

1. Konstruoi kompaktit metriset avaruudet X ja X_i , $i \in \mathbb{N}$, siten, että $d_{\text{GH}}(X_i, X) \rightarrow 0$, mutta ettei ehto

$$d_{\text{GH}}(\bar{B}_{x_i}(p_i, r), \bar{B}_X(p, r)) \rightarrow 0 \quad \forall r > 0$$

toteudu millään valinnoilla $p_i \in X_i$, $p \in X$.

Ratkaisu: Olkoot $X = \{0, 1\} \subset \mathbb{R}$ ja $X_i = \{0, 1 + 1/i\} \subset \mathbb{R}$ kaikilla $i \in \mathbb{N}$. Varustetaan lisäksi kaikki avaruudet $\mathbb{R}$:stä perityllä euklidisella metriikalla. Tällöin identtinen kuvaus indusoi isometriset upotukset $X \hookrightarrow \mathbb{R}$ ja $X_i \hookrightarrow \mathbb{R}$. Näin ollen $d_{\text{GH}}(X, X_i) \leq d_H(X, X_i) = 1/i \rightarrow 0$, kun $i \rightarrow \infty$.

Toisaalta kaikilla $p \in X$ pätee $\bar{B}_X(p, 1) = \{x \in X : d(x, p) \leq 1\} = \{0, 1\} = X$ ja vastaavasti jokaisella $i \in \mathbb{N}$ ja kaikilla $p_i \in X_i$ pätee $\bar{B}_{X_i}(p_i, 1) = \{p_i\}$. Näin ollen

$$d_{\text{GH}}(\bar{B}_{X_i}(p_i, 1), \bar{B}_X(p, 1)) = d_{\text{GH}}(\{p_i\}, X) = \frac{1}{2} \text{diam } X = 1/2,$$

kaikilla $p_i \in X_i$ ja $p \in X$.

2. Olkoon ω vapaa ultrafilteri $\mathbb{N}$:ssä, Y topologinen avaruus ja $S \subset Y$ suljettu. Olkoon $y_n \in Y$, $n \in \mathbb{N}$, jono s.e. $y_n \in S$ kaikilla $n \in A$, missä $\omega(A) = 1$. Osoita, että $\lim_{\omega} y_n \in S$.

Ratkaisu: Tehtävä vaatii lisäoletuksen, että $y := \lim_{\omega} y_n$ on olemassa. Tehdään vasta oletus: $y \in Y \setminus S$. Koska S on suljettu, on olemassa y :n ympäristö $y \in U \subset Y \setminus S$. Tällöin joukot $B = \{n \in \mathbb{N} : y_n \in U\}$ ja A ovat erilliset, joten $1 = \omega(\mathbb{N}) \geq \omega(A) + \omega(B) = 1 + 1$, mikä on ristiriita.

3. Olkoot (X_i, p_i) , $i \in \mathbb{N}$, tuplaavia ankkuroituja metrisiä avaruuksia samalla tuplausvakiolla C . Oletetaan, että $(X_i, p_i) \xrightarrow{\text{GH}} (X, p)$. Osoita, että X on tuplaava vakiolla, joka riippuu vain C :stä (esim. vakiolla C^2).

Ratkaisu: *Tapa 1:* Täytyy siis osoittaa, että on olemassa luku $C' > 0$ siten, että jokainen joukko $A \subset X$ voidaan peittää joukoilla $B_1, \dots, B_{C'} \subset X$ siten, että $\text{diam } B_k \leq \text{diam } A/2$.

Olkoon $A \subset X$. Voidaan olettaa, että $\text{diam } A < \infty$. Olkoon $\delta < \text{diam } A/4$. Valitaan i ja kuvaus $f: B_{X_i}(p_i, R) \rightarrow X$ siten, että $f(p_i) = p$, f_i on $\delta/2$ -lähi-isometria kovalleen, $\bar{A} \subset fB(p, R)(\delta/2)$. Koska X_i on tuplaava vakiolla C , on olemassa joukot $B_1, \dots, B_C \subset X_i$ siten, että $f^{-1}(A(\delta/2)) \subset B_1 \cup \dots \cup B_C$ ja $\text{diam } B_k \leq (\text{diam } f^{-1}(A(\delta/2)))/2 \leq \text{diam } A/2 + \delta/2$ kaikilla k . Edelleen X_i :n tuplaavuudesta seuraa, että on olemassa joukot $B_{k,i}$, $i = 1, \dots, C$, siten, että $B_k \subset B_{k,1} \cup \dots \cup B_{k,C}$ ja $\text{diam } B_{i,k} \leq \text{diam } B_k/2 \leq (\text{diam } f^{-1}A)/4 + \delta/2$. Näin ollen joukot $(fB_{i,k})(\delta)$ peittävät A :n ja $\text{diam } fB_{i,k} \leq \text{diam } A$. (Yksityiskohdat kuten tehtävässä 4.) Näin ollen joukko A voidaan peittää joukoilla, joiden halkaisija on korkeintaan $\text{diam } A/2$, käyttäen C^2 :ta joukkoa. Avaruus X on siis tuplaava vakiolla C^2 .

Tapa 2: Koska avaruudet X_i ovat tuplaavia samalla vakiolla C , niin ne toteuttavat tehtävän 4 ehdon samalla vakiolla $c_0 = C$. Näin ollen avaruus X toteuttaa tehtävän 4 ehdon samalla vakiolla C . Osoitetaan, että tästä seuraa tuplaavuus vakiolla C^2 . Olkoon $A \subset X$. Voidaan olettaa, että $\text{diam } A < \infty$. Olkoon $\delta < \text{diam } A/4$. Tällöin on olemassa joukot $B_1, \dots, B_C \subset X$ siten, että $\text{diam } B_k \leq \text{diam } A/2 + \delta$ ja $A \subset B_1 \cup \dots \cup B_C$. Olkoon $\varepsilon < \text{diam } A/8$. Tällöin

jokaisella k voidaan valita joukot $B_{k,1}, \dots, B_{k,C} \subset X$ siten, että $\text{diam } B_{k,j} \leq \text{diam } B_k/2 + \varepsilon$ ja $B_k \subset B_{k,1} \cup \dots \cup B_{k,C}$. Tällöin

$$A \subset \bigcup_{k=1}^C B_k \subset \bigcup_{k,i=1}^C B_{k,i}$$

ja

$$\begin{aligned} \text{diam } B_{k,i} &\leq \text{diam } B_k/2 + \varepsilon \leq (\text{diam } A/2 + \delta)/2 + \varepsilon \\ &< \text{diam } A/4 + \text{diam } A/8 + \text{diam } A/8 = \text{diam } A/2 \end{aligned}$$

jokaisella $k, i \in \{1, \dots, C\}$. Näin ollen X on tuplaava vakiolla C^2 .

4. Konstruoi metrinen avaruus X ja pisteet $p \in X$ ja $q \in X$ siten, että jokaisella $r > 0$ kuulat $B(p, r)$ ja $B(q, r)$ ovat isometriset, mutta ettei ole olemassa isometriaa $f: X \rightarrow X$, jolla $f(p) = q$.

Ratkaisu: Olkoon $X = \{(0, 1), (0, -1), (1, 2), (-1, -2), (-5, 0)\}$ varustettuna tasosta indusoidulla metriikalla. Valitaan $p = (0, 1)$ sekä $q = (0, -1)$. Tehtävän ehtojen toteutuminen on helppo tarkistaa. Kuvasta on helppo päätellä, että tällä avaruudella ei ole epätriviaaleja isometrioita.

5. Oletetaan, että $(X_i, p_i) \xrightarrow{\text{GH}} (X, p)$, missä X_i :t ovat rajoitetusti kompakteja ja X on täydellinen. Osoita, että X on rajoitetusti kompakti.

Ratkaisu: *Tapa 1: (the hard way)* Riittää osoittaa, että jokainen suljettu kuula $\bar{B}(p, R)$ on kompakti. Koska X on täydellinen riittää siis osoittaa, että jokaisella $R > 0$ ja jokaisella kuulan $\bar{B}(p, R)$ jonolla (x_i) on olemassa osajono, joka on Cauchy-jono.

Olkoon $R > 0$ ja olkoon (x_i) jono kuulassa $\bar{B}(p, R)$. Koska $(X_i, p_i) \xrightarrow{\text{GH}} (X, p)$, voidaan jokaisella $k \in \mathbb{N}$ valita indeksi i_k ja kuvaus $f_k: B_{X_{i_k}}(p_{i_k}, R+2) \rightarrow B(p, R+2)$ siten, että

$$\begin{aligned} f_k(p_{i_k}) &= p \\ |x - y| - 1/k &\leq |f(x) - f(y)| \leq |x - y| + 1/k \quad \text{ja} \\ B(p, (R+2) - 1/k) &\subset (f_k B(p_{i_k}, R+2))(1/k). \end{aligned}$$

Siirtymällä alkuperäisen jonon osajonoon, voidaan olettaa, että $i_k = k$ jokaisella k . Tällöin voidaan jokaisella $i \in \mathbb{N}$ ja $k \in \mathbb{N}$ valita pisteet $x_i^k \in B_{X_k}(p_k, R+1)$ siten, että $|x_i - f_k(x_i^k)| < 1/k$. Tällöin (esimerkiksi tehtävän 2 perusteella) havaitaan, että $x_i^k \in \bar{B}_{X_k}(p_k, R+1)$ kaikilla k ja kaikilla i . Näin ollen jokaisella jonon $(x_i^k)_{i \in \mathbb{N}}$ osajonolla on suppeneva osajono. Erityisesti tämä suppeneva osajono on Cauchy-jono X_k :ssa.

Valitaan jokaisella k indeksijono $(j_i^k)_{i \in \mathbb{N}}$ seuraavasti: jono (j_i^{k+1}) on jonon (j_i^k) osajono ja $(x_{j_i^k}^k)_{i \in \mathbb{N}}$ on Cauchy-jono X_k :ssä. Lisäksi voidaan olettaa, että $|x_{j_i^k}^k - x_{j_n^k}^k| < 1/k$ kaikilla $i, n \geq 1$. Olkoot nyt $y_k = x_{j_k^k}^k$ jokaisella k . Tällöin

$$|f_{j_k^k}(y_k) - x_{j_k^k}^k| = |f_{j_k^k}(x_{j_k^k}^k) - x_{j_k^k}^k| < \frac{1}{j_k^k} \leq \frac{1}{k}$$

jokaisella k , sillä $j_k^k \geq k$ kaikilla k . Koska jokaisella $n \geq k$ jono (j_i^n) on jonon (j_i^k) osajono, niin jokaisella $k \in \mathbb{N}$ ja kaikilla $n \geq k$ on olemassa m siten, että

$j_m^k = j_n^n$. Näin ollen

$$\begin{aligned}
|f_k(y_k) - f_n(y_n)| &\leq |f_k(y_k) - f_k(x_{j_m^k}^k)| + |f_k(x_{j_m^k}^k) - f_n(y_n)| \\
&\leq |y_k - x_{j_m^k}^k| + \frac{1}{k} + |f_k(x_{j_m^k}^k) - x_{j_n^n}^n| + |x_{j_n^n}^n - f_n(y_n)| \\
&\leq \frac{2}{k} + |f_k(x_{j_n^n}^k) - x_{j_n^n}^n| + \frac{1}{n} \\
&\leq \frac{2}{k} + \frac{1}{k} + \frac{1}{n} \leq \frac{4}{k}.
\end{aligned}$$

Tällöin

$$\begin{aligned}
|x_{j_k^k} - x_{j_n^n}^n| &\leq |x_{j_k^k} - f_k(y_k)| + |f_k(y_k) + f_n(y_n)| + |f_n(y_n) - x_{j_n^n}^n| \\
&\leq \frac{1}{k} + \frac{3}{k} + \frac{1}{n} \leq \frac{5}{k}
\end{aligned}$$

kaikilla $n \geq k$. Näin ollen $(x_{j_k^k})$ on Cauchy-jono.

Tapa 2: (the easy way) Oletetaan, että $\bar{B}(p, R)$ ei ole kompakti, jollain $R > 0$. Koska $\bar{B}(p, R)$ on täydellinen, niin Lemman 2.32 perusteella $\bar{B}(p, r)$ ei ole totaalisesti rajoitettu, ts. on olemassa $\varepsilon > 0$ ja maksimaalinen ε -verkko P , joka ei ole äärellinen.

Koska $(X_i, p_i) \xrightarrow{\text{GH}} (X, p)$, niin on olemassa $i \in \mathbb{N}$ ja kuvaus $f: B(p_i, 2R + \varepsilon/2) \rightarrow X$ siten, että $f(p_i) = p$, f on $\varepsilon/2$ -lähi-isometria kuvalleen ja $B(p, 2R) \subset (fB(p_i, 2R + \varepsilon/2))(\varepsilon/2)$. Olkoon $Q = f^{-1}P$. Osoitetaan, että Q on $\varepsilon/2$ -verkko. Olkoot $q, q' \in Q$. Tällöin $|q - q'| \geq |f(q) - f(q')| - \varepsilon/2 \geq \varepsilon/2$. Olkoon nyt Q' maksimaalinen $\varepsilon/2$ -verkko $\bar{B}(p_i, 2R + \varepsilon/2)$:ssa, joka sisältää Q :n. (Tällainen voidaan aina valita; vrt. Lemman 2.29 todistus.) Tällöin Q' ei ole äärellinen $\varepsilon/2$ -verkko, sillä $\text{card } Q' \geq \text{card } Q \geq \text{card } P = \infty$. Näin ollen X_k ei ole rajoitetusti kompakti. Tämä on ristiriita, joten $\bar{B}(p, r)$ on kompakti ja siten X rajoitetusti kompakti.