

1. Olkoot (X_i, p_i) , $i \in \mathbb{N}$, tuplaavia ankkuroituja metrisiä avaruuksia ja $c_0 \in \mathbb{N}$ vakio s.e. jokaisella $i \in \mathbb{N}$ ja $\delta > 0$ jokainen joukko $A \subset X_i$ voidaan peittää joukoilla $B_1, \dots, B_{c_0} \subset X_i$, joilla $\text{diam } B_k \leq \text{diam } A/2 + \delta$, $k = 1, \dots, c_0$. Oletetaan, että $(X_i, p_i) \xrightarrow{\text{GH}} (X, p)$. Osoita, että X :llä on myös sama ominaisuus samalla vakiolla c_0 (ts. jokaisella $\delta > 0$ jokainen joukko $A \subset X$ voidaan peittää joukoilla $B_1, \dots, B_{c_0} \subset X$, joilla $\text{diam } B_k \leq \text{diam } A/2 + \delta$, $k = 1, \dots, c_0$).

Ratkaisu: Olkoon $A \subset X$ ja $\delta > 0$. Voidaan olettaa, että $\text{diam } A < \infty$ ja että $\delta < \text{diam } A$. Olkoon $R = \text{dist}(p, A) + 3 \text{diam } A$. Valitaan i siten, että on olemassa kuvaus $f: B(p_i, R) \rightarrow X$ siten, että $f(p_i) = p$, f on $\delta/8$ -lähi-isometria joukolle $(fB(p_i, R))(\delta/8)$ ja $B(p, R - \delta/8) \subset (fB(p_i, R))(\delta/8)$. Tällöin on olemassa joukot $B_1, \dots, B_{c_0} \subset X_i$ siten, että $f^{-1}(A(\delta/8)) \subset B_1 \cup \dots \cup B_{c_0}$ ja $\text{diam } B_k \leq (\text{diam } f^{-1}(A(\delta/8)))/2 + \delta/8$ jokaisella k . Koska

$$\begin{aligned} |x - y| &\leq |f(x) - f(y)| + \delta/8 \leq \text{diam } A(\delta/8) + \delta/8 \\ &\leq \text{diam } A + \frac{3}{8}\delta \quad \forall x, y \in f^{-1}(A(\delta/8)) \end{aligned}$$

ja

$$|f(x) - f(y)| \leq |x - y| + \delta/8 \leq \text{diam } B_k + \delta/8 \quad \forall x, y \in B_k,$$

niin $\text{diam } f^{-1}(A(\delta/8)) \leq \text{diam } A + 3\delta/8$ ja $\text{diam } fB_k \leq \text{diam } B_k + \delta/8$. Erityisesti $\text{diam } fB_k \leq \text{diam } A/2 + 1\delta/4$ jokaisella k . Osoitetaan vielä, että A voidaan peittää joukoilla $(fB_k)(\delta/8)$. Olkoon $y \in A$. Tällöin on olemassa $y' \in B(y, \delta/8) \cap fB(p_i, R)$. Näin ollen $f^{-1}y' \subset B_1 \cup \dots \cup B_{c_0}$, jolloin $y' \in fB_k$ jollain k ja $y \in (fB_k)(\delta/8)$. Koska $\text{diam}((fB_k)(\delta/8)) \leq (\text{diam } A)/2 + \delta/4 + \delta/4 < \text{diam } A/2 + \delta$, toteuttavat joukot $(fB_k)(\delta/4)$ tehtävän ehdot.

2. Olkoon μ tuplaava mitta metrisessä avaruudessa X s.e. $0 < \mu(X) < \infty$. Osoita, että $\text{diam } X < \infty$.

Huom: Tehtävässä on oletettava jotain lisää esimerkiksi, että kuulat ovat mitallisia kuten seuraava vastaesimerkki osoittaa. Olkoon X metrinen avaruus ja μ ulkomitta siten, että $\mu(A) = 1$ kaikilla $A \neq \emptyset$. Tällöin μ on selvästi tuplaava ja $\mu(X) = 1$, mutta X :n halkaisijalle ei ole mitään ratjoituksia. Huomaa, että tässä esimerkissä $\mathcal{M}(X) = \{\emptyset, X\}$.

Ratkaisu: (Oletuksella, että kuulat ovat mitallisia.) Oletetaan, että on olemassa metrinen avaruus X ja tuplaava mitta μ X :llä siten, että $\text{diam } X = \infty$ ja $0 < \mu(X) < \infty$.

Olkoon C mitan μ tuplausvakio. Olkoon $\varepsilon = \mu(X)/(1 + C^2)$. Kiinnitetään $x \in X$ ja valitaan $R > 0$ siten, että $\mu(B(x, R)) > \mu(X) - \varepsilon$. Valitaan $y \in X$ siten, että $r := |y - x| > 2R$. Tällöin $B(y, r/2) \subset B(x, r) \setminus B(x, R)$, joten

$$\mu(B(y, r/2)) \leq \mu(B(x, r) \setminus B(x, R)) < \varepsilon.$$

Toisaalta

$$\mu(B(x, R)) \leq \mu(B(y, r + R)) \leq \mu(B(y, 2r)) \leq C^2 \mu(B(y, r/2)).$$

Näin ollen

$$C^{-2}(\mu(X) - \varepsilon) < \mu(B(y, r/2)) < \varepsilon$$

eli

$$\varepsilon > \frac{\mu(X)}{1 + C^2}.$$

Tämä on ristiriita, joten $\text{diam } X < \infty$.

3. Olkoon μ tuplaava mitta X :ssä s.e. jokainen avoin kuula on mitallinen. Osoita, että X on tuplaava vakiolla, joka riippuu vain μ :n tuplausvakiosta.

Ratkaisu: Olkoon $C > 0$ mitan μ tuplausvakio. Aloitetaan huomiolla. Olkoot $x, y \in X$ ja $r \geq |x - y|$. Tällöin

$$\begin{aligned}\mu(B(x, r)) &\leq \mu(B(y, r + |x - y|)) \leq \mu(B(y, 2r)) \\ &\leq C\mu(B(y, r)) \leq C^2\mu(B(y, r/2)).\end{aligned}$$

(Vastaavasti $\mu(B(y, r)) \leq C^2\mu(B(x, r))$.)

Olkoon $A \subset X$ rajoitettu. Valitaan $x \in A$. Olkoon P δ -verkko A :ssa, missä $\delta = \text{diam } A/4$. Tällöin pallot $B(x, \delta/2)$, $x \in P$, ovat erillisiä ja $B(y, \delta/2) \subset B(x, 8\delta)$ jokaisella $y \in P$. Lisäksi $\text{diam } B(y, \delta) \leq 2\delta = \text{diam } A/2$ jokaisella $y \in P$. Toisaalta $|x - y| \leq \text{diam } A = 4\delta$ kaikilla $x, y \in X$, joten huomion perusteella

$$\begin{aligned}\mu(B(x, 4\delta)) \text{card } P &\leq C^2 \sum_{y \in P} \mu(B(y, 2\delta)) \leq C^2 \sum_{y \in P} C^2 \mu(B(y, \delta/2)) \\ &\leq C^4 \mu(B(x, 8\delta)) \leq C^5 \mu(B(x, 4\delta)).\end{aligned}$$

Koska $0 < \mu(B(x, 4\delta)) < \infty$, niin $\text{card } P \leq C^5$. Näin ollen A voidaan peittää joukoilla $B(y, \delta)$, missä $y \in P$. Koska $\text{card } P \leq C^5$ ja $\text{diam } B(y, \delta) \leq \text{diam } A/2$ kaikilla $y \in P$, on avaruus X tuplaava vakiolla C^5 .

4. Olkoon X tuplaava metrinen avaruus vakiolla C , $x_0 \in X$ ja $k \geq 0$. Osoita, että $\text{card } P \leq C^{k+3}$, jos P on 2^{-k} -verkko kuulassa $B(x_0, 1) \subset X$.

Ratkaisu: Olkoon $k = 0$ ja P 1-verkko kuulassa B . Koska X on tuplaava, niin on olemassa joukot $B_1, \dots, B_{C^2} \subset X$ jotka peittävät kuulan $B(x, 1)$ siten, että $\text{diam } B_k \leq \text{diam } B(x, 1)/4 \leq 1/2$ (tuplausta käytetty kahdesti). Tällöin jokainen joukko B_k sisältää vain yhden P :n alkion. Näin ollen $\text{card } P \leq C^2$. (Voidaan osoittaa, että itseasiassa $\text{card } P \leq C$.) Oletetaan, että väite pätee jollain $k \geq 1$ ja olkoon P $2^{-(k+1)}$ -verkko kuulassa B . Valitaan jokin maksimaalinen 2^{-k} -verkko Q kuulassa B . Koska induktio-oletuksen perusteella $\text{card } Q \leq C^{k+3}$, niin riittää osoittaa, että $\text{card } P \cap B(q, 2^{-k}) \leq C^3$ kaikilla $q \in Q$. Olkoon $q \in Q$. Koska X on tuplaava, on olemassa joukot $B_1, \dots, B_{C^3}$ siten, että $\text{diam } B_k \leq \text{diam } B(q, 2^{-k})/8 = 2^{-(k+2)}$ (tuplaavuutta käytetty kolmesti.) Tällöin jokainen joukko B_k voi sisältää vain yhden alkion joukosta P . Näin ollen $\text{card } P \cap B(q, 2^{-k}) \leq C^3$. $\square$

5. Todista Lemma 4.6: Olkoon (X, d) tuplaava metrinen avaruus vakiolla C , $x_0 \in X$ ja $s > 0$. Silloin on olemassa äärellisen monta s -säteistä kuulaa $B_1, \dots, B_N$ s.e. $B(x_0, 1) \subset \cup_i B_i$ ja jokainen yhdisteen $\cup_i B_i$ piste kuuluu korkeintaan M :ään kuulaan B_j , missä vakio $M \in \mathbb{N}$ riippuu vain tuplausvakiosta C ja $N \in \mathbb{N}$ riippuu vain C :stä ja s :stä.

Huom: Tehtävässä haetaan lukua $N \in \mathbb{N}$, jolla on vain C :stä ja s :stä riippuva yläraja.

Ratkaisu: Jos $s \geq 1$, niin riittää valita kuula $B(x_0, s)$, jolloin $N = 1$ ja $M = 1$. Olkoon $s < 1$ ja $k \in \mathbb{N}$ siten, että $2^{-k} \leq s < 2^{-k+1}$. Valitaan maksimaalinen 2^{-k} -verkko P kuulassa $B(x_0, 1)$. Tällöin tehtävän 4 nojalla $\text{card } P \leq C^{k+3}$ ja $\{B(y, s)\}_{y \in P}$ on $B(x_0, 1)$:n peite. Olkoon $x \in B(x_0, 1)$. Osoitetaan, että x kuuluu korkeintaan C^2 :ään kuulaan $B(y, s)$, kun $y \in P$. Toisin sanoen osoitetaan, että $\text{card } P \cap B(x, s) \leq C^2$. Koska X on tuplaava, voidaan valita joukot $B_1, \dots, B_{C^2} \subset X$ siten, että $\text{diam } B_k \leq \text{diam } B(x, s)/4$ ja $B(x, s) \subset B_1 \cup \dots \cup B_{C^2}$. Koska P on 2^{-k} -verkko ja $\text{diam } B_k \leq s/2 < 2^{-k}$, niin jokainen B_k sisältää korkeintaan yhden verkon P alkion. Näin ollen $\text{card } A \leq C^2$.