

1. Olkoot (X_i, d_i) , $i = 1, 2, 3$, metrisiä avaruuksia. Olkoon $d_{1,2}$ sallittu metriikka pistevieraassa yhdisteessä $X_1 \sqcup X_2$ ja $d_{2,3}$ sallittu metriikka pistevieraassa yhdisteessä $X_2 \sqcup X_3$. Oletetaan lisäksi, että $\text{dist}_{d_{1,2}}(X_1, X_2) > 0$ tai $\text{dist}_{d_{2,3}}(X_2, X_3) > 0$. Osoita, että asettamalla

$$d(x_1, x_3) = d(x_3, x_1) = \inf_{x_2 \in X_2} (d_{1,2}(x_1, x_2) + d_{2,3}(x_2, x_3)),$$

kun $x_1 \in X_1$ ja $x_3 \in X_3$, voidaan määritellään metriikka d pistevieraaseen yhdisteeseen $X_1 \sqcup X_2 \sqcup X_3$ siten, että $d = d_{1,2}$ joukossa $X_1 \sqcup X_2$ ja $d = d_{2,3}$ joukossa $X_2 \sqcup X_3$.

Ratkaisu: Aloitetaan osoittamalla, ettei d ole välttämättä metriikka ilman oletusta, että $\text{dist}_{d_{1,2}}(X_1, X_2) > 0$ tai $\text{dist}_{d_{2,3}}(X_2, X_3) > 0$. Olkoon (X, d_X) sellainen metrinen avaruus, että on olemassa joukot $A, B \subset X$ siten, että $A \cap B \neq \emptyset$ ja $X \setminus (A \cup B)$ on tiheä X :ssä. (Eli voidaan valita $X = \mathbb{R}$ ja joukoiksi A ja B vaikka $A = B = \{0\}$ tai $A = B = \mathbb{Q}$.) Olkoot $X_1 = A$, $X_2 = X \setminus (A \cup B)$ ja $X_3 = B$. Tällöin d_X on sallittu metriikka avaruuksissa $X_1 \sqcup X_2$ ja $X_2 \sqcup X_3$. Näin ollen voidaan valita $d_{12} = d_X$ ja $d_{23} = d_X$, kun tulkitaan, että tässä rajoitetaan d_X :ää sopivasti. Osoitetaan, että yllä konstruoitu d ei tällöin ole metriikka. Olkoot $x_1 \in X_1$ ja $x_3 \in X_3$ siten, että $x_1 = x_3$ X :ssä. Koska $X \setminus (A \cup B)$ on tiheä X :ssä, on olemassa X :n jono (y_i) siten, että $y_i \rightarrow x_1$. Tällöin

$$d(x_1, x_3) \leq d_{12}(x_1, y_i) + d_{23}(y_i, x_3) = d_X(x_1, y_i) + d_X(y_i, x_3) \rightarrow 0,$$

kun $i \rightarrow \infty$. Näin ollen $d(x_1, x_3) = 0$ vaikka x_1 ja x_3 eivät ole sama piste avaruudessa $X_1 \sqcup X_2 \sqcup X_3$.

Palataan nyt varsinaiseen tehtävään eli oletetaan lisäksi, että metriikat d_{12} ja d_{23} ovat sellaisia, että joko $\text{dist}_{d_{12}}(X_1, X_2) > 0$ tai $\text{dist}_{d_{23}}(X_2, X_3) > 0$. (Ilman tätä lisäoletusta d on *pseudometriikka*).

Koska kaikilla $x_i \in X_i$ ($i = 1, 3$) pätee

$$\begin{aligned} d(x_1, x_3) &= \inf_{x_2 \in X_2} d_{12}(x_1, x_2) + d_{23}(x_2, x_3) \\ &\geq \text{dist}_{d_{12}}(X_1, X_2) + \text{dist}_{d_{23}}(X_2, X_3) > 0. \end{aligned}$$

niin kaikilla $x, y \in X_1 \sqcup X_2 \sqcup X_3$ pätee $d(x, y) = 0$ jos ja vain jos $x = y$, sillä tapaukset $x, y \in X_1 \sqcup X_2$ ja $x, y \in X_2 \sqcup X_3$ seuraavat metriikoiden d_{12} ja d_{23} vastaavasta ominaisuudesta.

Koska d on selvästi symmetrinen, jää jäljelle kolmioepäyhtälön tarkistaminen. Koska tapaukset $x, y, z \in X_1 \sqcup X_2$ ja $x, y, z \in X_2 \sqcup X_3$ seuraavat jälleen metriikoista d_{12} ja d_{23} , niin riittää tarkastella tapausta $x \in X_1$, $y \in X_2$ ja $z \in X_3$. Osoitetaan vain tapaus $d(x, z) \leq$

$d(x, y) + d(y, z)$, koska muut ovat vastaavia (mahdollisesti pidempiä). Koska $d_{12} = d|(X_1 \sqcup X_2)^2$ ja $d_{23} = d|(X_2 \sqcup X_3)^2$, niin

$$\begin{aligned} d(x, z) &= \inf_{x_2 \in X_2} d_{12}(x, x_2) + d_{23}(x_2, z) \\ &\leq \inf_{x_2 \in X_2} d_{12}(x, y) + d_{12}(y, x_2) + d_{23}(x_2, y) + d_{23}(y, z) \\ &= d(x, y) + \inf_{x_2 \in X_2} (d_{12}(y, x_2) + d_{23}(x_2, y)) + d(y, z) \\ &= d(x, y) + d(y, z). \end{aligned}$$

Koska selvästi $d(x, y) \in [0, \infty)$ kaikilla $x, y \in X_1 \sqcup X_2 \sqcup X_3$, niin d on metriikka.

2. Olkoot X ja Y metrisiä avaruuksia ja $f: X \rightarrow Y$ ε -lähi-isometria. Osoita, että asettamalla

$$d(x, y) = d(y, x) = \inf_{z \in X} (|x - z| + \varepsilon + |f(z) - y|),$$

kun $x \in X$, $y \in Y$, voidaan määritellä sallittu metriikka pistevieräseeseen yhdisteeseen $X \sqcup Y$. [Huom. Sekä X :n että Y :n metriikkaa on merkitty $|a - b|$:llä.]

Ratkaisu: Koska $d(x, y) = d(y, x) \geq \varepsilon$ kaikilla $x \in X$ ja $y \in Y$, niin kaikilla $a, b \in X \sqcup Y$ pätee $d(a, b) = 0$ jos ja vain jos $a = b$. Koska d on selvästi (konstruktion perusteella) symmetrinen, riittää siis osoittaa, että d toteuttaa kolmioepäyhtälön. Olkoot $x, x' \in X$ ja $y, y' \in Y$. Käsitellään neljä tapausa.

$d(x, y) \leq d(x, x') + d(x', y)$:

$$\begin{aligned} d(x, y) &= \inf_{z \in X} (|x - z| + \varepsilon + |f(z) - y|) \\ &\leq \inf_{z \in X} (|x - x'| + |x' - z| + \varepsilon + |f(z) - y|) \\ &\leq |x - x'| + \inf_{z \in X} (|x' - z| + \varepsilon + |f(z) - y|) \\ &= d(x, x') + d(x', y) \end{aligned}$$

$d(x, y) \leq d(x, y') + d(y', y)$:

$$\begin{aligned} d(x, y) &= \inf_{z \in X} (|x - z| + \varepsilon + |f(z) - y|) \\ &\leq \inf_{z \in X} (|x - z| + \varepsilon + |f(z) - y'|) + |y' - y| \\ &= d(x, y') + d(y', y) \end{aligned}$$

$d(x, x') \leq d(x, y) + d(y, x')$:

Koska f on ε -lähi-isometria, niin $|f(z) - f(w)| \geq |z - w| - \varepsilon$ kaikilla $z, w \in X$. Näin ollen

$$\begin{aligned}
 d(x, x') &\leq \inf_{z, w \in X} (|x - z| + |z - w| + |w - x'|) \\
 &\leq \inf_{z, w \in X} (|x - z| + |f(z) - f(w)| + \varepsilon + |w - x'|) \\
 &\leq \inf_{z, w \in X} (|x - z| + |f(z) - y| + |y - f(w)| + \varepsilon + |w - x'|) \\
 &\leq \inf_{z \in X} (|x - z| + \varepsilon + |f(z) - y|) + \inf_{w \in X} (|x' - w| + \varepsilon + |f(w) - y|) \\
 &= d(x, y) + d(y, x').
 \end{aligned}$$

$$d(y, y') \leq d(y, x) + d(x, y'):$$

Koska f on ε -lähi-isometria, niin $|f(z) - f(w)| \leq |z - w| + \varepsilon$ kaikilla $z, w \in X$. Näin ollen

$$\begin{aligned}
 d(y, y') &\leq \inf_{z, w \in X} (|y - f(z)| + |f(z) - f(w)| + |f(w) - y'|) \\
 &\leq \inf_{z, w \in X} (|y - f(z)| + |z - w| + \varepsilon + |f(w) - y'|) \\
 &\leq \inf_{z, w \in X} (|y - f(z)| + |z - x| + |x - w| + \varepsilon + |f(w) - y'|) \\
 &\leq \inf_{z \in X} (|y - f(z)| + |z - x| + \varepsilon) + \inf_{w \in X} (|x - w| + \varepsilon + |f(w) - y'|) \\
 &= d(y, x) + d(x, y').
 \end{aligned}$$

3. Olkoot X ja Y metrisiä avaruuksia s.e. X on kompakti ja $d_{GH}(X, Y) = 0$. Osoita, että Y on totaalisesti rajoitettu, ts. jokaisella $\varepsilon > 0$ on olemassa pisteet $y_1, \dots, y_k \in Y$, $k = k_\varepsilon < \infty$, s.e. $Y = \bigcup_{i=1}^k B(y_i, \varepsilon)$.

Ratkaisu: Olkoon $\varepsilon > 0$. Koska X on kompakti, on olemassa pisteet $x_1, \dots, x_k \in X$ siten, että $X = \bigcup_{i=1}^k B(x_i, \varepsilon/4)$. Lemman 3.20 perusteella on olemassa $\varepsilon/4$ -lähi-isometria $f: X \rightarrow Y$. Olkoot $y_i = f(x_i)$. Osoitetaan, että $Y = \bigcup_{i=1}^k B(y_i, \varepsilon)$. Koska f on $\varepsilon/4$ -lähi-isometria, niin

$$\begin{aligned}
 Y &= (fX)(\varepsilon/4) = \left(f\left(\bigcup_{i=1}^k B(x_i, \varepsilon/4)\right) \right) (\varepsilon/4) \\
 &= \left(\bigcup_{i=1}^k f(B(x_i, \varepsilon/4)) \right) (\varepsilon/4) = \bigcup_{i=1}^k (fB(x_i, \varepsilon/4)) (\varepsilon/4),
 \end{aligned}$$

missä viimeinen yhtäsuuruus seuraa havainnosta $(A \cup B)(s) = A(s) \cup B(s)$ ja induktiosta. Näin ollen riittää siis osoittaa, että

$$(fB(x_i, \varepsilon/4)) (\varepsilon/4) \subset B(y_i, \varepsilon)$$

jokaisella i . Koska kaikilla $x \in B(x_i, \varepsilon/4)$ pätee

$$|f(x) - f(x_i)| \leq |x - x_i| + \varepsilon/4 \leq \varepsilon/2,$$

niin $fB(x_i, \varepsilon/4) \subset B(y_i, \varepsilon/2)$ kaikilla i . Näin ollen (tehtävän 3/3(a) perusteella)

$$(fB(x_i, \varepsilon/4))(\varepsilon/4) \subset (B(y_i, \varepsilon/2))(\varepsilon/4) \subset B(y_i, 3\varepsilon/4) \subset B(y_i, \varepsilon)$$

jokaisella i .

Huom: Luentomuistiinpanossa totaalisesti rajoitettu avaruus määritely seuraavasti: avaruus on totaalisesti rajoitettu, jos jokaisella $\varepsilon > 0$ on olemassa äärellinen maksimaalinen ε -verkko. Tehtävässä on käytetty ekvivalenttia muotoilua, että jokaisella $\varepsilon > 0$ riittää löytää pisteet $y_1, \dots, y_k$ siten, että pallot $B(y_i, \varepsilon)$ peittävät avaruuden. Osoitetaan, että nämä ovat todella ekvivalentteja muotoiluja.

Olkoon $\varepsilon > 0$. Jos Z on maksimaalinen ε -verkko, niin pallot $B(z, \varepsilon)$, $z \in Z$, peittävät avaruuden maksimaalisuuden perusteella. Näin ollen joukoksi $\{y_1, \dots, y_k\}$ kelpaa mikä tahansa maksimaalinen ε -verkko. Jos taas on olemassa pisteet $y_1, \dots, y_k$ siten, että pallot $B(y_i, \varepsilon/2)$ peittävät avaruuden, niin jokainen pallo sisältää korkeintaan yhden ε -verkon pisteen. Näin ollen jokainen maksimaalinen ε -verkko on äärellinen.

4. (a) Olkoon d pseudometriikka X :ssä (ts. $d: X \times X \rightarrow [0, \infty)$ on symmetrinen, toteuttaa kolmioepäyhtälön ja $d(x, x) = 0$). Määritellään X :n ekvivalenssirelaatio $x \sim y \iff d(x, y) = 0$. Osoita, että $(X/\sim, \hat{d})$ on metrinen avaruus, kun $\hat{d}$ on d :n projektio $X/\sim$:lle.
- (b) Osoita, että $d((x, y), (x', y')) = |(x - x') + (y - y')|$ on $\mathbb{R}^2$:n pseudometriikka ja että $(\mathbb{R}^2/\sim, \hat{d})$ on isometrinen $\mathbb{R}$:n kanssa.

Ratkaisu:

- (a) Osoitetaan aluksi, että $\sim$ on ekvivalenssirelaatio. Koska $d(x, x) = 0$ ja $d(x, y) = d(y, x)$ kaikilla $x, y \in X$, niin $x \sim x$ ja $x \sim y \Rightarrow y \sim x$. Jos $x \sim y$ ja $y \sim z$, niin $x \sim z$, sillä kolmioepäyhtälön perusteella $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z) = 0$. Näin ollen $\sim$ on ekvivalenssirelaatio. Merkitään pisteen $x \in X$ ekvivalenssiluokkaa $[x]$.

Olkoot $x, x', y, y' \in X$ siten, että $x \sim x'$ ja $y \sim y'$. Tällöin

$$\begin{aligned} d(x', y') &\leq d(x', x) + d(x, y) + d(y, y') = d(x, y) \\ &\leq d(x, x') + d(x', y') + d(y', y) = d(x', y'). \end{aligned}$$

Näin ollen kaavalla $\hat{d}([x], [y]) = d(x, y)$ määritelty funktio ei riipu valituista edustajista.

Osoitetaan nyt, että $\hat{d}$ on metriikka joukkossa $X/\sim$. Olkoot $x, y, z \in X$. Tällöin $\hat{d}([x], [y]) = 0$ jos ja vain jos $d(x, y) = 0$ eli $x \sim y$. Näin ollen $\hat{d}([x], [y]) = 0$ jos ja vain jos $[x] = [y]$. Selvästi $\hat{d}([x], [y]) = \hat{d}([y], [x])$. Lisäksi

$$\hat{d}([x], [y]) = d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y) = \hat{d}([x], [z]) + \hat{d}([z], [y]).$$

Näin ollen $\hat{d}$ on metriikka joukossa $X/\sim$.

(b) Osoitetaan aluksi, että d on pseudometriikka. Koska

$$\begin{aligned} d((x, y), (x', y')) = 0 &\Leftrightarrow |(x - x') + (y - y')| = 0 \\ &\Leftrightarrow x - y = x' - y', \end{aligned}$$

niin $d((x, y), (x, y)) = 0$, mutta d ei voi olla metriikka. Koska d on selvästi symmetrinen, riittää osoittaa, että d toteuttaa kolmioepäyhtälön:

$$\begin{aligned} d((x, y), (x', y')) &= |(x - x') + (y - y')| \\ &= |(x - x'') + (x'' - x') + (y - y'') + (y'' - y')| \\ &\leq |(x - x'') + (y - y'')| + |(x'' - x') + (y'' - y')| \\ &= d((x, y), (x'', y'')) + d((x'', y''), (x', y')). \end{aligned}$$

Tarkastellaan nyt avaruutta $\mathbb{R}^2/\sim$. Olkoon

$$\begin{aligned} L &= [0] = \{(x, y) : |(x - 0) + (y - 0)| = 0\} \\ &= \{(x, -x) : x \in \mathbb{R}\}. \end{aligned}$$

Lineaarialgebran perusteella

$$[(x, x)] = (x, x) + L \quad \text{ja} \quad \mathbb{R}^2/\sim = \{[(x, x)] : x \in \mathbb{R}\}.$$

Lisäksi

$$\begin{aligned} \hat{d}([(x, x)], [(y, y)]) &= d((x, x), (y, y)) = |(x - y) + (x - y)| \\ &= 2|x - y| \end{aligned}$$

kaikilla $x, y \in \mathbb{R}$.

Olkoon $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2/\sim$, $x \mapsto [\frac{1}{2}(x, x)]$. Tällöin

$$\begin{aligned} \hat{d}(f(x), f(y)) &= d(f(x), f(y)) = d([\tfrac{1}{2}(x, x)], [\tfrac{1}{2}(y, y)]) \\ &= 2|\tfrac{1}{2}x - \tfrac{1}{2}y| = |x - y| \end{aligned}$$

kaikilla $x, y \in \mathbb{R}$. Näin ollen f on isometria (ja homeomorfismi).

5. Olkoon P yhden pisteen muodostama metrinen avaruus.

(a) Osoita, että $d_{GH}(X, P) = \frac{1}{2} \text{diam } X$ jokaisella metrisellä avaruudella X .

(b) Osoita, että metrysten avaruuksien jono (X_i) suppenee Gromov-Hausdorff mielessä kohti P :tä, jos ja vain jos $\text{diam } X_i \rightarrow 0$.

Ratkaisu:

(a) Lemman 3.16 perusteella riittää osoittaa, että

$$d_H(X, P) \geq \frac{1}{2} \text{diam } X$$

kaikilla avaruuden $X \sqcup P$ sallituilla metriikoilla d ja että on olemassa sellainen metriikka d' , että $d'_H(X, P) = \frac{1}{2} \text{diam } X$. (Huom:

Kaikki sallitut metriikat antavat X :lle saman läpimitan.) Olkoon $P = \{a\}$.

Jos X on yksiö, on väite selvä. Lisäksi, jos $\text{diam } X = \infty$, niin olkoon d jokin sallittu metriikka $X \sqcup P$:ssä. Tällöin on olemassa sellainen jono (x_i) X :n pisteitä, että $d(x_i, p) \rightarrow \infty$, missä $p \in X$ on jokin kiinteä piste. Näin ollen $d(x_i, a) \geq d(x_i, p) - d(p, a) \rightarrow \infty$. Koska d oli mielivaltainen, niin $d_{GH}(X, P) = \infty$.

Käsitellään vielä tapaus, $0 < \text{diam } X < \infty$. Olkoon d sallittu metriikka $X \sqcup P$:ssä. Jos $d_H(X, P) < \text{diam}(X)/2$, niin kaikilla $x, y \in X$ pätee

$$d(x, y) \leq d(x, a) + d(a, y) \leq 2d_H(X, P),$$

jolloin

$$\text{diam } X \leq 2d_H(X, p) < \text{diam } X,$$

joka on ristiriita, koska $0 < \text{diam } X < \infty$. Näin ollen $d_H(X, P) \geq \frac{1}{2} \text{diam } X$.

Olkoon $d': X \sqcup P \times X \sqcup P \rightarrow \mathbb{R}$ sellainen, että $d'|X \times X$ on X :n metrikkaa, $d'(x, a) = d'(a, x) = \text{diam } X/2$ kaikilla $x \in X$ (ja $d'(a, a) = 0$). Tällöin d' on selvästi symmetrinen ja $d'(x, y) = 0$ jos ja vain jos $x = y$. Kolmioepäyhtälön osoittamiseksi riittää tarkastella tapausta $x, y \in X$ ja $z = a$. Tällöin

$$\begin{aligned} d(x, y) &\leq \text{diam } X = \frac{1}{2} \text{diam } X + \frac{1}{2} \text{diam } X \\ &= d(x, a) + d(a, y). \end{aligned}$$

Näin ollen d' on sallittu metriikka $X \sqcup P$:ssä. Koska

$$d_H(X, P) = \max\{\sup_{x \in X} \text{dist}_{d'}(\{x\}, P), \text{dist}_{d'}(X, \{a\})\} = \frac{1}{2} \text{diam } X,$$

niin $d_{GH}(X, P) = \frac{1}{2} \text{diam } X$.

- (b) Määritelmän mukaan jono (X_i) suppenee Gromov-Hausdorff mielessä kohti P :tä jos ja vain jos $d_{GH}(X_i, P) \rightarrow 0$, kun $i \rightarrow \infty$. Toisaalta (a)-kohdan perusteella $d_{GH}(X_i, P) \rightarrow 0$ jos ja vain jos $\text{diam } X_i \rightarrow 0$.