

Viimeiset harjoitustehtävät. Ratkaisut on palautettava viimeistään **keski-
 kiviikkona 3.12.**

1. Olkoon (X, Γ, μ) σ -äärellinen mitta-avaruus ja $P: \Gamma \rightarrow \{0, 1\}$ sellainen funktio, että jokainen positiivimittainen $A \in \Gamma$ sisältää positiivimittaisen joukon $V \in \Gamma$, jolla $P(V) = 1$. Osoita, että X on numeroituva yhdiste

$$X = Z \cup \bigcup_{i=1} V_i,$$

missä $\mu(Z) = 0$, joukot $V_i \in \Gamma$ ovat erillisiä ja $P(V_i) = 1 \ \forall i$.

[*Muistutus:* X on σ -äärellinen, jos X on numeroituva yhdiste $X = \bigcup_i X_i$, missä $X_i \in \Gamma$ ja $\mu(X_i) < \infty$.]

Kun $f \in \text{LIP}(X)$ ja $x \in X$, niin määritellään

$$|f|_x = \text{Lip } f(x).$$

2. Olkoon $g \in \text{LIP}(X)$, $x \in X$, $f = (f_1, \dots, f_n)$, missä $f_i \in \text{LIP}(X)$, ja $\lambda \in \mathbb{R}^n$. Osoita, että

$$\lim_{y \rightarrow x} \frac{|g(y) - g(x) - \lambda \cdot (f(y) - f(x))|}{d(x, y)} = 0,$$

jos ja vain jos $|g(\cdot) - \lambda \cdot f(\cdot)|_x = 0$.

3. Olkoon $\{(X_\alpha, x_\alpha)\}$ ei-degeneroitunut vahva mitallinen differentioituva strukturi. Osoita, että

$$|\lambda \cdot x_\alpha|_x > 0$$

kaikilla $\lambda \in \mathbb{R}^{N(\alpha)}$ ja m.k. $x \in X_\alpha$.

4. Oletetaan, että $X_\alpha \cap X_\beta \cap X_\gamma \neq \emptyset$. Osoita, että

$$M_{\alpha\beta}M_{\beta\gamma} = M_{\alpha\gamma}$$

melkein kaikkialla $X_\alpha \cap X_\beta \cap X_\gamma$:ssa.

5. (a) Osoita, että $|\cdot|_x: \text{LIP}(X) \rightarrow \mathbb{R}$ toteuttaa kolmioepäyhtälön

$$|f + g|_x \leq |f|_x + |g|_x$$

kaikilla $f, g \in \text{LIP}(X)$.

- (b) Olkoon $f \in \text{LIP}(X)$. Osoita, että

$$\|df(x)\|_x = \text{Lip } f(x)$$

melkein kaikilla $x \in X$ (ks. Korollari 6.9).