näyttäisi, jos sitä katsottaisiin äärettömän kaukaa.

Määritelmä 3.62. Olkoon X metrinen avaruus ja $p \in X$. Sanomme, että ankkuroitu metrinen avaruus (X_∞, p_∞) on X:n *(Gromov-Hausdorff) asymptoottinen kartio* (tai X:n *kartio äärettömyydessä*), jos $(X_\infty, p_\infty) = \text{GH} - \lim_{i\to\infty}(\lambda_i X, p)$ jollakin jonolla $\lambda_i \to 0$.

Huomautus 3.63. (Gromov-Hausdorff) asymptoottista kartiota ei välttämättä ole olemassa (mieti esimerkkejä).

Seuraava lause sanoo, ettei asymptoottinen kartio riipu kantapisteen valinnasta.

Lause 3.64. *Olkoon $(X_\infty, p_\infty) = \text{GH} - \lim_{i\to\infty}(\lambda_i X, p)$, missä $\lambda_i \to 0$, ja olkoon $q \in X$. Tällöin*

$$(X_\infty, p_\infty) = \text{GH} - \lim_{i\to\infty}(\lambda_i X, q). \tag{3.65}$$

Tod. Kiinnitetään $r > 0$ ja $\varepsilon > 0$. Olkoon $j \in \mathbb{N}$ niin suuri, että

$$\varepsilon' = (\varepsilon - \lambda_j|p - q|)/2 > 0.$$

Merkitään $R = r + \lambda_j|p-q|$. Tällöin on olemassa $i_0 \in \mathbb{N}$ s.e. jokaisella $i \geq i_0$ on olemassa kuvaus $f_i\colon B_{\lambda_i X}(p,R) \to X_\infty$ s.e. $f_i(p) = p_\infty$ ja

$$d_{\lambda_i}(x,y) - \varepsilon' \leq |f_i(x) - f_i(y)| \leq d_{\lambda_i}(x,y) + \varepsilon'$$

eli

$$\lambda_i|x-y| - \varepsilon' \leq |f_i(x) - f_i(y)| \leq \lambda_i|x-y| + \varepsilon'$$

ja

$$B(p_\infty, R-\varepsilon') \subset \big(f_i B_{\lambda_i X}(p,R)\big)(\varepsilon') = \big(f_i B(p, R/\lambda_i)\big)(\varepsilon').$$

Koska $B_{\lambda_i X}(q,r) \subset B_{\lambda_i X}(p,R)$, voidaan määritellä kuvaukset $g_i\colon B_{\lambda_i X}(q,r) \to X_\infty$,

$$g_i(x) = \begin{cases} f_i(x), & \text{kun } x \neq q, \\ p_\infty, & \text{kun } x = q. \end{cases}$$

Tällöin kaikilla $x, y \in B_{\lambda_i X}(q,r)$ pätee

$$\lambda_i|x-y| - \lambda_i|p-q| - \varepsilon' \leq |g_i(x) - g_i(y)| \leq \lambda_i|x-y| + \lambda_i|p-q| + \varepsilon',$$

jolloin erityisesti

$$\lambda_i|x-y| - \varepsilon \leq |g_i(x) - g_i(y)| \leq \lambda_i|x-y| + \varepsilon.$$

Osoitetaan seuraavaksi, että

$$B(p_\infty, r-\varepsilon) \subset \big(g_i B_{\lambda_i X}(q,r)\big)(\varepsilon), \tag{3.66}$$

josta seuraa, että (3.65) pätee. Koska $r - \varepsilon \leq R - \varepsilon'$, niin

$$B(p_\infty, r-\varepsilon) \subset \big(f_i B(p, R/\lambda_i)\big)(\varepsilon').$$

Toisin sanoen, jokaista $y \in B(p_\infty, r-\varepsilon)$ kohti on olemassa $x \in B(p, R/\lambda_i)$ s.e. $|y - f_i(x)| < \varepsilon'$. Nyt on oltava $x \in B_{\lambda_i X}(p, r - \lambda_j|p-q|)$, sillä jos olisi $\lambda_i|x-p| \geq r - \lambda_j|p-q|$, niin silloin

$$\begin{aligned} r - \varepsilon &> |y - p_\infty| \\ &\geq |f_i(x) - p_\infty| - |y - f_i(x)| \\ &\geq \lambda_i|x-p| - \varepsilon' - \varepsilon' \\ &\geq r - \lambda_j|p-q| - 2\varepsilon' \\ &= r - \varepsilon, \end{aligned}$$

mikä on ristiriita. Toisaalta $B_{\lambda_i X}(p, r-\lambda_j|p-q|) \subset B_{\lambda_i X}(q,r)$, joten $B(p_\infty, r-\varepsilon) \subset \big(f_i B_{\lambda_i X}(q,r)\big)(\varepsilon')$. Vielä on osoitettava, että

$$\big(f_i B_{\lambda_i X}(q,r)\big)(\varepsilon') \subset \big(g_i B_{\lambda_i X}(q,r)\big)(\varepsilon). \tag{3.67}$$

Jokaisella $y \in \big(f_i B_{\lambda_i X}(q,r)\big)(\varepsilon')$ on olemassa $x \in B(q, r/\lambda_i)$ s.e. $|f_i(x) - y| < \varepsilon'$. Jos $x \neq q$, niin $g_i(x) = f_i(x)$, jolloin $y \in \big(g_i B_{\lambda_i X}(q,r)\big)(\varepsilon') \subset \big(g_i B_{\lambda_i X}(q,r)\big)(\varepsilon)$. Jos $x = q$, niin

$$|g_i(q) - f_i(q)| = |f_i(p) - f_i(q)| \leq \lambda_i|p-q| + \varepsilon',$$

jolloin

$$\begin{aligned}|y - g_i(q)| &\le |y - f_i(q)| + |f_i(q) - g_i(q)| \\ &< 2\varepsilon' + \lambda_i |p-q| \\ &= \varepsilon - \lambda_j|p-q| + \lambda_i|p-q| \le \varepsilon.\end{aligned}$$

Siis $y \in \big(g_i B_{\lambda_i X}(q,r)\big)(\varepsilon)$ ja (3.67) pätee. Olemme todistaneet (3.66):n ja siten koko lauseen. $\square$

Olkoon ω vapaa ultrafiltteri $\mathbb{N}$:ssä ja $\lambda_n > 0$ s.e. $\lim_\omega \lambda_n = 0$. Jos (X,d) on metrinen avaruus ja $p_n \in X$, niin ultraraja-avaruutta

$$\lim_\omega (X, d/\lambda_n, p_n)$$

kutsutaan X:n *(ω-)tangenttikartioksi* ja ultraraja-avaruutta

$$\lim_\omega (X, \lambda_n d, p_n)$$

X:n *asymptoottiseksi (ω-)kartioksi*. Jos edellä $p_n = p$ kaikilla $n \in A$, $\omega(A) = 1$, niin $\lim_\omega(X, d/\lambda_n, p_n)$:tä kutsutaan X:n *(ω-)tangenttikartioksi p:ssä.*

3.68 Kuvauspakettien suppeneminen

Tutkimme seuraavaksi metristen avaruuksien välisten kuvausten käyttäytymistä Gromov-Hausdorff suppenemisessa.

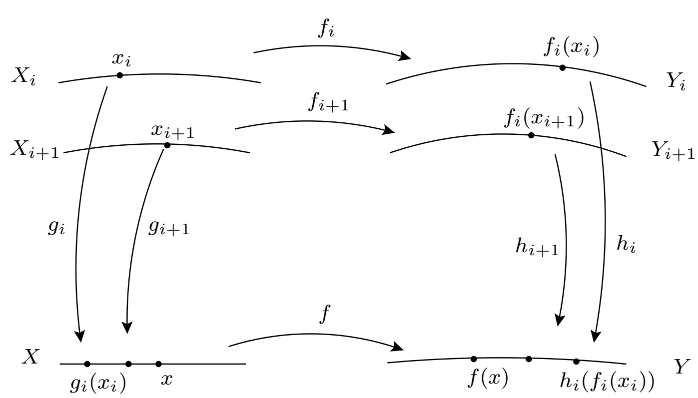
Määritelmä 3.69. *Kuvauspaketti* on kolmikko (X, Y, f), missä X ja Y ovat metrisiä avaruuksia ja $f\colon X \to Y$. Vastaavasti (ankkuroitu) kuvauspaketti on $\big((X,p),(Y,q),f\big)$, missä $f\colon X \to Y$ toteuttaa ehdon $f(p) = q$.

Määritelmä 3.70. Kuvauspaketit (X_i, Y_i, f_i) suppenevat kohti kuvauspakettia (X, Y, f), jos on olemassa ε_i-lähi-isometriat $g_i\colon X_i \to X$ ja $h_i\colon Y_i \to Y$ jollakin jonolla $\varepsilon_i \to 0$, s.e. jokaisella $x \in X$

$$h_i\big(f_i(x_i)\big) \to f(x)$$

jokaisella jonolla $x_i \in X_i$, jolla $g_i(x_i) \to x$.

Lemmasta 3.20 seuraa, että erityisesti $d_{\mathrm{GH}}(X_i, X) \to 0$ ja $d_{\mathrm{GH}}(Y_i, Y) \to 0$.



Määritellään seuraavaksi ankkuroitujen kuvauspakettien konvergenssi.

Määritelmä 3.71. Sanomme, että kuvauspaketit $\big((X_i,p_i),(Y_i,q_i),f_i\big)$ suppenevat kohti kuvauspakettia $\big((X,p),(Y,q),f\big)$, jos seuraavat ehdot toteutuvat.

(i) Jokaisella $r > 0$ on olemassa jono $\varepsilon_i \to 0$ ja ε_i-lähi-isometriat

$$\begin{aligned} g_i\colon \underbrace{B(p_i, r)}_{\subset X_i} &\to \big(g_i B(p_i, r)\big)(\varepsilon_i) \subset X \quad \text{ja} \\ h_i\colon \underbrace{B(q_i, r)}_{\subset Y_i} &\to \big(h_i B(q_i, r)\big)(\varepsilon_i) \subset Y \quad \text{s.e.} \\ g_i(p_i) &= p, \\ h_i(q_i) &= q, \\ B(p, r-\varepsilon_i) &\subset \big(g_i B(p_i, r)\big)(\varepsilon_i) \quad \text{ja} \\ B(q, r-\varepsilon_i) &\subset \big(h_i B(q_i, r)\big)(\varepsilon_i). \end{aligned}$$

(ii) Jokaisella $x \in X$ ja jokaisella $r > |x - p|$

$$h_i\big(f_i(x_i)\big) \to f(x)$$

aina kun $x_i \in X_i$ on jono, jolla $g_i(x_i) \to x$, missä g_i ja h_i toteuttavat kohdan (i) ehdot (arvolla $r > 0$).

Huomautus 3.72. Ehdosta (i) seuraa, että $(X_i, p_i) \xrightarrow{\text{GH}} (X, p)$ ja $(Y_i, q_i) \xrightarrow{\text{GH}} (Y, q)$.

Määritelmä 3.73. Olkoon $\big((X_i, p_i), (Y_i, q_i), f_i\big)$ kuvauspaketti. Sanomme, että jono (f_i) on *yhtäjatkuva rajoitetuissa osajoukoissa*, jos jokaista $r > 0$ ja $\varepsilon > 0$ kohti on olemassa $\delta > 0$ s.e.

$$f_i \underbrace{B(x_i, \delta)}_{\subset X_i} \subset \underbrace{B(f_i(x_i), \varepsilon)}_{\subset Y_i}$$

kaikilla $x_i \in B(p_i, r)$. Lisäksi sanomme, että jono (f_i) on *tasaisesti rajoitettu rajoitetuissa osajoukoissa*, jos

$$\sup_i \sup_{x \in B(p_i, r)} |f_i(x) - q_i| < \infty$$

jokaisella $r > 0$. Toisin sanoen, jokaista $r > 0$ kohti on olemassa $R > 0$ s.e.

$$f_i \underbrace{B(p_i, r)}_{\subset X_i} \subset B(q_i, R) \subset Y_i \quad \forall i \in \mathbb{N}.$$

Huomautus 3.74. Seuraavan lauseen todistuksessa (samoin kuin Lauseen 3.64 todistuksessa) voi käyttää havaintoa (HT): Jos

$$f\colon \underbrace{B(p, R)}_{\subset X} \to \big(f B(p, R)\big)(\varepsilon) \subset Y$$

on ε-lähi-isometria s.e. $f(p) = q$ ja

$$B(q, R - \varepsilon) \subset \big(f B(p, R)\big)(\varepsilon),$$

niin silloin

$$B(q, r - 2\varepsilon) \subset \big(f B(p, r)\big)(\varepsilon) \subset \big(f B(p, r)\big)(2\varepsilon)$$

kaikilla $0 < r < R$.

Lause 3.75. *Olkoon* $\{((X_i,p_i),(Y_i,q_i),f_i)\}_{i=1}^\infty$ *jono kuvauspaketteja, jossa jokainen* X_i *ja* Y_i *on tuplaava samalla tuplausvakiolla* c*. Oletetaan lisäksi, että* (f_i) *on yhtäjatkuva ja tasaisesti rajoitettu rajoitetuissa joukoissa. Silloin on olemassa osajono, joka suppenee kohti kuvauspakettia* $((X,p),(Y,q),f)$*.*

Tod. Jaetaan todistus neljään osaan seuraavasti:

(a) Löydetään osajonot ja raja-avaruudet (X,p), (Y,q).

(b) Konstruoidaan annetulla $r>0$ Määritelmän 3.71 kohdan (i) kuvaukset g_i ja h_i.

(c) Konstruoidaan diagonaalimenetelmällä (siirtymällä jälleen osajonoihin) kuvaus $f\colon X\to Y$.

(d) Todetaan Määritelmän 3.71 ehto (ii).

(a): Koska X_i:t ja Y_i:t ovat tuplaavia samalla vakiolla c, ne toteuttavat Gromovin kompaktisuuslauseen 3.40 oletuksen. Siten on olemassa osajonot (merk. edelleen (X_i,p_i), (Y_i,q_i)) ja ankkuroidut metriset avaruudet (X,p), (Y,q) s.e.

$$(X_i,p_i)\xrightarrow{\mathrm{GH}}(X,p)\quad\text{ja}\quad(Y_i,q_i)\xrightarrow{\mathrm{GH}}(Y,q).$$

Voimme olettaa, että X ja Y ovat täydellisiä. Lisäksi X ja Y ovat tuplaavia vakiolla, joka riippuu vain c:stä (HT). Erityisesti X on separoituva ja Y on rajoitetusti kompakti.

(b): Jokaisella $j\in\mathbb{N}$ on olemassa $i_j\in\mathbb{N}$ ja 2^{-j}-lähi-isometriat

$$\begin{aligned}
g_{i_j}\colon&\ \underbrace{B(p_{i_j},2^j)}_{\subset X_{i_j}}\to\big(g_{i_j}B(p_{i_j},2^j)\big)(2^{-j})\subset X\quad\text{ja}\\
h_{i_j}\colon&\ \underbrace{B(q_{i_j},2^j)}_{\subset Y_{i_j}}\to\big(h_{i_j}B(q_{i_j},2^j)\big)(2^{-j})\subset Y\quad\text{s.e.}\\
&g_{i_j}(p_{i_j})=p,\\
&h_{i_j}(q_{i_j})=q,\\
B(p,2^j-2^{-j})&\subset\big(g_{i_j}B(p_{i_j},2^j)\big)(2^{-j})\quad\text{ja}\\
B(q,2^j-2^{-j})&\subset\big(h_{i_j}B(q_{i_j},2^j)\big)(2^{-j}).
\end{aligned}$$

Lisäksi voimme olettaa, että $i_{j+1}>i_j$. Siirtymällä osajonoihin voimme merkitä

$$\big((X_{i_j},p_{i_j}),(Y_{i_j},q_{i_j}),f_{i_j}\big)=\big((X_j,p_j),(Y_j,q_j),f_j\big),\ g_{i_j}=g_j,\ h_{i_j}=h_j.$$

Nyt (X,p), (Y,q) ja kuvauspaketit $((X_j,p_j),(Y_j,q_j),f_j)$ toteuttavat Määritelmän kohdan (i) ehdot. Jos nimittäin $r>0$ on annettu, niin asetetaan

$$\varepsilon_j=\begin{cases}2r, & \text{kun } 2^j<r,\\ 2^{-j+1}, & \text{kun } 2^j\ge r.\end{cases}$$

Lisäksi asetetaan $g_j\equiv p$ ja $h_j\equiv q$, kun $2^j<r$. Jos $2^j\ge r$, niin rajoitetaan yllä olleet kuvaukset g_j ja h_j kuuliin $B(p_j,r)$ ja $B(q_j,r)$. (Ehdon (i) yksityiskohtien tarkistus jätetään harjoitustehtäväksi, ks. Huomautus 3.74.)

(c): (Vrt. Arzela-Ascolin lause.) Olkoon $S=\{p,a_1,a_2,\dots\}\subset X$ tiheä. Jokaisella $k,j\in\mathbb{N}, j\ge k$, ja jokaisella i, jolla $a_i\in S\cap B(p,2^k-2^{-1})$ on olemassa $a_{i,j}\in X_j$ s.e. $|a_i-g_j(a_{i,j})|<2^{-j}$, missä g_j on kuten yllä. Pistettä p vastaamaan valitaan (tietenkin) pisteet p_j. Koska jono (f_j) on oletuksen mukaan tasaisesti rajoitettu rajoitetuissa joukoissa ja koska Y on rajoitetusti kompakti, niin pisteet $h_j\big(f_j(a_{i,j})\big)$ kuuluvat Y:n kompaktiin osajoukkoon. Diagonaalimenetelmällä (k:n ja pisteiden $a_i \in S \cap B(p, 2^k - 2^{-1})$:n suhteen) löydetään osajono (merk. edelleen (f_j) s.e.

$$h_j\big(f_j(a_{i,j})\big) \to b_i \in Y$$

jokaisella $a_i \in S$. Asetetaan $f(a_i) = b_i$. Olkoon sitten $x \in X$ ja $a_{i_j} \to x$, $a_{i_j} \in S$. Asetetaan $f(x) = \lim_{i_j \to \infty} f(a_{i_j})$. Perustellaan vielä raja-arvon olemassaolo ja riippumattomuus jono $a_{i_j} \to x$ valinnasta. Kuvaus $f\colon S \to Y$ on tasaisesti jatkuva S:n rajoitetuissa osajoukoissa, koska jono (f_j) on tasaisesti yhtäjatkuva rajoitetuissa joukoissa ja g_j ja h_j ovat 2^{-j}-lähi-isometrioita. Tästä seuraa, että $f(a_{i_j})$ on Cauchy-jono Y:ssä. Koska Y on täydellinen, raja-arvo $f(x)$ on olemassa (ja riippumaton jonon (a_{i_j}) valinnasta).

(d): Ehto (ii) (kaikille $r > 0$ ja mille tahansa ehdon (i) toteuttaville kuvauksille $\tilde{g}_i, \tilde{h}_i$) seuraa niinikään jonon (f_j) yhtäjatkuvuudesta rajoitetuissa joukoissa. (Yksityiskohdat HT.) □

Huomautus 3.76. Edellä oletettiin, että metriset avaruudet X_i ja Y_i ovat tuplaavia samalla vakiolla C. Yhtäpitävästi olisimme voineet olettaa, että X_i:t ovat tuplaavia samalla vakiolla C_1 ja Y_i:t vakiolla C_2.

3.77 Funktiopaketit

(Lähdemateriaali: [K1].)

Määritelmä 3.78. *Funktiopaketti* on nelikko (X, d, x, f), missä (X, d, x) on ankkuroitu metrinen avaruus ja $f\colon X \to \mathbb{R}$.

[*Huom.:* Paperissa [K1] näitä kutsutaan avaruus-funktioiksi (space-functions).]

Määritelmä 3.79. Jono funktiopaketteja

$$\big\{(X_i, d_i, x_i, f_i)\big\}_{i=1}^{\infty}$$

suppenee kohti funktiopakettia (X, d, x, f), jos jono kuvauspaketteja

$$\big\{\big((X_i, d_i, x_i), (\mathbb{R}, |\cdot|, f_i(x_i)), f_i\big)\big\}_{i=1}^{\infty}$$

suppenee kohti kuvauspakettia $\big((X, d, x), (\mathbb{R}, |\cdot|, f(x)), f\big)$.

Määritelmä 3.80. Olkoon (X, d, x, f) funktiopaketti. Funktiopakettia (Z, ρ, z, g) sanotaan (X, d, x, f):n *tangenttifunktiopaketiksi,* jos on olemassa reaalilukujono $r_i \to 0$ ja x:n ympäristö $U \subset X$ s.e. funktiopakettien $(U, d/r_i, x, f_i)$ jono suppenee kohti (Z, ρ, z, g):tä, missä

$$f_i(y) = \big(f(y) - f(x)\big)/r_i.$$

Sanomme, että

- tangenttifunktiopaketti (Z, ρ, z, g) on jonon (r_i) määräämä,
- (Z, ρ, z) on (X, d, x):n *tangenttikartio* x:ssä ja
- g on f:n *tangenttifunktio* x:ssä.

Lisäksi (X,d,x,f):n tangenttifunktiopakettien kokoelmaa merkitään $T(X,d,x,f)$:llä.

Määritelmä 3.81. Metrinen avaruus (X,d) on *lokaalisti tuplaava pisteessä $x \in X$ (vakiolla C),* jos on olemassa X:n ympäristö $U \subset X$ s.e. (U,d) on tuplaava vakiolla C. Lisäksi sanomme, että X on lokaalisti tuplaava, jos se on lokaalisti tuplaava jokaisessa pisteessä $x \in X$ jollakin (mahd. x:stä riippuvalla) vakiolla $C = C(x)$.

Lause 3.82 (Tangenttifunktiopakettien olemassaolo)**.** *Olkoon (X,d,x,f) funktiopaketti, missä X on lokaalisti tuplaava vakiolla C ja $f\colon X \to \mathbb{R}$ on L-Lipschitz. Olkoon lisäksi (r_i) reaalilukujono s.e. $r_i \to 0$. Silloin on olemassa (r_i):n jonkin osajonon määräämä tangenttifunktiopaketti $(Z,\rho,z,g) \in T(X,d,x,f)$ s.e. Z on täydellinen ja tuplaava vakiolla C^2 ja g on L-Lipschitz.*

Tod. Olkoon $U \subset X$ pisteen x sellainen ympäristö, että (U,d) on tuplaava vakiolla C. Merkitään

$$(X_i, d_i, x_i) = (U, d/r_i, x)$$

ja tutkitaan kuvauspaketteja

$$\big((X_i,d_i,x_i),(\mathbb{R},|\cdot|,0),f_i\big), \quad f_i(\cdot) = \big(f(\cdot) - f(x)\big)/r_i.$$

Nyt (X_i,d_i,x_i) on jono ankkuroituja metrisiä avaruuksia, jotka ovat tuplaavia samalla vakiolla C. Jokainen funktio $f_i\colon X_i \to \mathbb{R}$ on L-Lipschitz, sillä

$$|f_i(y) - f_i(z)| \le L\,d(y,z)/r_i \le L\,d_i(y,z) \quad \forall y,z \in X_i.$$

Lisäksi $f_i(x_i) = 0$, joten jono (f_i) on yhtäjatkuva ja tasaisesti rajoitettu rajoitetuissa osajoukoissa. Lauseen 3.75 nojalla on olemassa (r_i):n osajono ja kuvauspaketti

$$\big((Z,\rho,z),(\mathbb{R},|\cdot|,0),g\big),$$

jota kohti vastaava $\big((X_i,d_i,x_i),(\mathbb{R},|\cdot|,0),f_i\big)$:n osajono suppenee. Toisin sanoen

$$(Z,\rho,z,g) \in T(X,d,x,f)$$

on (r_i):n osajonon määräämä tangenttifunktiopaketti. Lisäksi Z on tuplaava vakiolla C^2 (HT 6/5) ja se voidaan olettaa täydelliseksi.

Jäljellä on osoittaa, että g on L-Lipschitz. Merkitään yllä löydettyä osajonoa edelleen (r_i):llä. Olkoot $a,b \in Z$ ja $r > 0$ niin suuri, että $a,b \in B(z,r/2)$. On olemassa ε_i-lähi-isometriat

$$g_i\colon \underbrace{B(x_i,r)}_{\subset X_i} \to \big(g_i B(x_i,r)\big)(\varepsilon_i) \subset Z$$

s.e. $g_i(x_i) = z,\ B(z, r-\varepsilon_i) \subset \big(g_i B(x_i,r)\big)(\varepsilon_i)$ ja $\varepsilon_i \to 0$. Nyt

$$|g(a) - g(b)| = \lim_{i\to\infty} |f_i(a_i) - f_i(b_i)|$$

kaikilla pisteillä a_i, b_i, joilla $g_i(a_i) \to a$ ja $g_i(b_i) \to b$. Nyt nähdään, että g on L-Lipschitz, sillä

$$\begin{aligned} |f_i(a_i) - f_i(b_i)| &\le L d_i(a_i,b_i) \\ &\le L\left(\rho\big(g_i(a_i),g_i(b_i)\big) + \varepsilon_i\right) \\ &\to L\rho(a,b). \end{aligned}$$

$\square$

4 Kvasilineaariset funktiot

4.1 Mittateorian kertausta ja täydennystä

Kutsumme tällä kurssilla ulkomittaa yksinkertaisesti mitaksi. Toisin sanoen, mitta μ (X:ssä) on (joukko)funktio $\mu\colon \mathcal{P}(X) \to [0, +\infty]$ s.e.

(i) $\mu(\emptyset) = 0$,

(ii) $\mu(A) \leq \mu(B)$, jos $A \subset B \subset X$,

(iii)
$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i),$$
jos $A_1, A_2, \ldots \subset X$.

Joukko $E \subset X$ on mitallinen, jos

$$\mu(A) = \mu(A \cap E) + \mu(A \setminus E)$$

kaikilla $A \subset X$. Merkitään X:n mitallisten osajoukkojen joukkoa $\mathcal{M}(X)$:llä, tai lyhyemmin $\mathcal{M}$:llä.

Mitta μ on *säännöllinen,* jos jokaista $A \subset X$ kohti on olemassa $B \in \mathcal{M}$ s.e. $A \subset B$ ja $\mu(A) = \mu(B)$.

Määritelmä 4.2. Metrisen avaruuden X mitta μ on *tuplaava* (tai *kahdentava*), jos on olemassa vakio $C \geq 1$ s.e.
$$0 < \mu(2B) \leq C\mu(B) < \infty$$
kaikilla kuulilla $B = B(x, r)$. Tässä $2B = B(x, 2r)$.

Lemma 4.3. *Jos μ on tuplaava mitta X:ssä ja jokainen avoin kuula on mitallinen, niin X on tuplaava vakiolla, joka riippuu vain μ:n tuplausvakiosta C.*

Tod. HT. □

Määritelmä 4.4. Olkoon X metrinen avaruus ja μ mitta X:ssä. Sanomme, että

(1) μ on *Borel* jos jokainen X:n Borel-joukko on mitallinen,

(2) μ on *Borel-säännöllinen,* jos se on Borel ja jokaista $A \subset X$ kohti on olemassa Borel-joukko $B \subset X$ s.e. $A \subset B$ ja $\mu(A) = \mu(B)$,

(3) μ on *Radon-mitta,* jos se on Borel ja

  (a) $\mu(K) < \infty$ kaikilla kompakteilla joukoilla $K \subset X$,

  (b) $\mu(V) = \sup\{\mu(K) \colon K \subset V \text{ kompakti}\}$ kaikilla avoimilla joukoilla $V \subset X$ ja

  (c) $\mu(A) = \inf\{\mu(V) \colon A \subset V,\ V \text{ avoin}\}$ kaikilla $A \subset X$.

Jatkossa μ on aina Radon-mitta X:ssä, ellei toisin sanota.

Lause 4.5. *Jos X täydellinen tuplaava metrinen avaruus, niin X:ssä on olemassa tuplaava Radon-mitta μ. Lisäksi μ:n tuplausvakio riippuu vain X:n tuplausvakiosta.*

Emme todista tätä lausetta. Kompakteille avaruuksille sen todistivat Vol'berg ja Konyagin [*On measures with the doubling condition*, Math. USSR-Izv. 30 (1988), 629–638]. Luukkainen ja Saksman yleistivät sen täydellisille avaruuksille [*Every complete doubling metric space carries a doubling measure*, Proc. Amer. Math. Soc. 126 (1998), 531–534].

Lemma 4.6. *Olkoon (X,d) tuplaava metrinen avaruus vakiolla C, $x_0 \in X$ ja $s > 0$. Silloin on olemassa äärellisen monta s-säteistä kuulaa $B_1,\dots,B_N$ s.e. $B(x_0,1) \subset \cup_i B_i$ ja jokainen yhdisteen $\cup_i B_i$ piste kuuluu korkeintaan M:ään kuulaan B_j, missä vakio $M \in \mathbb{N}$ riippuu vain tuplausvakiosta C ja N:llä on vain C:stä ja s:stä riippuva yläraja.*

Tod. HT [*Huom.* Todistuksessa ei tarvita mittoja.]

4.7 Kvasilineaariset funktiot, äärellisulotteisuus

(Lähdemateriaali: [K1].)

Jos X on metrinen avaruus ja $f\colon X \to \mathbb{R}$, niin f:n *variaatio pisteessä x säteellä $r > 0$* on

$$\operatorname*{var}_{(x,r)} f = \sup_{y\in B(x,r)} |f(x) - f(y)|.$$

Merkitään kaikkien Lipschitz funktioiden $f\colon X \to \mathbb{R}$ joukkoa $\mathrm{LIP}(X)$:llä.

Määritelmä 4.8. Lipschitz-funktiota $f \in \mathrm{LIP}(X)$ sanotaan *K-kvasilineaariseksi* vakiolla $K \geq 1$, jos

$$\mathrm{LIP}\, f \leq K \operatorname*{var}_{(x,r)} f/r$$

kaikilla $x \in X$ ja $r > 0$. Toisin sanoen

$$\sup_{y\in B(x,r)} |f(x) - f(y)| \geq (\mathrm{LIP}\, f/K)r$$

kaikilla $x \in X$ ja $r > 0$.

Huomautus 4.9.
1. Jokainen lineaarinen funktio $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ on 1-kvasilineaarinen.
2. Ei-vakio K-kvasilineaarinen funktio ei voi olla vakio missään avoimessa kuulassa.
3. Jos f on K-kvasilineaarinen ja $\lambda \in \mathbb{R}$, niin myös λf on K-kvasilineaarinen.
4. Jos f on K-kvasilineaarinen metrisessä avaruudessa (X,d), niin f on K-kvasilineaarinen myös metrisessä avaruudessa $(X,\lambda d)$ kaikilla $\lambda > 0$.

Lause 4.10. *Olkoon μ tuplaava mitta X:ssä, $x_0 \in X$, $K \geq 1$, ja olkoon $\mathcal{V} \subset \mathrm{LIP}(X)$ mikä tahansa vektoriavaruus, joka koostuu x_0:ssa häviävistä K-kvasilineaarisista funktioista. Silloin* $\dim \mathcal{V} \leq N$, *missä $N \in \mathbb{N}$ riippuu vain K:sta ja μ:n tuplausvakiosta C.*

Huomautus 4.11. Käyttämällä Lausetta 4.5 voisimme olettaa, että X on täydellinen ja tuplaava.

Tod. Väite seuraa, jos onnistutaan konstruoimaan injektiivinen lineaarinen kuvaus $\phi\colon \mathcal{V} \to \mathbb{R}^N$, missä $N = N(K,C) \in \mathbb{N}$.

Kiinnitetään $s \in (0,1/4]$ ja olkoot $B_1,\dots,B_N$ kuten Lemmassa 4.6. Voidaan olettaa, että $B_i \subset B(x_0,2)$ kaikilla $i = 1,\dots,N$. Määritellään lineaarinen kuvaus $\phi\colon \mathcal{V} \to \mathbb{R}^N$,

$$\phi(f) = \left(\int_{B_1} f\,d\mu,\dots,\int_{B_N} f\,d\mu\right) = \big(\mu(B_1)f_{B_1},\dots,\mu(B_N)f_{B_N}\big).$$

Osoitetaan, että on olemassa $s = s(K, C)$ siten, että

$$\int_{B(x_0,1)} |f|\, d\mu \le 2\sum_{i=1}^{N} \Big| \int_{B_i} f\, d\mu \Big| = 2\sum_{i=1}^{N} |f_{B_i}| \mu(B_i) \tag{4.12}$$

kaikilla $f \in \mathcal{V}$. Tästä seuraa, että ϕ on injektio. Jos nimittäin $\phi(f) = 0$, niin (4.12):sta (ja f:n jatkuvuudesta) seuraa, että $f \equiv 0$ $B(x_0, 1)$:ssa. Koska $f(x_0) = 0$ ja f on K-kvasilineaarinen, on $f \equiv 0$ koko X:ssä (Huom. 4.9.2).

Jos $f \in \mathcal{V}$, niin

$$\sup_{x \in B(x_0,1/2)} |f(x) - \overbrace{f(x_0)}^{=0}| \ge \frac{\operatorname{LIP} f}{K} \cdot \frac{1}{2},$$

joten on olemassa $x \in B(x_0, 1/2)$ s.e. $|f(x)| \ge \operatorname{LIP} f/(3K)$. Nyt kaikilla $y \in B(x, \frac{1}{6K})$ pätee

$$|f(y) - f(x)| \le (\operatorname{LIP} f)|y - x| \le \frac{\operatorname{LIP} f}{6K},$$

joten

$$|f(y)| \ge |f(x)| - \frac{\operatorname{LIP} f}{6K} \ge \frac{\operatorname{LIP} f}{6K}.$$

Näin ollen μ:n tuplaavuudesta seuraa, että

$$\begin{aligned}
\operatorname{LIP} f &\le 6K \fint_{B(x,1/(6K))} |f|\, d\mu \\
&\le \frac{6K}{\mu\big(B(x, \frac{1}{6K})\big)} \int_{B(x_0,1)} |f|\, d\mu \\
&= \frac{6K\mu\big(B(x_0, 1)\big)}{\mu\big(B(x, \frac{1}{6K})\big)} \fint_{B(x_0,1)} |f|\, d\mu \\
&\le \frac{6K\mu\big(B(x, 2)\big)}{\mu\big(B(x, \frac{1}{6K})\big)} \fint_{B(x_0,1)} |f|\, d\mu \\
&\le L \fint_{B(x_0,1)} |f|\, d\mu,
\end{aligned}$$

missä $L = L(C, K)$. Jokaisella $i = 1, \ldots, N$ on olemassa pisteet $y_1, y_2 \in B_i$ s.e. $f(y_1) \ge f_{B_i}$ ja $f(y_2) \le f_{B_i}$. Näin ollen jokaisella $y \in B_i$

$$\begin{aligned}
|f(y) - f_{B_i}| &\le \max\{|f(y) - f(y_1)|, |f(y) - f(y_2)|\} \\
&\le (\operatorname{LIP} f) \max\{|y - y_1|, |y - y_2|\} \\
&\le 2s \operatorname{LIP} f,
\end{aligned}$$

joten

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{N} \int_{B_i} |f - f_{B_i}|\, d\mu &\le \sum_{i=1}^{N} 2s(\operatorname{LIP} f)\mu(B_i) \\
&\le 2sMC(\operatorname{LIP} f)\mu\big(B(x_0, 1)\big) \\
&\le 2sMCL \int_{B(x_0,1)} |f|\, d\mu.
\end{aligned}$$

Valitsemalla $s = 1/(4MCL)$ saadaan

$$\begin{aligned}\int_{B(x_0,1)} |f|\,d\mu &\le \sum_{i=1}^{N} \int_{B_i} |f|\,d\mu \\ &\le \sum_{i=1}^{N} \int_{B_i} (|f - f_{B_i}| + |f_{B_i}|)\,d\mu \\ &\le \sum_{i=1}^{N} \int_{B_i} |f - f_{B_i}|\,d\mu + \sum_{i=1}^{N} |f_{B_i}|\mu(B_i) \\ &\le \frac{1}{2} \int_{B(x_0,1)} |f|\,d\mu + \sum_{i=1}^{N} |f_{B_i}|\mu(B_i),\end{aligned}$$

josta seuraa (4.12) ja siten lauseen väite. □

4.13 Tangenttifunktioiden kvasilineaarisuus

Johdetaan seuraavaksi arvioita (Lipschitz-funktioiden) tangenttifunktioiden Lipschitz-vakiolle ja variaatiolle.

Lause 4.14. *Olkoon (X, d) metrinen avaruus, μ tuplaava Radon-mitta X:ssä ja $f \in \mathrm{LIP}(X)$. Tällöin m.k. $x \in X$ on olemassa jono (r_i), $r_i \to 0$, siten, että jokainen (r_i):n (jonkin) osajonon määräämä tangenttifunktiopaketti $(X_\infty, d_\infty, x_\infty, f_\infty) \in T(X, d, x, f)$ toteuttaa ehdot*

$$f_\infty(x_\infty) = 0$$

ja

$$\operatorname{lip} f(x) \le \operatorname*{var}_{(y,s)} f_\infty/s \le \mathrm{LIP}\, f_\infty \le \operatorname{Lip} f(x) \tag{4.15}$$

kaikilla $y \in X_\infty$, $s > 0$.

Todistusta varten tarvitsemme useita lemmoja.

Lemma 4.16. *Olkoon μ tuplaava Radon-mitta X:ssä, $A \subset X$ mitallinen ja (r_i) jono s.e. $r_i \to 0$. Silloin m.k. $x \in A$ ja jokaisella $\varepsilon > 0$ on olemassa $i_{x,\varepsilon} \in \mathbb{N}$ s.e.*

$$\mu(B(y, \varepsilon r_i) \cap A) > 0,$$

kun $i \ge i_{x,\varepsilon}$ ja $y \in B(x, r_i)$.

Tod. Voidaan olettaa, että $\mu(A) > 0$, sillä muussa tapauksessa mikä tahansa väite pätee m.k. A:ssa. Koska μ on tuplaava mitta, niin Reaalianalyysi I:ssä todistettu Lebesguen differentioituvuuslause pätee μ:lle (todistus vaatii vain pieniä muutoksia (HT)). Erityisesti

$$\lim_{r \to 0} \fint_{B(x,r)} \chi_A(y)\,d\mu(y) = 1 \quad \text{m.k. } x \in A,$$

eli melkein jokainen A:n piste on A:n tiheyspiste. Kiinnitetään A:n tiheyspiste $x \in A$, jono (r_i), $r_i \to 0$, ja $\varepsilon > 0$. Jos $y \in B(x, r_i)$, niin

$$\mu\big(B(x, (1+\varepsilon)r_i)\big) \le \mu\big(B(y, 2(1+\varepsilon)r_i)\big) \le c\,\mu\big(B(y, \varepsilon r_i)\big),$$

missä vakio c riippuu vain ε:sta ja μ:n tuplausvakiosta. Tällöin

$$
\begin{aligned}
0 \le \fint_{B(y,\varepsilon r_i)} \big(1-\chi_A(z)\big)\,d\mu(z) &\le \frac{\mu\big(B(x,(1+\varepsilon)r_i)\big)}{\mu\big(B(y,\varepsilon r_i)\big)} \fint_{B(x,(1+\varepsilon)r_i)} |1-\chi_A(z)|\,d\mu(z) \\
&\le c \fint_{B(x,(1+\varepsilon)r_i)} |1-\chi_A(z)|\,d\mu(z) \\
&\to 0.
\end{aligned}
$$

Erityisesti kaikilla $y \in B(x, r_i)$

$$1 - \frac{\mu(B(y,\varepsilon r_i)\cap A)}{\mu(B(y,\varepsilon r_i))} \le \frac{1}{2},$$

kun $i \ge i_{x,\varepsilon}$, jolloin

$$\mu(B(y,\varepsilon r_i)\cap A) \ge \frac{1}{2}\mu\big(B(y,\varepsilon r_i)\big) > 0.$$

$\square$

Merkitään

$$\ell_r f(x) = \inf_{0<s<r} \sup_{y\in B(x,s)} \frac{|f(x)-f(y)|}{s},$$

ja

$$L_r f(x) = \sup_{0<s<r} \sup_{y\in B(x,s)} \frac{|f(x)-f(y)|}{s},$$

kun $r > 0$ ja $f\colon X \to \mathbb{R}$.

Lemma 4.17. *Olkoon μ tuplaava Radon-mitta X:ssä ja $f \in \mathrm{LIP}(X)$. Silloin melkein jokaista $x \in X$ kohti on olemassa μ-mitallinen joukko $A \subset X$, $x \in A$, ja jono (r_i), $r_i \to 0$, joille pätee:*

(1) $\operatorname{lip} f$ *ja* $\operatorname{Lip} f$ *ovat jatkuvia A:ssa ja*

$$\lim_{r\to 0} \ell_r f(a) = \operatorname{lip} f(a) \quad \textit{ja} \quad \lim_{r\to 0} L_r f(a) = \operatorname{Lip} f(a) \tag{4.18}$$

tasaisesti A:ssa ja

(2) jokaista $R > 0$ ja $\varepsilon > 0$ kohti on olemassa $i_0 \in \mathbb{N}$ s.e.

$$B(y,\varepsilon r_i)\cap A \ne \emptyset,$$

jos $i \ge i_0$ ja $y \in B(x, Rr_i)$.

Tod. Riittää osoittaa, että jokaisella $x_0 \in X$, $S > 0$ ja $\delta > 0$ on olemassa μ-mitallinen $A \subset B(x_0,S)$ s.e. $\mu(B(x_0,S)\setminus A) \le \delta$ ja että lemman ehdot (1) ja (2) pätevät kaikilla $x \in A$. [Perustellaan tämä tekemällä vastaoletus, että on olemassa positiivimittainen joukko B, jonka missään pisteessä lemman väitteet (1) ja (2) eivät toteudu. Silloin ensinnäkin $\mu(B \cap B(x_0,S)) > 0$ jollakin $x_0 \in X$ ja $S > 0$. Jos nyt $\forall\delta > 0$ on olemassa sellainen $A \subset B(x_0,S)$, että $\mu(B(x_0,S)\setminus A) \le \delta$ ja lemman ehdot (1) ja (2) pätevät kaikilla $x \in A$, niin on oltava $B \cap B(x_0,S) \subset B(x_0,S)\setminus A$. Siis $\mu(B\cap B(x_0,S)) \le \mu(B(x_0,S)\setminus A) \le \delta$, joka saadaan miten pieneksi tahansa. Tämä johtaa ristiriitaan.]

Lemman 2.12 nojalla $\operatorname{lip} f$ ja $\operatorname{Lip} f$ ovat mitallisia ja raja-arvot (4.18) ovat olemassa m.k. X:ssä. Lusinin ja Egorovin lauseista (ks. Reaalianalyysi I [Ho2, L. 2.6, 2.9]) seuraa, että on olemassa suljettu joukko $F \subset B(x_0, S)$ s.e.

$$\mu(B(x_0, S) \setminus F) < \delta$$

s.e. $\operatorname{lip} f$ ja $\operatorname{Lip} f$ ovat jatkuvia F:ssä ja $\ell_r f \to \operatorname{lip} f$ ja $L_r f \to \operatorname{Lip} f$ tasaisesti F:ssä.

Olkoon (s_i) jono s.e. $s_i \to 0$. Lemman 4.16 nojalla on olemassa sellainen mitallinen joukko $A \subset F$, $\mu(A) = \mu(F)$, että jokaisella $x \in A$ ja $j \in \mathbb{N}$ on olemassa $i_j \in \mathbb{N}$ s.e.

$$B(y, s_i/j) \cap A \neq \emptyset,$$

kun $i \geq i_j$ ja $y \in B(x, s_i)$. Kiinnitetään $x \in A$. Merkitään $n_j = i_{j^2}$ ja $r_j = s_{n_j}/j$ ja osoitetaan, että ehto (2) pätee x:lle, A:lle ja jonolle (r_j). Nyt

$$jr_j = s_{i_{j^2}} \quad \text{ja} \quad r_j/j = s_{i_{j^2}}/j^2,$$

joten

$$B(y, r_j/j) \cap A = B(y, s_{i_{j^2}}/j^2) \cap A \neq \emptyset,$$

kun $y \in B(x, jr_j) = B(x, s_{i_{j^2}})$. Olkoot $R > 0$ ja $\varepsilon > 0$ annettu. Valitaan $i_0 \in \mathbb{N}$ s.e. $i_0 \geq \max\{R, 1/\varepsilon\} + 1$. Silloin kaikilla $i \geq i_0$ $B(x, Rr_i) \subset B(x, ir_i)$ ja $B(y, r_i/i) \cap A \subset B(y, \varepsilon r_i) \cap A$, joten $B(y, \varepsilon r_i) \cap A \neq \emptyset$, kun $y \in B(x, Rr_i)$. □

Olkoon $f \in \mathrm{LIP}(X)$ ja oletetaan, että Lemman 4.17 ehdot pätevät pisteelle $x \in X$, osajoukolle $A \subset X$, $x \in A$, ja jonolle (r_i). Olkoon

$$(X_\infty, d_\infty, x_\infty, f_\infty) \in T(X, d, x, f)$$

jonkin (r_i):n osajonon määräämä tangenttifunktiopaketti. (Tällaisia on olemassa Lauseen 3.82 nojalla.) Merkitään osajonoa edelleen (r_i):llä, jolloin

$$(X_i, d_i, x_i, f_i) := (U, d/r_i, x, f_i)$$

suppenee kohti $(X_\infty, d_\infty, x_\infty, f_\infty)$:tä. Tässä $U \subset X$ on jokin x:n ympäristö ja

$$f_i(y) = \frac{f(y) - f(x)}{r_i}.$$

Haluamme osoittaa, että Lauseen 4.14 väitteet pätevät f_∞:lle. Koska $f_i(x_i) = 0$ $\forall i \in \mathbb{N}$, on $f_\infty(x_\infty) = 0$. Lisäksi f_∞ on Lipschitz, joten (4.15):n keskimmäinen epäyhtälö pätee. Jäljellä olevien epäyhtälöiden (4.15) osoittamiseksi merkitään $A_i = U \cap A$ ja tulkitaan se metrisen avaruuden (X_i, d_i) osajoukoksi.

Lemma 4.19. *Jokaista $y \in X_\infty$ ja $z \in X_\infty$ kohti on olemassa jonot $y_i \in A_i$, $z_i \in A_i$ ja ε_i-lähi-isometriat*

$$g_i \colon \underbrace{B_{d_i}(x_i, R)}_{\subset X_i} \to \big(g_i B_{d_i}(x_i, R)\big)(\varepsilon_i) \subset X_\infty$$

s.e. $g_i(x_i) = x_\infty$, $y, z \in B(x_\infty, R - \varepsilon_i) \subset \big(g_i B_{d_i}(x_i, R)\big)(\varepsilon_i)$, $\varepsilon_i \to 0$ ja

$$g_i(y_i) \to y \quad \textit{sekä} \quad g_i(z_i) \to z.$$

Tod. Kiinnitetään niin suuri $R > 0$, että $y, z \in B(x_\infty, R/2)$. Olkoot $g_i \colon B_{d_i}(x_i, R) \to \big(g_i B_{d_i}(x_i, R)\big)(\varepsilon_i)$ ε_i-lähi-isometrioita kuten kuvauspakettien suppenemisen määritelmässä. Tällöin on olemassa pisteet $\tilde{y}_i, \tilde{z}_i \in B_{d_i}(x_i, R) \subset X_i$ s.e.

$$d_\infty(g_i(\tilde{y}_i), y) < \varepsilon_i \quad \text{ja} \quad d_\infty(g_i(\tilde{z}_i), z) < \varepsilon_i.$$

Koska $\tilde{y}_i \in B_{d_i}(x_i, R)$, niin $|\tilde{y}_i - x| < Rr_i$. Samoin $|\tilde{z}_i - x| < Rr_i$.

Osoitetaan, että on olemassa pisteet $y_i, z_i \in A_i$ s.e.

$$d_i(y_i, \tilde{y}_i) \to 0 \quad \text{ja} \quad d_i(z_i, \tilde{z}_i) \to 0, \tag{4.20}$$

kun $i \to \infty$. Silloin

$$d_\infty(g_i(y_i), y) \le d_\infty\big(g_i(y_i), g_i(\tilde{y}_i)\big) + d_\infty(g_i(\tilde{y}_i), y) \le d_i(y_i, \tilde{y}_i) + 2\varepsilon_i \to 0, \quad \text{ja}$$
$$d_\infty(g_i(z_i), z) \le d_i(z_i, \tilde{z}_i) + 2\varepsilon_i \to 0,$$

mikä todistaisi väitteen.

Oletetaan, ettei (4.20) ole voimassa millekään jonolle $y_i \in A_i$. Silloin on olemassa jono $i_j \in \mathbb{N}$, $i_j \to \infty$, ja $s > 0$ s.e.

$$\operatorname{dist}_i(\tilde{y}_{i_j}, A_{i_j}) \ge s.$$

Toisin sanoen

$$B_{d_{i_j}}(\tilde{y}_{i_j}, s) \cap A_{i_j} = \emptyset$$

eli

$$B(\tilde{y}_{i_j}, sr_{i_j}) \cap A = \emptyset.$$

Kuitenkin $\tilde{y}_i \in B(x, Rr_i)$, joten Lemman 4.17 ehdon (2) mukaan

$$B(\tilde{y}_i, sr_i) \cap A \ne \emptyset$$

kaikilla tarpeeksi suurillla indekseillä i. Tämä on ristiriita, joten on olemassa jono $y_i \in A_i$ s.e. (4.20) pätee. Samoin on olemassa jono $z_i \in A_i$, jolle (4.20) pätee. □

Osoitetaan seuraavaksi Lauseen 4.14 oikeanpuoleisin arvio.

Lemma 4.21. *Olkoot $f \in \mathrm{LIP}(X)$, $x \in X$ ja f_∞ kuten Lauseessa 4.14. Silloin*

$$\mathrm{LIP}\, f_\infty \le \operatorname{Lip} f(x). \tag{4.22}$$

Tod. Kiinnitetään $\varepsilon > 0$ ja olkoot $y, z \in X_\infty$. Olkoot $y_i, z_i \in A_i$ ja g_i kuten Lemmassa 4.19. Havaitaan, että

$$d(y_i, z_i) = r_i d_i(y_i, z_i) \le \underbrace{r_i}_{\to 0} \underbrace{\big(|g_i(y_i) - g_i(z_i)| + \varepsilon_i\big)}_{\to |y-z|} \to 0.$$

Koska $d(y_i, z_i) \to 0$ ja Lemman 4.17 mukaan $\lim_{r \to 0} L_r f(a) = \operatorname{Lip} f(a)$ tasaisesti A:ssa, niin on olemassa $i_1 \in \mathbb{N}$ s.e.

$$\frac{|f(y_i) - f(z_i)|}{d(y_i, z_i)} \le \operatorname{Lip} f(y_i) + \varepsilon \quad \forall i \ge i_1.$$

Koska

$$f_i(\cdot) = \big(f(\cdot) - f(x)\big)/r_i$$

ja $d_i = d/r_i$, niin

$$\frac{|f_i(y_i) - f_i(z_i)|}{d_i(y_i, z_i)} \le \operatorname{Lip} f(y_i) + \varepsilon \quad \forall i \ge i_1.$$

Samoin kuin yllä päätellään, että $d(x, y_i) \to 0$. Lemman 4.17 nojalla $\operatorname{Lip} f$ on jatkuva A:ssa, joten on olemassa $i_2 \in \mathbb{N}$ s.e.

$$\operatorname{Lip} f(y_i) \leq \operatorname{Lip} f(x) + \varepsilon.$$

Näin ollen kaikilla $i \geq \max\{i_1, i_2\}$

$$\frac{|f_i(y_i) - f_i(z_i)|}{d_i(y_i, z_i)} \leq \operatorname{Lip} f(x) + 2\varepsilon.$$

Koska

$$\lim_{i\to\infty} |f_i(y_i) - f_i(z_i)| = |f_\infty(y) - f_\infty(z)|$$

ja

$$\lim_{i\to\infty} d_i(y_i, z_i) = d_\infty(y, z),$$

niin

$$\frac{|f_\infty(y) - f_\infty(z)|}{d_\infty(y, z)} \leq \operatorname{Lip} f(x) + 2\varepsilon.$$

Tämä pätee kaikilla $y, z \in X_\infty$ ja $\varepsilon > 0$, joten (4.22) pätee. □

Lemma 4.23. *Olkoot $f \in \mathrm{LIP}(X)$, $x \in X$ ja f_∞ kuten Lauseessa 4.14. Jos $y \in X_\infty$ ja $s > 0$, niin*

$$\operatorname*{var}_{(y,s)} f_\infty \geq s \operatorname{lip} f(x).$$

Tod. Olkoon $y \in X_\infty$, $s > 0$ ja $\varepsilon > 0$. Olkoot lisäksi $y_i \in A_i$ ja g_i kuten Lemmassa 4.19. Lemman 4.17 mukaan $\lim_{r\to 0} \ell_r f(a) = \operatorname{lip} f(a)$ tasaisesti A:ssa, joten on olemassa $s_0 > 0$ s.e.

$$\ell_{s_0} f(y_i) = \inf_{0<t<s_0} \sup_{z\in B(y_i,t)} \frac{|f(y_i) - f(z)|}{t} \geq \operatorname{lip} f(y_i) - \varepsilon$$

kaikilla $i \in \mathbb{N}$. Merkitään $s_i = sr_i$. Valitaan niin suuri $i_1 \in \mathbb{N}$, että $s_i < s_0$ kaikilla $i \geq i_1$. Silloin

$$\sup_{z\in B(y_i,s_i)} \frac{|f(y_i) - f(z)|}{s_i} \geq \operatorname{lip} f(y_i) - \varepsilon.$$

Näin ollen jokaisella $i \geq i_1$ on olemassa $\tilde{z}_i \in B(y_i, s_i) = B_{d_i}(y_i, s)$ s.e.

$$\frac{|f(y_i) - f(\tilde{z}_i)|}{s_i} \geq \operatorname{lip} f(y_i) - 2\varepsilon.$$

Lemman 4.21 todistuksessa todettiin, että $d(y_i, x) \to 0$. Lisäksi $\operatorname{lip} f$ on jatkuva A:ssa, joten on olemassa $i_2 \in \mathbb{N}$ s.e. $\operatorname{lip} f(y_i) \geq \operatorname{lip} f(x) - \varepsilon$, kun $i \geq i_2$. Tällöin kaikilla $i \geq \max\{i_1, i_2\}$

$$\frac{|f(y_i) - f(\tilde{z}_i)|}{s_i} \geq \operatorname{lip} f(x) - 3\varepsilon$$

eli

$$\frac{|f_i(y_i) - f_i(\tilde{z}_i)|}{s} \geq \operatorname{lip} f(x) - 3\varepsilon.$$

Merkitään $z_i = g_i(\tilde{z}_i) \in X_\infty$, jolloin

$$\begin{aligned} |y - z_i| &\leq |y - g_i(y_i)| + |g_i(y_i) - g_i(\tilde{z}_i)| \\ &\leq |y - g_i(y_i)| + d_i(y_i, \tilde{z}_i) + \varepsilon_i \\ &< |y - g_i(y_i)| + s + \varepsilon_i \\ &\to s. \end{aligned}$$

Koska X_∞ on rajoitetusti kompakti (ks. Lause 3.61), niin on olemassa $(\tilde{z}_i)$:n osajono $(\tilde{z}_{i_j})$ ja $z \in X_\infty$ s.e. $z_{i_j} = g_{i_j}(\tilde{z}_{i_j}) \to z$. Koska $\lim_{j\to\infty} d_{i_j}(y_{i_j}, \tilde{z}_{i_j}) = d_\infty(y, z)$, niin $z \in \bar{B}_{d_\infty}(y, s)$. Lisäksi

$$|f_\infty(y) - f_\infty(z)| = \lim_{j\to\infty} |f_{i_j}(y_{i_j}) - f_{i_j}(\tilde{z}_{i_j})|,$$

joten

$$\operatorname*{var}_{(y,s)} f_\infty \geq \frac{|f_\infty(y) - f_\infty(z)|}{s} \geq \operatorname{lip} f(x) - 3\varepsilon.$$

Koska tämä pätee jokaisella $\varepsilon > 0$, on väite todistettu. □

Lause 4.14 on nyt todistettu, sillä keskimmäinen epäyhtälö (4.15):ssa seuraa f_∞:n Lipschitz-ominaisuudesta.

Korollari 4.24. *Olkoon (X, d) metrinen avaruus, μ tuplaava Radon-mitta X:ssä ja $f \in \mathrm{LIP}(X)$. Oletetaan, että on olemassa vakio $K \geq 1$ s.e.*

$$\operatorname{Lip} f(x) \leq K \operatorname{lip} f(x)$$

m.k. $x \in X$. Tällöin m.k. $x \in X$ on olemassa jono (r_i), $r_i \to 0$, siten, että jokainen (r_i):n (jonkin) osajonon määräämä f:n tangenttifunktio x:ssä on K-kvasilineaarinen, ts.

$$\mathrm{LIP}\, f_\infty \leq K \operatorname*{var}_{(x,s)} f_\infty / s.$$

Tod. Väite seuraa oletuksesta $\operatorname{Lip} f(x) \leq K \operatorname{lip} f(x)$ ja (4.15):sta, sillä

$$\mathrm{LIP}\, f_\infty \leq \operatorname{Lip} f(x) \leq K \operatorname{lip} f(x) \leq K \operatorname*{var}_{(x,s)} f_\infty / s.$$

□

5 Vahva mitallinen differentioituva struktuuri

(Lähdemateriaali: [K1].)

5.1 Määritelmä, päätulos ja alkuvalmisteluja

Aloitetaan suoraan määritelmällä. Sitä varten tehdään merkintöjä yksinkertaistavia *sopimuksia.* Jos $h\colon X \to \mathbb{R}$ on (mikä tahansa) funktio ja $x \in X$ on *isoloitu* piste, niin sovitaan, että $\lim_{y\to x} h(y) = 0$. Lisäksi sovitaan, että $\mathbb{R}^0 = \{0\}$.

Määritelmä 5.2. Olkoon (X, d) metrinen avaruus, μ Radon-mitta X:ssä, $\mathcal{C} \subset \mathrm{LIP}(X)$ vektoriavaruus ja $\{(X_\alpha, x_\alpha)\}$ sellainen numeroituva kokoelma *karttoja* (X_α, x_α), että jokaisella α:

(a) $X_\alpha \subset X$ on mitallinen ja $\mu(X_\alpha) > 0$.

(b) x_α on mitallinen kuvaus $x_\alpha\colon X \to \mathbb{R}^{N(\alpha)}$ jollakin $N(\alpha) \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, missä $x_\alpha = \big(x_\alpha^1, \ldots, x_\alpha^{N(\alpha)}\big)$ ja $x_\alpha^i \in \mathcal{C}$ jokaisella $i \in \{1, \ldots, N(\alpha)\}$, kun $N(\alpha) > 0$.

Tällöin $\{(X_\alpha, x_\alpha)\}$ on (X, d, μ):n *vahva mitallinen differentioituva struktuuri $\mathcal{C}$:n suhteen,* jos pätee:

1. $$X = \bigcup_\alpha X_\alpha.$$

2. On olemassa vakio $N < \infty$ s.e. $N(\alpha) \leq N$ jokaisella α.

3. Jokaista funktioita $f \in \mathcal{C}$ ja jokaista karttaa (X_α, x_α) kohti on olemassa (0-mittaista joukkoa vaille) yksikäsitteinen mitallinen kuvaus $d_\alpha f \colon X_\alpha \to \mathbb{R}^{N(\alpha)}$ s.e.

$$\lim_{y \to x} \frac{f(y) - f(x) - d_\alpha f(x) \cdot \big(x_\alpha(y) - x_\alpha(x)\big)}{d(y,x)} = 0$$

melkein kaikilla $x \in X_\alpha$.

Huomautus 5.3. 1. Sanomme, että $\{(X_\alpha, x_\alpha)\}$ on *ei-degeneroitunut,* jos $N(\alpha) > 0$ kaikilla α.

2. Jos $N(\alpha) = 0$, niin $d_\alpha f$ on vakiokuvaus $d_\alpha f \colon X_\alpha \to \{0\}$ ja siten

$$\lim_{y \to x} \frac{f(y) - f(x)}{d(y,x)} = 0$$

melkein kaikilla $x \in X_\alpha$.

3. Pienintä lukua $N \in \mathbb{Z}$, jolla $N(\alpha) \leq N$ jokaisella α, sanotaan vahvan mitallisen differentioituvan struktuurin $\{(X_\alpha, x_\alpha)\}$ *dimensioksi.*

4. Jos $\mathcal{C} = \mathrm{LIP}(X)$, niin se jätetään mainitsematta.

5. Mitallinen differentioituva struktuuri määritellään samoin korvaamalla yllä olevat raja-arvot approksimatiivisilla raja-arvoilla. *Muistutus:* Olkoot X ja Y metrisiä avaruuksia, μ mitta X:ssä ja $f \colon X \to Y$. Silloin piste $y \in Y$ on f:n *approksimatiivinen raja-arvo x:ssä,* jos

$$\lim_{r \to 0} \frac{\mu\big(\{z \in B(x,r) \colon |f(z) - y| > \varepsilon\}\big)}{\mu\big(B(x,r)\big)} = 0$$

kaikilla $\varepsilon > 0$.

Määritelmä 5.4. Metrinen avaruus (X,d) on *kvasikonveksi,* jos on olemassa vakio $C > 0$ s.e. mitkä tahansa pisteet $x, y \in X$ voidaan yhdistää polulla γ, jonka pituus on korkeintaan $C\, d(x,y)$. Toisin sanoen, on olemassa polku $\gamma \colon [a,b] \to X$, $\gamma(a) = x$, $\gamma(b) = y$ ja $\ell(\gamma) \leq C\, d(x,y)$.

Tavoitteena on todistaa seuraava päälause.

Lause 5.5. *Olkoon (X,d) metrinen avaruus ja μ tuplaava Radon-mitta X:ssä. Olkoon $K \geq 1$ ja olkoon $\mathcal{C} \subset \mathrm{LIP}(X)$ vektoriavaruus, jonka jokaiselle funktiolle $f \in \mathcal{C}$ pätee*

$$\mathrm{Lip}\, f(x) \leq K \,\mathrm{lip}\, f(x)$$

melkein kaikilla $x \in X$. Tällöin X:llä on olemassa vahva mitallinen differentioituva struktuuri, $\{(X_\alpha, x_\alpha)\}$, $\mathcal{C}$:n suhteen. Lisäksi $\{(X_\alpha, x_\alpha)\}$:n dimensio on rajoitettu ylhäältä vakiolla, joka riippuu vain K:sta ja μ:n tuplausvakiosta. Jos lisäksi X on kvasikonveksi ja $\mathcal{C} = \mathrm{LIP}(X)$, niin vahva mitallinen differentioituva struktuuri on ei-degeneroitunut.

Todistus vaatii useita lauseita ja lemmoja. Tehdään joitain alkuvalmisteluja.

Olkoon X sellainen metrinen avaruus, että sen mitkä tahansa pisteet x ja y voidaan yhdistää suoristuvalla polulla. Määritellään X:ään *sisäinen metriikka* d_s asettamalla

$$d_s(x,y) = \inf_\gamma \ell(\gamma),$$

missä inf otetaan yli kaikkien x:n ja y:n yhdistävien polkujen. [HT: Tarkista, että syntyy metriikka.]

Lemma 5.6. *Olkoon (X,d) k-kvasikonveksi tuplaava metrinen avaruus, $x \in X$ ja $\rho\colon X \to \mathbb{R}$, $\rho(y) = d_s(x,y)$. Oletetaan, että $X \neq \{x\}$. Silloin*

$$1 \leq \operatorname{lip} \rho(y) \leq k$$

kaikilla $y \in X$.

Tod. Identtinen kuvaus $\mathrm{id}\colon (X,d) \to (X,d_s)$ on k-bilipschitz, sillä (X,d):n k-kvasikonveksisuudesta johtuen

$$d(x,y) \leq d_s(x,y) \leq k\, d(x,y)$$

kaikilla $x,y \in X$. Tästä seuraa, että myös (X,d_s) on tuplaava. Merkitään (X,d_s):n täydellistymää (Z,d_Z):lla. Tällöin (Z,d_Z) on tuplaava, täydellinen ja siten rajoitetusti kompakti, joten se on geodeesinen (HT). Toisin sanoen jokaista $x,y \in X$ kohti on olemassa niitä yhdistävä polku (*geodeesi*), jonka pituus d_Z-metriikassa on $d_Z(x,y)$. Merkitään $\rho(y) = d_Z(x,y)$, kun $y \in Z$.

Olkoon $y \in X \setminus \{x\}$ ja $\gamma\colon [a,b] \to Z$ geodeesi x:stä y:hyn. Olkoon $0 < r < d_Z(x,y)$ ja $0 < \varepsilon < r$. Koska γ on geodeesi, on olemassa piste $z' \in \gamma([a,b])$ s.e. $d_Z(y,z') = r - \varepsilon$ ja

$$d_Z(x,z') + d_Z(z',y) = d_Z(x,y) = \rho(y),$$

jolloin $\rho(y) - \rho(z') = d_Z(z',y) = r - \varepsilon$. Edelleen on olemassa X:n pistejono $z_i \to z'$, sillä $X \subset Z$ on tiheä. Tällöin $\rho(z_i) \to \rho(z')$ ja $d(z_i,y) \leq d_Z(z_i,y) \leq d_Z(z_i,z') + d_Z(z',y) < r$, kun i on riittävän suuri. Siten

$$\sup_{z \in B_{(X,d)}(y,r)} \frac{|\rho(y) - \rho(z)|}{r} \geq \frac{|\rho(y) - \rho(z')|}{r} = \frac{d_Z(z',y)}{r} = 1 - \frac{\varepsilon}{r}$$

kaikilla $0 < \varepsilon < r$. Siis $\operatorname{lip} \rho(y) \geq 1$ kaikilla $y \in X \setminus \{x\}$. Samoin voidaan osoittaa, että $\operatorname{lip} \rho(x) \geq 1$. Toisaalta jokaisella $z \in B_{(X,d)}(y,r)$ pätee kolmioepäyhtälön nojalla

$$|\rho(z) - \rho(y)| = |d_Z(x,z) - d_Z(z,y)| \leq d_Z(y,z) \leq k\, d(y,z) < kr,$$

joten

$$\operatorname{lip} \rho(y) = \liminf_{r \to 0} \left(\sup_{z \in B_{(X,d)}(y,r)} \frac{|\rho(z) - \rho(y)|}{r} \right) \leq k.$$

□

Korollari 5.7. *Olkoon (X,d) k-kvasikonveksi tuplaava metrinen avaruus. Silloin jokainen X:n vahva mitallinen differentioituva struktuuri $\{(X_\alpha, x_\alpha)\}$ $\mathrm{LIP}(X)$:n suhteen on ei-degeneroitunut.*

Tod. Lemman 5.6 mukaan on olemassa Lipschitz-funktio $\rho\colon X \to \mathbb{R}$, jolle $\operatorname{lip} \rho(x) \geq 1$ kaikilla $x \in X$. On siis oltava $N(\alpha) > 0$ kaikilla α (ks. Huomautus 5.3). □

Lemma 5.8 (Lineaarisuus)**.** *Olkoon (X,d,x) ankkuroitu metrinen avaruus ja $f,g \in \mathrm{LIP}(X)$. Oletetaan, että tangenttifunktiopaketit*

$$(X_\infty, d_\infty, x_\infty, f_\infty) \in T(X,d,x,f) \quad \text{ja} \quad (X_\infty, d_\infty, x_\infty, g_\infty) \in T(X,d,x,g)$$

ovat saman jonon (r_i), $r_i \to 0$, määräämiä. Silloin

$$(X_\infty, d_\infty, x_\infty, f_\infty + g_\infty) \in T(X,d,x,f+g)$$

on jonon (r_i) määräämä tangenttifunktiopaketti.

Tod. Seuraa suoraan Määritelmistä 3.71 ja 3.80. □

5.9 Äärellisulotteisuus

Lause 5.10. *Olkoon X metrinen avaruus ja μ tuplaava Radon-mitta X:ssä. Olkoon $f = (f_1, \dots, f_N)$, missä $f_i \in \mathrm{LIP}(X)$ jokaisella $1 \le i \le N$. Oletetaan, että on olemassa vakio $K \ge 1$ s.e. jokaisella $\lambda \in \mathbb{R}^N$*

$$\mathrm{Lip}(\lambda \cdot f)(x) \le K \,\mathrm{lip}(\lambda \cdot f)(x) \tag{5.11}$$

melkein kaikilla $x \in X$. Oletetaan lisäksi, että on olemassa mitallinen joukko $A \subset X$, $\mu(A) > 0$, ja $\delta > 0$ s.e. kaikilla $\lambda \in \mathbb{R}^N$

$$\mathrm{Lip}(\lambda \cdot f)(a) \ge \delta|\lambda| \tag{5.12}$$

melkein kaikilla $a \in A$. Silloin välttämättä $N \le N_0$, missä N_0 riippuu vain K:sta ja μ:n tuplausvakiosta.

Todistusta varten tarvitaan jälleen lemmoja. Oletetaan tässä luvussa koko ajan, että Lauseen 5.10 oletukset ovat voimassa. Merkitään $\mathbb{R}^N$:n standardia kantaa $\{e_i\}_{i=1}^N$:llä ja olkoon $\Lambda = \{\lambda_n\}_{n=1}^\infty$ numeroituva tiheä $\mathbb{R}^N$:n osajoukko, joka sisältää $\{e_i\}_{i=1}^N$:n.

Lemma 5.13. *Melkein kaikilla $a \in A$ on olemassa täydellinen tuplaava ankkuroitu metrinen avaruus $(X_\infty, d_\infty, a_\infty)$, jonka tuplausvakio riippuu vain μ:n tuplausvakiosta, s.e. seuraava pätee: Jokaisella $\lambda \in \Lambda$ on olemassa Lipschitz-funktio $f_\lambda \colon (X_\infty, d_\infty) \to \mathbb{R}$ s.e.*

$$(X_\infty, d_\infty, a_\infty, f_\lambda) \in T(X, d, a, \lambda \cdot f)$$

ja

(a) $f_\lambda(a_\infty) = 0$,

(b) f_λ *on K-kvasilineaarinen,*

(c) $f_\lambda = \lambda \cdot (f_{e_1}, \dots, f_{e_N})$ *ja*

(d) $\mathrm{LIP}\, f_\lambda \ge \delta|\lambda|/K$.

Tod. Melkein kaikilla $a \in A$ olkoon $(r^0_{a,n})_{n=1}^\infty$ jono, jolle Lause 4.14 pätee Lipschitz-funktiolla $e_1 \cdot f = f_1$. Valitaan $(r^0_{a,n})_{n=1}^\infty$:n osajono $(r^1_{a,n})_{n=1}^\infty$, joka määrää (jonkin) tangenttifunktiopaketin

$$(X_a, d_a, a_a, f_{a,e_1}) \in T(X, d, a, e_1 \cdot f).$$

Toistamalla päättely valitaan jokaisella $1 \le i \le N$ $(r^{i-1}_{a,n})_{n=1}^\infty$:n osajono $(r^i_{a,n})_{n=1}^\infty$, joka määrää tangenttifunktiopaketin

$$(X_a, d_a, a_a, f_{a,e_i}) \in T(X, d, a, e_i \cdot f).$$

[Huom. (X_a, d_a, a_a) on sama kaikilla $i \in \{1, \dots, N\}$.] Määritellään

$$f_{a,\lambda} = \lambda \cdot \big(f_{a,e_1}, \dots, f_{a,e_N}\big),$$

kun $\lambda \in \Lambda$. Lemman 5.8 nojalla

$$(X_a, d_a, a_a, f_{a,\lambda}) \in T(X, d, a, \lambda \cdot f)$$

on $(r^N_{a,n})_{n=1}^\infty$:n määräämä.

Todetaan seuraavaksi, että kiinteällä $\lambda \in \Lambda$ ja m.k. $a \in A$ funktio $f_{a,\lambda}$ toteuttaa ehdot (a)–(d). Nimittäin ehdot (a) ja (c) ovat selviä, (b) seuraa Lauseen 5.10 oletuksesta (5.11) ja Korollarista 4.24. Ehto (d) on voimassa, sillä Lauseen 4.14 ja oletuksien (5.11) ja (5.12) mukaan

$$\begin{aligned}\operatorname{LIP} f_\lambda &\geq \operatorname*{var}_{(y,s)} f_\lambda / s \\ &\geq \operatorname{lip}(\lambda \cdot f)(a) \\ &\geq \frac{1}{K} \operatorname{Lip}(\lambda \cdot f) \\ &\geq \delta|\lambda|/K.\end{aligned}$$

Koska Λ on numeroituva, on olemassa mitallinen joukko $F \subset A$, $\mu(F) = \mu(A)$, s.e. jokaisella $\lambda \in \Lambda$ ja jokaisella $a \in F$ funktio $f_{a,\lambda}$ toteuttaa ehdot (a)–(d). Merkitään

$$(X_a, d_a, a_a, f_{a,\lambda}) = (X_\infty, d_\infty, a_\infty, f_\lambda),$$

kun $a \in F$. Tällöin $(X_\infty, d_\infty, a_\infty)$ on täydellinen (voidaan valita täydelliseksi), tuplaava ankkuroitu metrinen avaruus, jonka tuplausvakio riippuu vain μ:n tuplausvakiosta (Lause 3.82). $\square$

Valitaan piste $a \in A$ (huom. $\mu(A) > 0$), jossa Lemman 5.13 johtopäätös pätee. Määritellään

$$f_\lambda = \lambda \cdot (f_{e_1}, \ldots, f_{e_N})$$

kaikilla $\lambda \in \mathbb{R}^N$. Olkoon $\lambda \in \mathbb{R}^N$ ja valitaan jono $\lambda_n \in \Lambda$ s.e. $\lambda_n \to \lambda$. Jokainen $f_{e_i} \colon X_\infty \to \mathbb{R}$ on L-Lipschitz ja $f_{e_i}(a_\infty) = 0$, joten perhe $(f_{e_i})_{i=1}^N$ on lokaalisti tasaisesti rajoitettu. Näin ollen

$$f_{\lambda_n} = \lambda_n \cdot (f_{e_1}, \ldots, f_{e_N}) \to \lambda \cdot (f_{e_1}, \ldots, f_{e_N}) = f_\lambda$$

lokaalisti tasaisesti, kun $n \to \infty$.

Lemma 5.14. *Jos $\lambda_n \in \Lambda$ ja $\lambda_n \to \lambda$, niin*

$$\operatorname{LIP} f_\lambda \leq \liminf_{n\to\infty} \operatorname{LIP} f_{\lambda_n}.$$

Tod. Kiinnitetään $\varepsilon > 0$ ja $x, y \in X_\infty$, $x \neq y$. Koska $f_{\lambda_n} \to f_\lambda$, niin on olemassa $n_0 \in \mathbb{N}$ s.e. kaikilla $n \geq n_0$

$$\begin{aligned}\frac{|f_\lambda(x) - f_\lambda(y)|}{d_\infty(x,y)} &\leq \frac{|f_{\lambda_n}(x) - f_{\lambda_n}(y)|}{d_\infty(x,y)} + \varepsilon \\ &\leq \operatorname{LIP} f_{\lambda_n} + \varepsilon.\end{aligned}$$

$\square$

Lemma 5.15. *Olkoon $\lambda_n \in \Lambda$ ja $\lambda_n \to \lambda$. Jos $y \in X_\infty$ ja $r > 0$, niin*

$$\operatorname*{var}_{(y,r)} f_\lambda \geq \limsup_{n\to\infty} \operatorname*{var}_{(y,r)} f_{\lambda_n}.$$

Tod. Kiinnitetään $y \in X_\infty$, $\varepsilon > 0$ ja $r > 0$. Jokaisella $n \in \mathbb{N}$ on olemassa $x_n \in B_{d_\infty}(y, r)$ s.e.

$$|f_{\lambda_n}(x_n) - f_{\lambda_n}(y)| \geq \operatorname*{var}_{(y,r)} f_{\lambda_n} - \varepsilon.$$

Koska $f_{\lambda_n} \to f_\lambda$ lokaalisti tasaisesti ja X_∞ on rajoitetusti kompakti, on olemassa $n_0 \in \mathbb{N}$ s.e. kaikilla $n \geq n_0$

$$\sup_{x \in B_{d_\infty}(y,r)} |f_\lambda(x) - f_{\lambda_n}(x)| < \varepsilon.$$

Näin ollen

$$\begin{aligned}
\operatorname*{var}_{(y,r)} f_\lambda &\geq |f_\lambda(x_n) - f_\lambda(y)| \\
&\geq |f_{\lambda_n}(x_n) - f_{\lambda_n}(y)| - |f_\lambda(x_n) - f_{\lambda_n}(x_n)| - |f_\lambda(y) - f_{\lambda_n}(y)| \\
&\geq \operatorname*{var}_{(y,r)} f_{\lambda_n} - 3\varepsilon.
\end{aligned}$$

□

Lemma 5.16. *Joukko $\{f_\lambda \colon \lambda \in \mathbb{R}^N\}$ on N-ulotteinen vektoriavaruus, joka koostuu a_∞:ssä häviävistä K-kvasilineaarisista funktioista.*

Tod. Funktioiden f_λ määritelmästä seuraa suoraan, että $\{f_\lambda \colon \lambda \in \mathbb{R}^N\}$ on vektoriavaruus, jonka dimensio on korkeintaan N. Lemman 5.13 (b)-kohdan mukaan jokainen f_{λ_n}, $\lambda_n \in \Lambda$, on K-kvasilineaarinen. Lemmoista 5.14 ja 5.15 seuraa nyt, että kaikilla $y \in X_\infty$ ja $r > 0$ pätee

$$\operatorname{LIP} f_\lambda \leq \liminf_{n\to\infty} \operatorname{LIP} f_{\lambda_n} \leq \liminf_{n\to\infty} K \operatorname*{var}_{(y,r)} f_{\lambda_n}/r \leq K \operatorname*{var}_{(y,r)} f_\lambda/r.$$

Siten jokainen f_λ on K-kvasilineaarinen. Koska $f_{\lambda_n}(a_\infty) = 0$ ja $f_{\lambda_n} \to f_\lambda$, on $f_\lambda(a_\infty) = 0$. Vielä on osoitettava, että $\dim\{f_\lambda \colon \lambda \in \mathbb{R}^N\} = N$. Riittää näyttää, että lineaarinen kuvaus $\lambda \mapsto f_\lambda$ on injektio. Olkoon $\lambda \in \mathbb{R}^N$ sellainen, että $f_\lambda \equiv 0$. Olkoon $\lambda_n \in \Lambda$, $\lambda_n \to \lambda$. Lemman 5.13 (b) ja (d) kohdista saadaan, että

$$K \operatorname*{var}_{(y,r)} f_{\lambda_n}/r \geq \operatorname{LIP} f_{\lambda_n} \geq \delta|\lambda_n|/K$$

kaikilla $n \in \mathbb{N}$. Lemmasta 5.15 seuraa nyt, että

$$\operatorname*{var}_{(y,r)} f_\lambda \geq \limsup_{n\to\infty} \operatorname*{var}_{(y,r)} f_{\lambda_n} \geq r\delta|\lambda|/K^2.$$

On siis oltava $\lambda = 0$, jos $f_\lambda = 0$. Näin ollen $\lambda \mapsto f_\lambda$ on injektio. □

Lauseen 5.10 todistus. Lemman 5.13 mukaan m.k. $a \in A$ on olemassa tangenttikartio $(X_\infty, d_\infty, a_\infty)$, joka on täydellinen ja tuplaava. Lauseesta 4.5 seuraa, että X_∞:ssä on olemassa tuplaava Radon-mitta tuplausvakiolla C, joka riippuu vain μ:n tuplausvakiosta. Lemman 5.16 nojalla $\{f_\lambda \colon \lambda \in \mathbb{R}^N\}$ on N-ulotteinen vektoriavaruus, jonka jokainen alkio on a_∞:ssä häviävä K-kvasilineaarinen funktio. Lauseesta 4.10 seuraa nyt, että $N \leq N_0$, missä vakio N_0 riippuu vain K:sta ja μ:n tuplausvakiosta. □

5.17 Lauseen 5.5 todistus

Kun $x \in X$ ja $f \in \operatorname{LIP}(X)$, niin merkitään lyhyemmin

$$|f|_x = \operatorname{Lip} f(x).$$

On helppo nähdä (HT), että $|\cdot|_x \colon \operatorname{LIP}(X) \to \mathbb{R}$ on pseudonormi, ts. se toteuttaa kolmioepäyhtälön ja $|\lambda f|_x = |\lambda||f|_x$.

Määritelmä 5.18. Olkoon $f = (f_1, \dots, f_N)$, missä $N \in \mathbb{N}$ ja $f_i \in \mathrm{LIP}(X)$ kaikilla $i \in \{1, \dots, N\}$. Merkitään

$$S(f) = \{x \in X \colon |\lambda \cdot f|_x > 0 \ \forall \lambda \in \mathbb{R}^N \setminus \{0\}\}.$$

Lause 5.19. *Olkoon X metrinen avaruus ja μ tuplaava Radon-mitta X:ssä. Olkoon $f = (f_1, \dots, f_N)$, missä $f_i \in \mathrm{LIP}(X)$ jokaisella $1 \le i \le N$. Silloin $S(f)$ on mitallinen joukko. Oletetaan, että on olemassa vakio $K \ge 1$ s.e. jokaisella $\lambda \in \mathbb{R}^N$*

$$\mathrm{Lip}(\lambda \cdot f)(x) \le K \,\mathrm{lip}(\lambda \cdot f)(x)$$

melkein kaikilla $x \in X$. Jos lisäksi $\mu\big(S(f)\big) > 0$, niin $N \le N_0$ jollakin vakiolla $N_0 \in \mathbb{N}$, joka riippuu vain K:sta ja μ:n tuplausvakiosta.

Tod. Osoitetaan ensin, että joukot

$$S(f, \delta) = \{x \in X \colon |\lambda \cdot f|_x \ge \delta |\lambda| \ \forall \lambda \in \mathbb{R}^N\}$$

ovat mitallisia ja

$$S(f) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} S(f, 1/n).$$

Havaitaan aluksi, että jokaisella $x \in X$ funktio $|(\cdot) \cdot f| \colon \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$, $\lambda \mapsto |\lambda \cdot f|_x$, on jatkuva. Tämä pätee, koska $|\cdot|_x$ on pseudonormi, joten kolmioepäyhtälön nojalla

$$||\lambda_1 \cdot f|_x - |\lambda_2 \cdot f|_x| \le |\lambda_1 \cdot f - \lambda_2 \cdot f|_x \le \sum_{i=1}^{N} |\lambda_{1,i} - \lambda_{2,i}||f|_x,$$

jokaisella $\lambda_j = (\lambda_{j,1}, \dots, \lambda_{j,N})$, $j = 1, 2$. Näin ollen

$$S(f) = \{x \in X \colon \min_{|\lambda|=1} |\lambda \cdot f|_x > 0\} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} S(f, 1/n).$$

Olkoon $\Lambda \subset \mathbb{R}^N$ tiheä numeroituva osajoukko. Silloin funktion $\lambda \mapsto |\lambda \cdot f|_x$ jatkuvuudesta seuraa, että

$$S(f, \delta) = \{x \in X \colon |\lambda \cdot f|_x \ge \delta |\lambda| \ \forall \lambda \in \Lambda\} = \bigcap_{\lambda \in \Lambda} \{x \in X \colon |\lambda \cdot f|_x \ge \delta |\lambda|\}.$$

Koska $\lambda \cdot f \in \mathrm{LIP}(X)$, niin Lemman 2.12 nojalla funktio

$$x \mapsto |\lambda \cdot f|_x = \mathrm{Lip}(\lambda \cdot f)(x)$$

on mitallinen. Siten $S(f, \delta)$ on mitallisten joukkojen numeroituvana leikkauksena mitallinen. Olemme osoittaneet, että $S(f)$ on mitallinen.

Jos $\mu\big(S(f)\big) > 0$, niin $\mu\big(S(f, \delta)\big) > 0$ jollakin $\delta > 0$. Tällöin Lauseesta 5.10 seuraa, että $N \le N_0$, missä $N_0 \in \mathbb{N}$ on vakio, joka riippuu vain K:sta ja μ:n tuplausvakiosta. $\square$

Lause 5.20. *Olkoon X metrinen avaruus ja μ tuplaava Radon-mitta X:ssä. Olkoon $K \ge 1$, $\mathcal{C} \subset \mathrm{LIP}(X)$ ja $\mathcal{L} \subset \mathrm{LIP}(X)$ $\mathcal{C}$:n virittämä vektoriavaruus. Oletetaan, että jokaisella $g \in \mathcal{L}$*

$$\mathrm{Lip}\, g(x) \le K \,\mathrm{lip}\, g(x)$$

melkein kaikilla $x \in X$. Olkoon lisäksi $A \subset X$ mitallinen ja $\mu(A) > 0$. Silloin on olemassa *(i) mitallinen joukko $V \subset A$, $\mu(V) > 0$,*

(ii) pelkästään K:sta ja μ:n tuplausvakiosta riippuva vakio $N_0 \in \mathbb{N}$,

(iii) vakio $N \in \{0, 1, \dots, N_0\}$ ja kuvaus $f = (f_1, \dots, f_N)$, missä $f_i \in \mathcal{C} \quad \forall 1 \leq i \leq N$,

joille pätee seuraava:

Jokaista $g \in \mathcal{L}$ kohti on olemassa (0-mittaista joukkoa vaille) yksikäsitteinen mitallinen kuvaus $\lambda\colon V \to \mathbb{R}^N$ s.e.

$$\lim_{y \to x} \frac{g(y) - g(x) - \lambda(x) \cdot \big(f(y) - f(x)\big)}{d(y, x)} = 0 \tag{5.21}$$

melkein kaikilla $x \in V$.

Huomautus 5.22. (HT): Yhtälö (5.21) voidaan kirjoittaa myös muodossa

$$|g(\cdot) - \lambda(x) \cdot f(\cdot)|_x = 0.$$

Ennen Lauseen 5.20 todistamista osoitetaan kuinka siitä seuraa vahvan mitallisen differentioituvan struktuurin olemassaolo. Olkoon $\Gamma \subset \mathcal{P}(X)$ kaikkien μ-mitallisten joukkojen σ-algebra ja $P\colon \Gamma \to \{0, 1\}$ funktio s.e. $P(V) = 1$, jos V on positiivimittainen joukko, jolle Lauseen 5.20 väitteet pätevät. Koska μ on tuplaava mitta, X on σ-äärellinen. Harjoitustehtävä 7/5 nojalla X on numeroituva yhdiste

$$X = Z \cup \bigcup_n V_n,$$

missä $\mu(Z) = 0$ ja joukot V_n ovat erillisiä, positiivimittaisia s.e. $P(V_n) = 1$. Toisin sanoen ne toteuttavat Lauseen 5.20 väitteet. Näin ollen X:llä on vahva mitallinen differentioituva struktuuri.

Lauseen 5.20 todistus. Pilkotaan todistus lemmoiksi. Otetaan käyttöön seuraavat merkinnät. Kun $f = (f_1, \dots, f_n)$, missä $f_i \in \mathcal{C}$ kaikilla $1 \leq i \leq n$, niin merkitään $\#f = n$, jolloin siis $f\colon X \to \mathbb{R}^{\#f}$. Jokaisella mitallisella $V \subset X$ olkoon

$$N(V) = \sup_f \#f,$$

missä supremum otetaan yli kaikkien sellaisten kuvausten $f = (f_1, \dots, f_n)$, $f_i \in \mathcal{C}$, että $V \subset S(f)$. Toisin sanoen,

$$|\lambda \cdot f|_x > 0 \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\},\ \forall x \in V.$$

Jos tällaisia kuvauksia f ei ole olemassa, niin asetetaan $N(V) = 0$. Merkitään myös

$$N = \sup\{N(V)\colon V \subset A \text{ mitallinen}, \mu(V) > 0\}.$$

Lemma 5.23. *Oletetaan, että $N = 0$ ja $g \in \mathcal{L}$. Silloin $|g|_x = 0$ m.k. $x \in A$. Toisin sanoen, $V = A$ toteuttaa Lauseen 5.20 väitteet.*

Tod. Tehdään vastaoletus, että on olemassa $g \in \mathcal{L} \subset \mathrm{LIP}(X)$, jolla $\mathrm{Lip}\, g > 0$ positiivimittaisessa joukossa. Koska $g \in \mathcal{L}$, voidaan kirjoittaa

$$g = \sum_{i=1}^{M} \lambda_i f_i,$$

missä $M \in \mathbb{N}$, $f_i \in \mathcal{C}$ ja $\lambda_i \in \mathbb{R}$ kaikilla $i = \{1, \dots, M\}$. Näin ollen, jollakin $i = \{1, \dots, M\}$, joukko

$$V := \{x \in A\colon |f_i|_x > 0\}$$

on mitallinen ja $\mu(V) > 0$. Koska $V \subset S(f_i)$, niin $N \geq N(V) \geq 1$. $\square$

Oletetaan jatkossa, että $N \neq 0$.

Lemma 5.24. *On olemassa vain K:sta ja μ:n tuplausvakiosta riippuva vakio $N_0 \in \mathbb{N}$ s.e. $N \leq N_0$.*

Tod. Voidaan olettaa, että $N \neq 0$. Olkoon $V \subset A$ mitallinen joukko s.e. $\mu(V) > 0$ ja $N(V) > 0$. Silloin on olemassa $f = (f_1, \dots, f_{\#f})$, $f_i \in \mathcal{C}$, s.e. $V \subset S(f)$. Siten $\mu\big(S(f)\big) > 0$. Lauseen 5.19 nojalla on olemassa vain K:sta ja μ:n tuplausvakiosta riippuva vakio $N_0 \in \mathbb{N}$ s.e. $\#f \leq N_0$. Tämä pätee kaikille yllä olevan kaltaisille V ja f, joten $N \leq N_0$. □

Koska $N \in \{1, \dots, N_0\}$, niin N:n määritelmän mukaan on olemassa mitallinen joukko $V \subset A$, $\mu(V) > 0$, ja $f = (f_1, \dots, f_{\#f})$, $f_i \in \mathcal{C}$, s.e. $V \subset S(f)$ ja $N = N(V) = \#f$. Kiinnitetään tällainen $f\colon X \to \mathbb{R}^N$.

Lemma 5.25. *Jokaista $g \in \mathcal{L}$ kohti on olemassa (0-mittaista joukkoa vaille) yksikäsitteinen kuvaus $\lambda\colon V \to \mathbb{R}^N$ s.e.*

$$|g(\cdot) - \lambda(x) \cdot f(\cdot)|_x = 0 \tag{5.26}$$

m.k. $x \in V$.

Tod. Jos $g \in \mathcal{L}$, niin $g = \sum_{i=1}^{M} \gamma_j g_j$, missä $M \in \mathbb{N}$, $g_j \in \mathcal{C}$ ja $\gamma_j \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Merkitään

$$E_j = \{x \in V : |\gamma_j g_j(\cdot) - \lambda \cdot f(\cdot)|_x > 0 \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}^N\}.$$

Osoitetaan, että $\mu(E_j) = 0$ kaikilla $j \in \{1, \dots, M\}$. Kiinnitetään $j \in \{1, \dots, M\}$ ja osoitetaan ensin, että

$$E_j \subset S(f_{g,j}) \cap V,$$

missä

$$f_{g,j} = (f_1, \dots, f_N, g_j).$$

Toisin sanoen, jos $x \in E_j$, niin

$$|\lambda' \cdot f_{g,j}|_x > 0 \tag{5.27}$$

kaikilla $\lambda' \in \mathbb{R}^{N+1} \setminus \{0\}$. Olkoon $x \in E_j$ ja $\lambda' = (\lambda'_1, \dots, \lambda'_{N+1}) \in \mathbb{R}^{N+1} \setminus \{0\}$. Jos $\lambda'_{N+1} = 0$, niin on oltava $(\lambda'_1, \dots, \lambda'_N) \neq 0$, joten

$$|\lambda' \cdot f_{g,j}|_x = |(\lambda'_1, \dots, \lambda'_N) \cdot f|_x > 0,$$

sillä $x \in V \subset S(f)$. Siten (5.27) pätee. Jos $\lambda'_{N+1} \neq 0$, niin

$$\begin{aligned}
\lambda' \cdot f_{g,j} &= \sum_{i=1}^{N} \lambda'_i f_i + \lambda'_{N+1} g_j \\
&= \frac{\lambda'_{N+1}}{\gamma_j} \left(\sum_{i=1}^{N} \frac{\gamma_j \lambda'_i}{\lambda'_{N+1}} f_i + \gamma_j g_j \right),
\end{aligned}$$

joten

$$|\lambda' \cdot f_{g,j}|_x = \left| \frac{\lambda'_{N+1}}{\gamma_j} \right| \left| \gamma_j g_j - \left(\frac{-\gamma_j \lambda'_1}{\lambda'_{N+1}}, \dots, \frac{-\gamma_j \lambda'_N}{\lambda'_{N+1}} \right) \cdot f \right|_x.$$

Siten (5.27) pätee, sillä $x \in E_j$. Näin ollen $E_j \subset S(f_{g,j}) \cap V$ ja koska $S(f_{g,j}) \cap V$ on mitallinen, niin maksimaalisuusoletuksen, $N(V) = N$, nojalla on oltava $\mu\big(S(f_{g,j}) \cap V\big) = 0$. Siten myös $\mu(E_j) = 0$. Merkitään

$$F = V \setminus \bigcup_{j=1}^{M} E_j,$$

jolloin $\mu(F) = \mu(V)$. Nyt kaikilla $x \in F$ ja $j = 1, \ldots, M$ on olemassa $\lambda_j(x) = (\lambda_{j,1}, \ldots, \lambda_{j,N})(x) \in \mathbb{R}^N$ s.e.

$$|\gamma_j g_j(\cdot) - \lambda_j(x) \cdot f(\cdot)|_x = 0.$$

Silloin kuvaukselle $\lambda = \sum_{j=1}^{M} \lambda_j \colon F \to \mathbb{R}^N$ pätee

$$0 \leq |g(\cdot) - \lambda(x) \cdot f(\cdot)|_x \leq \sum_{j=1}^{M} |\gamma_j g_j(\cdot) - \lambda_j(x) \cdot f(\cdot)|_x = 0$$

kaikilla $x \in F$. Koska $\mu(F) = \mu(V)$, niin kuvauksen λ olemassaoloa koskeva väite pätee (voimme määritellä λ:n miten tahansa 0-mittaisessa joukossa $V \setminus F$).

Vielä on osoitettava yksikäsitteisyys. Oletetaan, että $\lambda_1 \colon V \to \mathbb{R}^N$ ja $\lambda_2 \colon V \to \mathbb{R}^N$ toteuttavat yhtälön (5.26). Tällöin on olemassa mitallinen joukko $U \subset V$ s.e. $\mu(U) = \mu(V)$ ja

$$|(\lambda_1(x) - \lambda_2(x)) \cdot f(\cdot)|_x \leq |g(\cdot) - \lambda_1(x) \cdot f(\cdot)|_x + |g(\cdot) - \lambda_2(x) \cdot f(\cdot)|_x = 0$$

kaikilla $x \in U$. Koska $U \subset V \subset S(f)$, niin on oltava $\lambda_1(x) = \lambda_2(x)$ kaikilla $x \in U$. Siten yksikäsitteisyyttä koskeva väite pätee. $\square$

Lemma 5.28. *Edellä löydetty kuvaus $\lambda \colon V \to \mathbb{R}^N$ on mitallinen.*

Tod. Olkoon $\lambda \colon V \to \mathbb{R}^N$ kuten yllä ja $F \subset V$ joukko, jossa

$$|g(\cdot) - \lambda(x) \cdot f(\cdot)|_x = 0.$$

Osoitetaan, että jokaisen kompaktin joukon $K \subset \mathbb{R}^N$ alkukuva $\lambda^{-1}K$ on mitallinen. Riittää osoittaa, että joukot $\lambda^{-1}K$ ja

$$U = \{x \in V \colon |g(\cdot) - \lambda' \cdot f(\cdot)|_x = 0 \text{ jollakin } \lambda' \in K\}$$

ovat 0-mittaista joukkoa vaille samat ja että U on mitallinen. Olkoon $x \in \lambda^{-1}K$, jolloin $\lambda(x) \in K$. Jos $x \in F$, niin $|g(\cdot) - \lambda(x) \cdot f(\cdot)|_x = 0$ ja siten $x \in U$. Muussa tapauksessa $x \in V \setminus F$, $\mu(V \setminus F) = 0$. Olkoon sitten $x \in U$, jolloin $|g(\cdot) - \lambda' \cdot f(\cdot)|_x = 0$ jollakin $\lambda' \in K$. Jos $\lambda' = \lambda(x)$, niin $\lambda(x) \in K$ eli $x \in \lambda^{-1}K$. Toinen mahdollisuus, eli $\lambda' \neq \lambda(x)$, voi tapahtua Lemman 5.25 yksikäsitteisyysväitteen takia vain 0-mittaisessa joukossa. Vielä on osoitettava, että U on mitallinen. Tätä varten näytetään, että

$$U = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \bigcup_{\lambda' \in \Lambda \cap K} \{x \in V \colon |g(\cdot) - \lambda' \cdot f(\cdot)|_x < 1/n\} =: B, \tag{5.29}$$

missä Λ on numeroituva tiheä K:n osajoukko. Joukko B on mitallinen, koska se on numeroituva leikkaus numeroituvista yhdisteistä mitallisia joukkoja

$$\{x \in V \colon |g(\cdot) - \lambda' \cdot f(\cdot)|_x < 1/n\}.$$

[*Huom.:* Kuvaus $x \mapsto |g(\cdot) - \lambda' \cdot f(\cdot)|_x$ on mitallinen.] Jos $x \in U$, niin kuvauksen $\lambda \mapsto |g(\cdot) - \lambda \cdot f(\cdot)|_x$ jatkuvuudesta ja joukon $\Lambda \subset K$ tiheydestä seuraa, että jokaisella $n \in \mathbb{N}$ on olemassa $\lambda_n \in \Lambda$ s.e. $|g(\cdot) - \lambda_n \cdot f(\cdot)|_x < 1/n$. Näin ollen $x \in B$. Jos $x \in B$, niin on olemassa jono $\lambda_n \in \Lambda \subset K$ s.e. $|g(\cdot) - \lambda_n \cdot f(\cdot)|_x \to 0$. Joukon K kompaktisuuden ja kuvauksen $\lambda \mapsto |g(\cdot) - \lambda \cdot f(\cdot)|_x$ jatkuvuuden perusteella on olemassa osajono λ_{n_k} ja $\lambda' \in K$ s.e. $\lambda_{n_k} \to \lambda$ ja

$$|g(\cdot) - \lambda_{n_k} \cdot f(\cdot)|_x \to |g(\cdot) - \lambda' \cdot f(\cdot)|_x = 0.$$

Siten $x \in U$. $\square$

Olemme todistaneet Lauseen 5.20 ja siten päätuloksen eli Lauseen 5.5, sillä ei-degeneroituvuutta koskeva väite todistettiin jo aiemmin.

6 Tangenttikimppu ja Sobolevin avaruus

(Lähdemateriaali: [K1].)

Tässä luvussa on tarkoitus ”sulkea ympyrä” ja palata takaisin Sobolevin avaruuksiin kuitenkin niin, että ympäröivänä avaruutena on Euklidisen avaruuden sijasta metrinen mitta-avaruus.

6.1 Mitallinen tangenttikimppu

Oletetaan koko ajan, että $\{(X_\alpha, x_\alpha)\}$ on ei-degeneroitunut vahva mitallinen differentioituva struktuuri ($\mathcal{C}$:n suhteen). Tavoitteena on liittää melkein jokaiseen pisteeseen $x \in X$ äärellisulotteinen Banach-avaruus $T_xX = (\mathbb{R}^{N(x)}, \|\cdot\|_x)$, joka on mielekkäällä tavalla yhteensopiva $\{(X_\alpha, x_\alpha)\}$:n kanssa. Haluamme muun muassa, että dimensio $N(x) = N(\alpha)$ melkein kaikilla $x \in X_\alpha$. Ongelmia aiheuttavat pisteet $x \in X_\alpha \cap X_\beta,\ \alpha \neq \beta$. Osoitamme kuitenkin, että $N(\alpha) = N(\beta)$, jos $\mu(X_\alpha \cap X_\beta) > 0$.

Todetaan aluksi, että

$$x^i_\alpha(y) - x^i_\alpha(x) = e_i \cdot \big(x_\alpha(y) - x_\alpha(x)\big),$$

joten $d_\alpha(x^i_\alpha)$:n yksikäsitteisyyden nojalla

$$d_\alpha(x^i_\alpha)(x) = e_i \quad \forall i = 1, \ldots, N(\alpha) \quad \text{ja m.k. } x \in X_\alpha.$$

Tällöin vektorit $d_\alpha(x^i_\alpha)(x),\ i = 1, \ldots, N(\alpha)$, muodostavat $\mathbb{R}^{N(\alpha)}$:n kannan.

Oletetaan, että

$$X_\alpha \cap X_\beta \neq \emptyset.$$

Silloin m.k. $x \in X_\alpha \cap X_\beta$

$$x^j_\beta(y) - x^j_\beta(x) = d_\alpha(x^j_\beta)(x) \cdot \big(x_\alpha(y) - x_\alpha(x)\big) + o\big(|x-y|\big).$$

[Merkitsemme $o(r)$:llä mitä tahansa funktiota, jolla $o(r)/r \to 0$, kun $r \to 0+$.]

Samoin m.k. $x \in X_\alpha \cap X_\beta$

$$\begin{aligned}
x^i_\alpha(y) - x^i_\alpha(x) &= d_\beta(x^i_\alpha)(x) \cdot \big(x_\beta(y) - x_\beta(x)\big) + o\big(|x-y|\big) \\
&= \sum_{j=1}^{N(\beta)} d_\beta(x^i_\alpha)_j(x)\big(x^j_\beta(y) - x^j_\beta(x)\big) + o\big(|x-y|\big) \\
&= \sum_{j=1}^{N(\beta)} d_\beta(x^i_\alpha)_j(x) d_\alpha(x^j_\beta)(x) \cdot \big(x_\alpha(y) - x_\alpha(x)\big) + o\big(|x-y|\big) \\
&= \sum_{j=1}^{N(\beta)} \sum_{k=1}^{N(\alpha)} d_\beta(x^i_\alpha)_j(x) d_\alpha(x^j_\beta)_k(x)\big(x^k_\alpha(y) - x^k_\alpha(x)\big) + o\big(|x-y|\big).
\end{aligned}$$

Merkitään

$$\lambda^i(x) = \big(\lambda^i_1(x), \ldots, \lambda^i_{N(\alpha)}(x)\big),$$

missä

$$\lambda^i_k(x) = \sum_{j=1}^{N(\beta)} d_\beta(x^i_\alpha)_j(x) d_\alpha(x^j_\beta)_k(x) - \delta^i_k.$$

Tällöin m.k. $x \in X_\alpha \cap X_\beta$

$$\lambda^i(x) \cdot \big(x_\alpha(y) - x_\alpha(x)\big) = o\big(|x-y|\big),$$

josta seuraa, että

$$\mathrm{Lip}\big(\lambda^i(x)\cdot x_\alpha(\cdot)\big)(x) = |\lambda^i(x)\cdot x_\alpha(\cdot)|_x = 0.$$

Toisaalta m.k. $x \in X_\alpha$

$$|\lambda\cdot x_\alpha(\cdot)|_x = 0 \iff \lambda = 0,$$

joten $\lambda^i(x) = 0$ m.k. $x \in X_\alpha \cap X_\beta$. Siis

$$\sum_{j=1}^{N(\beta)} d_\beta(x_\alpha^i)_j(x) d_\alpha(x_\beta^j)_k(x) = \delta_k^i \quad \text{m.k. } x \in X_\alpha \cap X_\beta. \tag{6.2}$$

Samoin voidaan näyttää, että

$$\sum_{i=1}^{N(\alpha)} d_\alpha(x_\beta^j)_i(x) d_\beta(x_\alpha^i)_k(x) = \delta_k^j \quad \text{m.k. } x \in X_\alpha \cap X_\beta. \tag{6.3}$$

Määritellään (mitallinen) $N(\alpha)\times N(\beta)$-matriisiarvoinen funktio

$$M_{\alpha\beta}\colon X_\alpha\cap X_\beta \to M(N(\alpha)\times N(\beta),\mathbb{R}),$$

$$\big((M_{\alpha\beta})_j^i\big) = \begin{pmatrix} m_1^1 & m_2^1 & \cdots & m_{N(\beta)}^1 \\ m_1^2 & m_2^2 & \cdots & m_{N(\beta)}^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ m_1^{N(\alpha)} & m_2^{N(\alpha)} & \cdots & m_{N(\beta)}^{N(\alpha)} \end{pmatrix},$$

missä

$$m_j^i(x) = d_\beta(x_\alpha^i)_j(x)$$

m.k. $x \in X_\alpha \cap X_\beta$. Tällöin yhtälöistä (6.2) ja (6.3) seuraa, että

$$M_{\alpha\beta}M_{\beta\alpha} = I_{N(\alpha)} \quad \text{ja} \quad M_{\beta\alpha}M_{\alpha\beta} = I_{N(\beta)} \quad \text{m.k. } X_\alpha\cap X_\beta\text{:ssa.}$$

Erityisesti, jos $\mu(X_\alpha \cap X_\beta) > 0$, niin $N(\alpha) = N(\beta)$ ja $(M_{\alpha\beta})^{-1} = M_{\beta\alpha}$. Lisäksi

$$M_{\alpha\gamma} = M_{\alpha\beta}M_{\beta\gamma}$$

m.k. leikkauksessa $X_\alpha \cap X_\beta \cap X_\gamma$ (HT).

Edellä todistettu dimensioiden yhtäsuuruutta koskeva tulos on syytä esittää lemmana.

Lemma 6.4. *Jos* $\mu(X_\alpha \cap X_\beta) > 0$, *niin* $N(\alpha) = N(\beta)$.

Oletetaan, että $\mu(X_\alpha \cap X_\beta) > 0$, jolloin $N(\alpha) = N(\beta) =: N$. Määritellään

$$\Phi_{\beta\alpha} = (M_{\alpha\beta})^T,$$

jolloin $\Phi_{\beta\alpha}$ on kantojen $\{d_\beta(x_\alpha^i)\}$ ja $\{d_\alpha(x_\alpha^i)\} = \{e_i\}$ välinen kannanvaihtomatriisi m.k. $X_\alpha \cap X_\beta$:ssa. Toisin sanoen, vektori $d_\beta(x_\alpha^i)(x) \in \mathbb{R}^N$ voidaan lausua muodossa

$$d_\beta(x_\alpha^i)(x) = \Phi_{\beta\alpha}(x)\underbrace{d_\alpha(x_\alpha^i)(x)}_{=e_i}$$

m.k. $x \in X_\alpha \cap X_\beta$. Käytetään tätä hyväksi ja esitetään jokaisen funktion $f \in \mathcal{C}$ "gradientti" $d_\beta f(x) \in \mathbb{R}^N$ gradientin $d_\alpha f(x)$ avulla. Melkein kaikilla $x \in X_\alpha \cap X_\beta$ pätee

$$\begin{aligned} f(y) - f(x) &= d_\alpha f(x) \cdot \big(x_\alpha(y) - x_\alpha(x)\big) + o\big(|x-y|\big) \\ &= \sum_{i=1}^N d_\alpha f_i(x)\big(x_\alpha^i(y) - x_\alpha^i(x)\big) + o\big(|x-y|\big) \\ &= \sum_{i=1}^N d_\alpha f_i(x) d_\beta(x_\alpha^i)(x) \cdot \big(x_\beta(y) - x_\beta(x)\big) + o\big(|x-y|\big). \end{aligned}$$

Tästä seuraa, että

$$\begin{aligned} d_\beta f(x) &= \sum_{i=1}^N d_\alpha f_i(x) d_\beta(x_\alpha^i)(x) \\ &= \sum_{i=1}^N d_\alpha f_i(x) \Phi_{\beta\alpha}(x) d_\alpha(x_\alpha^i)(x) \\ &= \Phi_{\beta\alpha}(x) \left(\sum_{i=1}^N d_\alpha f_i(x) d_\alpha(x_\alpha^i)(x) \right) \\ &= \Phi_{\beta\alpha}(x) d_\alpha f(x) \end{aligned}$$

m.k. $x \in X_\alpha \cap X_\beta$.

Matriisit $\Phi_{\alpha\beta}$ toteuttavat (ns. kosyklin) ehdot

$$\begin{array}{ll} \Phi_{\alpha\alpha} = I_N, & \\ (\Phi_{\alpha\beta})^{-1} = \Phi_{\beta\alpha} & \text{m.k. } X_\alpha \cap X_\beta\text{:ssa ja} \\ \Phi_{\alpha\beta}\Phi_{\beta\gamma}\Phi_{\gamma\alpha} = I_N & \text{m.k. } X_\alpha \cap X_\beta \cap X_\gamma\text{:ssa,} \end{array} \tag{6.5}$$

joten voimme määritellä X:n *mitallisen tangenttikimpun* TX käyttäen "tavanomaista" vektorikimppujen konstruointimenetelmää. [Emme käsittele tässä yhteydessä vektorikimppujen yleistä teoriaa.] Jos joukot X_α olisivat erillisiä, niin TX voitaisiin määritellä (pistevieraana yhdisteenä)

$$TX = \bigcup_\alpha \big(X_\alpha \times \mathbb{R}^{N(\alpha)}\big).$$

Yleisessä tapauksessa määritelmä on hieman monimutkaisempi. Olkoon

$$E' = \bigsqcup_\alpha \big(X_\alpha \times \mathbb{R}^{N(\alpha)}\big).$$

Kaikilla pareilla α, β, joilla $\mu(X_\alpha \cap X_\beta) > 0$, määritellään (transitio)kuvaukset

$$\varphi_{\alpha\beta} \colon (X_\alpha \cap X_\beta) \times \mathbb{R}^N \to (X_\alpha \cap X_\beta) \times \mathbb{R}^N,$$

missä $N = N(\alpha) = N(\beta)$, asettamalla

$$\varphi_{\alpha\beta}(x, v) = (x, \Phi_{\alpha\beta}(x)v)$$

Määritellään sitten E':n ekvivalenssirelaatio $\sim$ vaatimuksella, että

$$X_\alpha \times \mathbb{R}^{N(\alpha)} \ni (x, v) \sim (x', v') \in X_\beta \times \mathbb{R}^{N(\beta)},$$

jos ja vain jos

$$\mu(X_\alpha \cap X_\beta) > 0 \quad \text{ja} \quad (x, v) = \varphi_{\alpha\beta}(x', v').$$

[Ehdoista (6.5) seuraa, että tämä on ekvivalenssirelaatio.] Merkitään (tekijäavaruutta)

$$TX = E'/\sim$$

ja kutsutaan sitä *X:n mitalliseksi tangenttikimpuksi* (struktuurin $\{(X_\alpha, x_\alpha)\}$:n suhteen). Sen alkiot ovat siis ekvivalenssiluokkia $[(x, v)]$, missä $x \in X_\alpha$ ja $v \in \mathbb{R}^{N(\alpha)}$ jollakin α. Melkein kaikilla $x \in X$ on olemassa yksikäsitteinen säie (x:n päällä)

$$T_x X = \pi^{-1}(x),$$

missä $\pi \colon TX \to X$ on luonnollinen projektio. Käytetään sen alkioille (ekvivalenssiluokille) merkintöjä $[(x, v)]$, $[v]$ tai pelkästään v. Tällöin $T_x X = \{x\} \times \mathbb{R}^{N(x)}$ m.k. $x \in X$, missä $N(x) = N(\alpha) = N(\beta)$ kaikilla indekseillä α ja β, joilla $x \in X_\alpha \cap X_\beta$ ja $\mu(X_\alpha \cap X_\beta) > 0$ (yhtäsuuruus $\alpha = \beta$ sallitaan). Sanomme, että $T_x X$ on *X:n tangenttiavaruus x:ssä.*[1]

Määritellään seuraavaksi (melkein jokaiseen) tangenttiavaruuteen $T_x X$ normi $\|\cdot\|_x$. Aloitetaan kirjoittamalla

$$v = \sum_{i=1}^{N(\alpha)} v_i d_\alpha(x_\alpha^i),$$

kun $(x, v) \in \{x\} \times \mathbb{R}^{N(\alpha)}$. Määritellään ensin

$$\|v\|_{x,\alpha} = \operatorname{Lip}\Big(\sum_{i=1}^{N(\alpha)} v_i x_\alpha^i(\cdot)\Big)(x) = |v \cdot x_\alpha(\cdot)|_x.$$

Koska m.k. $x \in X_\alpha$

$$|v \cdot x_\alpha(\cdot)|_x = 0 \iff v = 0,$$

niin $\|\cdot\|_{x,\alpha}$ määrittelee normin $\{x\} \times \mathbb{R}^{N(\alpha)}$:aan m.k. $x \in X_\alpha$.

Olkoon sitten $(x, v') \in \{x\} \times \mathbb{R}^{N(\beta)}$ myös ekvivalenssiluokan $[(x, v)]$ edustaja, jolloin

$$v = \Phi_{\alpha\beta}(x)v', \quad \text{eli} \quad v' = \Phi_{\beta\alpha}(x)v.$$

Tutkimme seuraavaksi, onko $\|v'\|_{x,\beta} = \|v\|_{x,\alpha}$, jolloin voisimme (hyvin) määritellä normin $\|\cdot\|_x$ tangenttiavaruuteen $T_x X$ asettamalla

$$\|\,[(x, v)]\,\|_x = \|v\|_{x,\alpha}, \tag{6.6}$$

missä $(x, v) \in \{x\} \times \mathbb{R}^{N(\alpha)}$ on jokin $[(x, v)]$:n edustaja.

Lemma 6.7. *Jos (x, v') ja (x, v) ovat kuten yllä, niin*

$$|v' \cdot x_\beta(\cdot)|_x = |\big(\Phi_{\beta\alpha}(x)v\big) \cdot x_\alpha(\cdot)|_x = |v \cdot x_\alpha(\cdot)|_x. \tag{6.8}$$

[1] Tangenttiavaruuden käsite esiintyi jo muussa yhteydessä (Luvussa 3.77) muistiinpanojen aiemmassa versiossa. Nykyisessä versiossa ko. nimike on muutettu tangenttikartioksi.

Tod. Olkoon $v = (v_1, v_2, \ldots, v_N)$. Koska $v' = \Phi_{\beta\alpha}(x)v$, niin riittää todistaa oikeanpuoleinen yhtälö. Sitä varten lasketaan ensin

$$\Phi_{\beta\alpha}(x)v \cdot x_\beta(\cdot) = v \cdot \big(\Phi_{\beta\alpha}(x)\big)^T x_\beta(\cdot) = v \cdot M_{\alpha\beta}(x)x_\beta(\cdot).$$

Edelleen suoralla laskulla saadaan

$$M_{\alpha\beta}(x)x_\beta(\cdot) = \begin{pmatrix} \sum_j d_\beta(x_\alpha^1)_j(x)x_\beta^j(\cdot) \\ \sum_j d_\beta(x_\alpha^2)_j(x)x_\beta^j(\cdot) \\ \vdots \\ \sum_j d_\beta(x_\alpha^N)_j(x)x_\beta^j(\cdot) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_\beta(x_\alpha^1)(x) \cdot x_\beta(\cdot) \\ d_\beta(x_\alpha^2)(x) \cdot x_\beta(\cdot) \\ \vdots \\ d_\beta(x_\alpha^N)(x) \cdot x_\beta(\cdot) \end{pmatrix}.$$

Näin ollen

$$\begin{aligned} |\big(\Phi_{\beta\alpha}(x)v\big) \cdot x_\alpha(\cdot)|_x &= |v \cdot M_{\alpha\beta}(x)x_\beta(\cdot)|_x \\ &= \Big|\sum_i v_i d_\beta(x_\alpha^i)(x) \cdot x_\beta(\cdot)\Big|_x \\ &= \Big|\sum_i v_i x_\alpha^i(\cdot)\Big|_x \\ &= |v \cdot x_\alpha(\cdot)|_x. \end{aligned}$$

□

Korollari 6.9. *Melkein kaikilla $x \in X$*

$$\| \, [v] \, \|_x := \| \, (x, v) \, \|_{x,\alpha},$$

on hyvin määritelty normi T_xX:ssä. Yllä $(x, v) \in [v]$ ja $x \in X_\alpha$.

Kuvausta $s\colon X \to TX$, jolla $s(x) \in T_xX$ m.k. $x \in X$, sanotaan *TX:n sektioksi* tai *vektorikentäksi*. Merkitään kaikkien niiden joukkoa $\mathcal{T}(X)$:llä. Kun $f \in \mathcal{C}$, niin määritellään vektorikenttä (gradientti) $df\colon X \to TX$ asettamalla

$$df(x) = [d_\alpha f(x)] \in T_xX$$

melkein kaikilla $x \in X_\alpha$. Koska $d_\beta f(x) = \Phi_{\beta\alpha} d_\alpha f(x)$ m.k. $x \in X_\alpha \cap X_\beta$, on $df(x)$ hyvin määritelty. Määritellään lopuksi *derivaatio* $d\colon \mathcal{C} \to \mathcal{T}(X)$ kuvauksena $f \mapsto df$.

Lemma 6.10. *Jos $f \in \mathcal{C}$, niin $\|df(x)\|_x = \operatorname{Lip} f(x)$ m.k. $x \in X$. Lisäksi funktio $x \mapsto \|df(x)\|_x$ on mitallinen.*

Tod. Harjoitustehtävässä 8/5 osoitetaan, että $\|df(x)\|_x = \operatorname{Lip} f(x)$ m.k. $x \in X$. Mitallisuus on näytetty jo Lemmassa 2.12. □

6.11 Sobolev-avaruus

Oletetaan, että $\{(X_\alpha, x_\alpha)\}$ on X:n vahva mitallinen differentioituva struktuuri ($\operatorname{LIP}(X)$:n suhteen). Lemman 6.10 mukaan $x \mapsto \|df(x)\|_x$ on mitallinen, kun $f \in \operatorname{LIP}(X)$. Jokaisella $1 \le p < \infty$ ja $f \in \operatorname{LIP}(X)$ määritellään

$$\|f\|_{1,p} = \|f\|_p + \|df\|_p = \left(\int_X |f(x)|^p \, d\mu(x)\right)^{1/p} + \left(\int_X \|df(x)\|_x^p \, d\mu(x)\right)^{1/p}.$$

Merkitään lisäksi $\mathcal{L}^p(X)$:llä kaikkien p-integroituvien vektorikenttien joukkoa. Toisin sanoen $\omega \in \mathcal{L}^p(X)$, jos $\omega \in \mathcal{T}(X)$, $x \mapsto \|\omega(x)\|_x$ on mitallinen ja

$$\int_X \|\omega(x)\|_x^p \, d\mu(x) < \infty.$$

Määritelmä 6.12. Sobolev-avaruus $H^{1,p}(X)$ on $\mathrm{LIP}(X)$:n täydellistymä normin $\|f\|_{1,p}$ suhteen. Toisin sanoen $H^{1,p}(X)$ koostuu sellaisista pareista (u,ω), $u \in L^p(X)$, $\omega \in \mathcal{L}^p(X)$, joita kohti on olemassa jono funktioita $u_i \in \mathrm{LIP}(X)$ s.e. $u_i \to u$ $L^p(X)$:ssä ja $du_i \to \omega$ $\mathcal{L}^p(X)$:ssä. Vektorikenttää ω kutsutaan *u:n gradientiksi*.

Huomautus 6.13. Ongelmaksi muodostuu jälleen u:n gradientin yksikäsitteisyys. Toisin sanoen, jos on olemassa toinen jono $v_i \in \mathrm{LIP}(X)$ ja vektorikenttä $\tilde{\omega} \in \mathcal{L}^p(X)$ s.e. $v_i \to u$ $L^p(X)$:ssä ja $dv_i \to \tilde{\omega}$ $\mathcal{L}^p(X)$:ssä, niin onko $\omega = \tilde{\omega}$. Euklidisesssa tapauksessa ongelma ratkaistiin heikon gradientin käsitteen kautta. Nyt tällainen osittaisintegrointiin perustuva lähestymistapa ei ole käytettävissä. Palaamme tähän kysymykseen vielä myöhemmin.

Huomautus 6.14. Voidaan osoittaa, että m.k. $x \in X$ normi $\|\cdot\|_x$ on ekvivalentti sisätulosta saatavan normin (merk. $\lfloor\cdot\rfloor_x$) kanssa vain $\{(X_\alpha, x_\alpha)\}$:n dimensiosta riippuvalla vakiolla. Lisäksi $x \mapsto \lfloor df(x)\rfloor_x$ on mitallinen kaikilla $f \in \mathrm{LIP}(X)$. Asiaa voidaan valaista geometrisesti seuraavalla tavalla. Olkoon $|\cdot|$ mikä tahansa normi $\mathbb{R}^n$:ssä ja $\bar{B} = \bar{B}_{|\cdot|}(0,1)$ suljettu yksikkökuula normin $|\cdot|$ suhteen. Silloin $\bar{B}$ on $\mathbb{R}^n$:n suljettu konveksi joukko. Olkoon $D \subset \bar{B}$ Lebesguen-mitaltaan suurin mahdollinen ellipsoidi. Tällöin on olemassa $\mathbb{R}^n$:n sisätulonormi $|\cdot|_0$, jonka metriikassa D on yksikkökuula ("lineaarialgebraa"). Lisäksi $|v| \le |v|_0 \le \sqrt{n}|v|$ $\forall v \in \mathbb{R}^n$.

Muotoillaan edellä ollut lauseeksi, jota emme kuitenkaan todista (papereissa [Ch] ja [K2] on hieman erilainen lähestymistapa).

Lause 6.15. *Olkoon $\{(X_\alpha, x_\alpha)\}$ vahva mitallinen differentioituva struktuuri. Silloin m.k. $x \in X$ on olemassa vain $\{(X_\alpha, x_\alpha)\}$:n dimensiosta riippuva vakio C_0 ja T_xX:n sisätulo $\langle\cdot,\cdot\rangle_x$, jota vastaavalle normille $\lfloor\cdot\rfloor_x$ pätee*

$$\frac{1}{C_0}\lfloor\cdot\rfloor_x \le \|\cdot\|_x \le C_0 \lfloor\cdot\rfloor_x$$

m.k. $x \in X$. Lisäksi funktio $x \mapsto \lfloor df(x)\rfloor_x$ on mitallinen kaikilla $f \in \mathrm{LIP}(X)$.

Erityisesti tästä seuraa, että Sobolevin avaruuden $H^{1,p}(X)$ normi $\|\cdot\|_{1,p}$ on ekvivalentti *aidosti konveksin* normin

$$\|u\|_p + \left(\int_X \lfloor du(x)\rfloor_x^p \, d\mu(x)\right)^{1/p}$$

kanssa ja siten $H^{1,p}(X)$ on *refleksiivinen*. Emme todista yo. väitteitä.

6.16 Poincarén epäyhtälö ja pisteittäiset Lipschitz-vakiot

Oletetaan, että μ on Radon-mitta X:ssä s.e. $0 < \mu\big(B(x,r)\big) < \infty$ kaikilla $x \in X$ ja $r > 0$. Olkoon $1 \le p < \infty$. Sanomme, että $(1,p)$-Poincarén epäyhtälö (vakiolla $L \ge 1$) pätee X:ssä, jos

$$\fint_{B(x,r)} |f(y) - f_{B(x,r)}| \, d\mu(y) \le Lr \left(\fint_{B(x,Lr)} \big(\operatorname{lip} f(y)\big)^p \, d\mu(y)\right)^{1/p} \tag{6.17}$$

kaikilla $x \in X$, $r > 0$ ja $f \in \mathrm{LIP}(X)$.

Lause 6.18. *Olkoon (X,d) metrinen avaruus ja μ tuplaava Radon-mitta X:ssä. Oletetaan, että $(1,p)$-Poincarén epäyhtälö pätee vakiolla L. Silloin on olemassa vain L:stä ja μ:n tuplausvakiosta riippuva vakio K s.e.*

$$\operatorname{Lip} f(x) \le K \operatorname{lip} f(x)$$

m.k. $x \in X$.

Oletetaan koko ajan, että μ on tuplaava Radon-mitta. Poincarén epäyhtälöstä ja Lebesguen differentioituvuslauseesta saadaan, että

$$\limsup_{r\to 0} \frac{1}{r} \fint_{B(x,r)} |f(y) - f_{B(x,r)}|\, d\mu(y) \le \limsup_{r\to 0} L \left(\fint_{B(x,Lr)} (\operatorname{lip} f(y))^p \, d\mu(y) \right)^{1/p} = L \operatorname{lip} f(x)$$

m.k. $x \in X$. Osoitetaan, että on olemassa μ:n tuplausvakiosta riippuva vakio $C > 0$ s.e.

$$\limsup_{r\to 0} \frac{1}{r} \fint_{B(x,r)} |f - f_{B(x,r)}|\, d\mu \ge \frac{1}{C} \operatorname{Lip} f(x) \tag{6.19}$$

m.k. $x \in X$, jolloin Lause 6.18 on todistettu.

Lemma 6.20. *Melkein kaikilla $x \in X$ ja jokaisella $\varepsilon > 0$ on olemassa $y \in X$ s.e. $r := |x-y| < \varepsilon$ ja*

$$\frac{r}{4} \operatorname{Lip} f(x) \le |f_{B(x,r/4)} - f_{B(y,r/4)}|. \tag{6.21}$$

Osoitetaan ensiksi, että Lemmasta 6.20 seuraa (6.19). Olkoon $x \in X$ piste, jossa Lemman 6.20 väitteet pätevät. Kiinnitetään $\varepsilon > 0$ ja valitaan $y \in X$, $r = |x-y| < \varepsilon$, s.e. (6.21) pätee. Kolmioepäyhtälöstä seuraa nyt, että

$$\begin{aligned}
|f_{B(x,r/4)} - f_{B(y,r/4)}| &\le |f_{B(x,r/4)} - f_{B(x,2r)}| + |f_{B(y,r/4)} - f_{B(x,2r)}| \\
&= \Big| \fint_{B(x,r/4)} \big(f - f_{B(x,2r)}\big)\, d\mu \Big| + \Big| \fint_{B(y,r/4)} \big(f - f_{B(x,2r)}\big)\, d\mu \Big| \\
&\le \fint_{B(x,r/4)} |f - f_{B(x,2r)}|\, d\mu + \fint_{B(y,r/4)} |f - f_{B(x,2r)}|\, d\mu \\
&\le C \fint_{B(x,2r)} |f - f_{B(x,2r)}|\, d\mu,
\end{aligned}$$

missä käytettiin myös μ:n tuplausta. Olettamalla, että arvio (6.21) on voimassa, saadaan

$$\frac{r}{4} \operatorname{Lip} f(x) \le C \fint_{B(x,2r)} |f - f_{B(x,2r)}|\, d\mu,$$

josta seuraa edelleen (6.19), sillä $\varepsilon > 0$ oli mikä tahansa.

Lemman 6.20 todistamiseen käytetään seuraavaa tulosta, joka puolestaan voidaan todistaa kuten Lemmat 4.16 ja 4.17.

Lemma 6.22. *Melkein jokaista $x \in X$ kohti on olemassa mitallinen joukko $A \subset X$, $x \in A$, jolle pätee:*

(1) $\operatorname{Lip} f$ *on jatkuva A:ssa ja*

$$\lim_{r \to 0} L_r f(a) = \operatorname{Lip} f(a)$$

tasaisesti A:ssa ja

(2) jokaista $\varepsilon > 0$ kohti on olemassa $r_0 > 0$ s.e.

$$\frac{\mu\big(B(y,r) \cap A\big)}{\mu\big(B(y,r)\big)} > 1 - \varepsilon, \tag{6.23}$$

jos $r \le r_0$ ja $y \in B(x, 4r)$.

Tod. (HT) □

Olkoot x ja A kuten Lemmassa 6.22 ja kiinnitetetään $\varepsilon > 0$. Silloin on olemassa $r_0 > 0$ s.e. (6.23) pätee kaikilla $0 < r \le r_0$ ja $y \in B(x, 4r)$, ja että lisäksi

$$|f(y) - f(z)| \le r\left(\operatorname{Lip} f(z) + \varepsilon\right) \le r\left(\operatorname{Lip} f(x) + 2\varepsilon\right),$$

jos $z \in B(y,r) \cap A$. Näin ollen kaikilla $y \in B(x, 4r)$

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{r} \fint_{B(y,r)} |f(y) - f(z)|\, d\mu(z) \\
&\qquad = \frac{1}{r\mu\big(B(y,r)\big)} \left(\int_{B(y,r)\cap A} |f(y) - f(z)|\, d\mu(z) + \int_{B(y,r)\setminus A} |f(y) - f(z)|\, d\mu(z) \right) \\
&\qquad \le \operatorname{Lip} f(x) + 2\varepsilon + \left(\frac{\mu\big(B(y,r)\setminus A\big)}{\mu\big(B(y,r)\big)} \right) \operatorname{LIP} f \\
&\qquad \le \operatorname{Lip} f(x) + \varepsilon(2 + \operatorname{LIP} f).
\end{aligned}$$

Olkoon sitten $y \in B(x, r_0)$ sellainen piste, että

$$r(\operatorname{Lip} f(x) - \varepsilon) \le |f(y) - f(x)|,$$

missä $r = |x - y|$. Tällöin

$$\begin{aligned}
r(\operatorname{Lip} f(x) - \varepsilon) &\le |f(y) - f(x)| \\
&\le |f(x) - f_{B(x,r/4)}| + |f(y) - f_{B(y,r/4)}| + |f_{B(x,r/4)} - f_{B(y,r/4)}| \\
&\le \fint_{B(x,r/4)} |f(x) - f(z)|\, d\mu(z) + \fint_{B(y,r/4)} |f(y) - f(z)|\, d\mu(z) + |f_{B(x,r/4)} - f_{B(y,r/4)}| \\
&\le 2\frac{r}{4}\big(\operatorname{Lip} f(x) + \varepsilon(2 + \operatorname{LIP} f)\big) + |f_{B(x,r/4)} - f_{B(y,r/4)}|,
\end{aligned}$$

josta seuraa

$$\frac{r}{2} \operatorname{Lip} f(x) - 2r\varepsilon(1 + \operatorname{LIP} f) \le |f_{B(x,r/4)} - f_{B(y,r/4)}|.$$

Valitsemalla

$$0 < \varepsilon \le \frac{\operatorname{Lip} f(x)}{8(1 + \operatorname{LIP} f)}$$

saadaan tästä edelleen (6.21). Lemma 6.20, ja siten Lause 6.18, on todistettu. □

Huomautus 6.24. Jos $\{(X_\alpha, x_\alpha)\}$ on vahva mitallinen differentioituva struktuuri $\mathrm{LIP}(X)$:n suhteen, niin $\|df(y)\|_y = \operatorname{Lip} f(y)$ m.k. $y \in X$. Tämän vuoksi on luonnollisempaa käyttää Poincarén epäyhtälöstä versiota, jossa oikealla puolella integroitavana on $\big(\operatorname{Lip} f(y)\big)^p$. Stephen Keith [K3] on osoittanut, että nämä versiot Poincarén epäyhtälöstä ovat ekvivalentteja, jos X on täydellinen ja μ on tuplaava Radon-mitta X:ssä.

6.25 Poincarén epäyhtälö ja gradientin yksikäsitteisyys

Olkoon $\{(X_\alpha, x_\alpha\}$ vahva mitallinen differentioituva struktuuri $\mathrm{LIP}(X)$:n suhteen. Oletetaan tässä luvussa, että μ on tuplaava Radon-mitta X:ssä ja että Poincarén epäyhtälö pätee (heikommassa) muodossa

$$\fint_{B(x,r)} |f(y) - f_{B(x,r)}|\, d\mu(y) \le Lr \left(\fint_{B(x,Lr)} (\operatorname{Lip} f(y))^p \, d\mu(y) \right)^{1/p} \tag{6.26}$$

kaikilla $f \in \mathrm{LIP}(X)$. Osoitamme, että tällöin Sobolevin avaruuden u gradientti du on yksikäsitteinen. Muistutetaan, että $\operatorname{Lip} f(y) = \|df(y)\|_y$ m.k. $y \in X$. Tarvitsemme todistukseen muutamia lemmoja.

Lemma 6.27. *Olkoon μ tuplaava Radon-mitta X:ssä vakiolla C_μ. Silloin*

$$\frac{\mu\big(B(x,r)\big)}{\mu\big(B(x_0,R)\big)} \ge \frac{1}{C_\mu^2} \left(\frac{r}{R}\right)^{\log_2 C_\mu} \tag{6.28}$$

kaikilla $0 < r < R$ ja kaikilla $x \in \bar{B}(x_0,R) \subset X$.

Tod. Todistus on helppo tuplausehdon iterointi ja se jätetään harjoitustehtäväksi. □
Seuraava lemma mahdollistaa "katkaisutekniikan" käytön.

Lemma 6.29. *Olkoon μ tuplaava Radon-mitta X:ssä ja $f \in \mathrm{LIP}(X)$. Merkitään*

$$A_c = \{x \in X \colon f(x) = c\}, \quad c \in \mathbb{R}.$$

Silloin $\operatorname{Lip} f(x) = 0$ *m.k.* $x \in A_c$.

Tod. Koska μ on tuplaava, niin Lebesguen differentioituvuuslause pätee. Siten melkein jokainen A_c:n piste on A_c:n tiheyspiste. Osoitetaan, että $\operatorname{Lip} f(x_0) = 0$ jokaisessa A_c:n tiheyspisteessä $x_0 \in A_c$, ts. melkein kaikkialla A_c:ssä. Olkoon (x_j) mikä tahansa jono X:n pisteitä, jotka suppenevat kohti x_0:aa. Riittää näyttää, että

$$\lim_{j\to\infty} \frac{|f(x_j) - f(x_0)|}{|x_j - x_0|} = 0.$$

Olkoon

$$s_j = \inf\{s > 0 \colon B(x_j, s) \cap A_c \ne \emptyset\},$$

jolloin $0 \le s_j \le r_j := |x_j - x_0|$. Lisäksi

$$B(x_j, s_j) \subset B(x_0, 2r_j) \setminus A_c.$$

Koska x_0 on A_c:n tiheyspiste, niin epäyhtälöstä (6.28) seuraa, että

$$0 \le c \left(\frac{s_j}{2r_j}\right)^\kappa \le \frac{\mu\big(B(x_j, s_j)\big)}{\mu\big(B(x_0, 2r_j)\big)} \le \frac{\mu\big(B(x_0, 2r_j) \setminus A_c\big)}{\mu\big(B(x_0, 2r_j)\big)} \to 0,$$

kun $j \to \infty$. Erityisesti $s_j/r_j \to 0$. Jos $\varepsilon > 0$ on mielivaltainen, niin jokaisella j on olemassa $y_j \in B(x_j, s_j + \varepsilon) \cap A_c$. Tällöin

$$\frac{|f(x_j) - \overbrace{f(x_0)}^{=c}|}{|x_j - x_0|} = \frac{|f(x_j) - \overbrace{f(y_j)}^{=c}|}{r_j} \leq \frac{(\mathrm{LIP}\, f)|s_j + \varepsilon|}{r_j}$$

kaikilla $\varepsilon > 0$. Siten

$$\frac{|f(x_j) - f(x_0)|}{|x_j - x_0|} \leq (\mathrm{LIP}\, f)\frac{s_j}{r_j} \to 0. \quad \square$$

Lemma 6.30. *Olkoon μ tuplaava Radon-mitta X:ssä vakiolla C_μ. Oletetaan, että Poincarén epäyhtälö* (6.26) *pätee funktiolle $f \in \mathrm{LIP}(X)$. Silloin on olemassa vain C_μ:stä ja L:stä riippuva vakio C s.e.*

$$|f(x) - f(y)| \leq C|x - y| \Big(\big[M(\mathrm{Lip}\, f)^p(x)\big]^{1/p} + \big[M(\mathrm{Lip}\, f)^p(y)\big]^{1/p} \Big) \tag{6.31}$$

kaikilla $x, y \in X$. Tässä $M(\mathrm{Lip}\, f)^p$ on funktion $(\mathrm{Lip}\, f)^p$ Hardy-Littlewood maksimaalifunktio.

Tod. Olkoot $x, y \in X$, $x \neq y$. Kun $i \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, niin merkitään $r_i = 2^{-i}|x - y|$ ja $B_i(x) = B(x, r_i)$. Koska f on jatkuva, niin jokainen X:n piste on f:n Lebesguen piste, joten

$$f_{B_i(x)} \to f(x).$$

[Seuraavassa vakion c arvo voi muuttua riviltä toiselle siirryttäessä.]
Käyttämällä kolmioepäyhtälöä, μ:n tuplausehtoa ja Poincarén epäyhtälöä saadaan, että

$$\begin{aligned}
|f(x) - f_{B_0(x)}| &\leq \sum_{i=0}^{\infty} |f_{B_i(x)} - f_{B_{i+1}(x)}| \\
&\leq \sum_{i=0}^{\infty} \fint_{B_{i+1}(x)} |f - f_{B_i(x)}|\, d\mu \\
&\leq c \sum_{i=0}^{\infty} \fint_{B_i(x)} |f - f_{B_i(x)}|\, d\mu \\
&\leq c \sum_{i=0}^{\infty} r_i \left(\fint_{B(x, L r_i)} (\mathrm{Lip}\, f)^p \, d\mu \right)^{1/p} \\
&\leq c \sum_{i=0}^{\infty} r_i \big[M(\mathrm{Lip}\, f)^p(x)\big]^{1/p} \\
&= c|x - y| \big[M(\mathrm{Lip}\, f)^p(x)\big]^{1/p}.
\end{aligned}$$

Samoin

$$|f(x) - f_{B_0(y)}| \leq c|x - y| \big[M(\mathrm{Lip}\, f)^p(y)\big]^{1/p}.$$

Lisäksi

$$
\begin{aligned}
|f_{B_0(x)} - f_{B_0(y)}| &\le |f_{B_0(x)} - f_{B(x,2r_0)}| + |f_{B_0(y)} - f_{B(x,2r_0)}| \\
&\le c \fint_{B(x,2r_0)} |f - f_{B(x,2r_0)}|\, d\mu \\
&\le c r_0 \Bigg(\fint_{B(x,2Lr_0)} (\operatorname{Lip} f)^p \, d\mu \Bigg)^{1/p} \\
&\le c|x-y| \big[M(\operatorname{Lip} f)^p(x) \big]^{1/p}.
\end{aligned}
$$

Yhdistämällä ylläolevat kolme arviota saadaan väite. □

Lause 6.32. *Olkoon μ on tuplaava Radon-mitta X:ssä ja $\{(X_\alpha, x_\alpha\}$ vahva mitallinen differentioituva struktuuri* $\mathrm{LIP}(X)$*:n suhteen. Oletetaan, että Poincarén epäyhtälö* (6.26) *pätee kaikilla* $f \in \mathrm{LIP}(X)$*. Tällöin jokaisen funktion $u \in H^{1,p}(X)$ Sobolev-gradientti du on yksikäsitteinen.*

Tod. Olkoon $u_i \in \mathrm{LIP}(X)$ jono Lipschitz-funktioita ja $w \in \mathcal{L}^p(X)$ vektorikenttä s.e. $u_i \to 0$ avaruudessa $L^p(X)$ ja $du_i \to w$ avaruudessa $\mathcal{L}^p(X)$. Gradientin yksikäsitteisyyttä varten riittää osoittaa, että $w(x) = 0$ m.k. $x \in X$. Siirtymällä tarvittaessa osajonoon voidaan olettaa, että

$$
\int_X \left(|u_{i+1} - u_i|^p + \|du_{i+1} - du_i\|^p \right) d\mu \le 10^{-ip}. \tag{6.33}
$$

Tästä seuraa, että $u_i(x) \to 0$ ja $du_i(x) \to w(x)$ m.k. $x \in X$ (ks. Reaalianalyysi I). Merkitään $v_i = u_{i+1} - u_i$. Poincarén epäyhtälön ja Lemman 6.30 nojalla

$$
|(u_{i+1} - u_i)(x) - (u_{i+1} - u_i)(y)| \le C|x-y| \Big(\big(M\|dv_i\|^p(x)\big)^{1/p} + \big(M\|dv_i\|^p(y)\big)^{1/p} \Big)
$$

kaikilla $x, y \in X$. Siten kaikilla $\ell \ge k \ge k_0$ ja $x, y \in X$ pätee

$$
|(u_\ell - u_k)(x) - (u_\ell - u_k)(y)| \le C|x-y| \big(g_{k_0}(x) + g_{k_0}(y) \big),
$$

missä

$$
g_{k_0}(x) = \sum_{i=k_0}^{\infty} \big(M\|dv_i\|^p(x) \big)^{1/p}.
$$

Antamalla $\ell \to \infty$ saadaan

$$
|u_k(x) - u_k(y)| \le C|x-y| \big(g_{k_0}(x) + g_{k_0}(y) \big) \tag{6.34}
$$

kaikilla $k \ge k_0$ ja m.k. $x, y \in X$. Kun $t > 0$, niin merkitään

$$
E_{k_0,t} = \{ x \in X : g_{k_0}(x) > t \}
$$

ja havaitaan, että

$$
E_{k_0,t} \subset \bigcup_{i=k_0}^{\infty} \{ x \in X : \big(M\|dv_i\|^p(x) \big)^{1/p} > \frac{t}{2^{i-k_0+1}} \}.
$$

Käyttämällä Hardy-Littlewoodin lausetta ja arviota (6.33) saadaan

$$\begin{aligned}\mu\big(E_{k_0,t}\big) &\le \sum_{i=k_0}^{\infty} \{x\in X\colon \big(M\|dv_i\|^p(x)\big)^{1/p} > \frac{t}{2^{i-k_0+1}}\}\\ &\le \sum_{i=k_0}^{\infty} \frac{c2^{(i-k_0+1)p}}{t^p}\int_X \|dv_i\|^p\,d\mu\\ &\le ct^{-p}10^{-k_0p}.\end{aligned}$$

Epäyhtälöstä (6.34) seuraa, että u_k on Ct-Lipschitz joukossa $X\setminus E_{k_0}$, kun $k\ge k_0$. Tästä seuraa, että

$$\|du_k(x)\|_x = \operatorname{Lip} u_k(x) \le Ct \tag{6.35}$$

m.k. $x\in X\setminus E_{k_0}$. Nimittäin u_k voidaan jatkaa koko X:n Ct-Lipschitz funktioksi $\tilde u_k$, jolloin $\|d\tilde u_k(x)\|_x\le Ct$ m.k. $x\in X$. Lisäksi $u_k-\tilde u_k=0$ joukossa $X\setminus E_{k_0}$, joten $\|d(u_k-\tilde u_k)(x)\|_x=0$ m.k. $x\in X\setminus E_{k_0}$ Lemman 6.29 mukaan. Siten (6.35) pätee ja näin ollen

$$\|w(x)\|_x\le Ct$$

m.k. $x\in X\setminus E_{k_0}$. Tästä puolestaan seuraa arvio

$$\mu\big(\{x\in X\colon \|w(x)\|_x > Ct\}\big)\le \mu\big(E_{k_0,t}\big)\le ct^{-p}10^{-k_0p}\to 0,$$

kun $k_0\to\infty$. Koska $t>0$ voidaan valita miten pieneksi tahansa, on oltava $w(x)=0$ m.k. $x\in X$. □

$\boxed{\text{LOPPU}}$

Alla luettelo (eräistä) kirjoista, julkaisuista ja luentomuistiinpanoista, joita voi käyttää lisämateriaalina.

Viitteet

[BBI] Burago, D., Burago, Y. ja Ivanov, S. *A course in metric geometry,* American Mathematical Society, 2001.

[Ch] Cheeger, Jeff. *Differentiability of Lipschitz Functions on Metric Measure Spaces,* Geometric And Functional Analysis 9 (1999), no. 3, 428-517.

[DS] David, Guy ja Semmes, Stephen. *Fractured fractals and broken dreams,* The Clarendon Press Oxford University Press, 1997.

[EG] Evans, Lawrence ja Gariepy Ronald. *Measure theory and fine properties of functions,* CRC Press, 1992.

[Gr] Gromov, M. *Metric structure for Riemannian and non-Riemannian spaces,* Birkhäuser, 1999.

[HK] Hajłasz, Piotr ja Koskela, Pekka. *Sobolev met Poincaré,* Mem. Amer. Math. Soc. 145, 2000.

[He1] Heinonen, Juha. *Lectures on analysis on metric spaces,* Springer-Verlag, 2001.

[He2] Heinonen, Juha. *Geometric embeddings of metric spaces,* 2003.

[HKM] Heinonen, Juha; Kilpeläinen, Tero ja Martio, Olli. *Nonlinear potential theory of degenerate elliptic equations,* The Clarendon Press Oxford University Press, 1993.

[HKST] Heinonen, Juha; Koskela, Pekka; Shanmugalingam, Nageswari ja Tyson, Jeremy. *Sobolev spaces on metric measure spaces: an approach based on upper gradients,* Käsikirjoitus (valmisteilla), 2003.

[Ho1] Holopainen, Ilkka. *Mitta ja integraali, Kevätlk. 2002.*
http://www.helsinki.fi/˜iholopai/MitInt02.ps

[Ho2] Holopainen, Ilkka. *Reaalianalyysi I, Kevätlk. 2002.*
http://www.helsinki.fi/˜iholopai/ReAn02.ps

[K1] Keith, Stephen. *A differentiable structure for metric measure spaces,* Advances in Mathematics, to appear.

[K2] Keith, Stephen. *Measurable differentiable structures and the Poincare inequality,* Indiana University Mathematics Journal, to appear.

[K3] Keith, Stephen. *Modulus and the Poincare inequality on metric measure spaces,* Mathematische Zeitschrift, to appear.

[Mat] Mattila, Pertti. *Geometry of sets and measures in Euclidean spaces,* Cambridge University Press, 1995.

[Pe] Petersen, Peter. *Riemannian geometry,* Springer-Verlag, 1998.