

Näiden tehtävien ratkaisut on palautettava viimeistään maanantaina 19.11.

1. Olkoon X täydellinen metrinen avaruus. Oletetaan, että kaikilla $x, y \in X$ ja kaikilla $\varepsilon > 0$ on olemassa $z \in X$ (ns. ε -keskipiste) s.e.

$$|2|x - z| - |x - y|| \leq \varepsilon \quad \text{ja} \quad |2|y - z| - |x - y|| \leq \varepsilon.$$

Osoita, että X on sisäinen.

2. Olkoon X_i , $i \in \mathbb{N}$, jono sisäisiä metrisiä avaruuksia, X täydellinen ja $d_{\text{GH}}(X_i, X) \rightarrow 0$. Osoita, että X on sisäinen.
3. Oletetaan, että $(X_i, p_i) \xrightarrow{\text{GH}} (X, p)$, missä X on sisäinen. Osoita, että $d_{\text{GH}}(B(p_i, r), B(p, r)) \rightarrow 0$ kaikilla $r > 0$.
4. Metrinen avaruus (X, d) on *kvasikonvekksi*, jos on olemassa vakio $C > 0$ s.e. mitkä tahansa pisteet $x, y \in X$ voidaan yhdistää polulla γ , jonka pituus on korkeintaan $C d(x, y)$.

Olkoon (X, d) rajoitetusti kompakti ja kvasikonvekksi. Määritellään X :ään *sisäinen metriikka* d_s asettamalla

$$d_s(x, y) = \inf_{\gamma} \ell(\gamma),$$

missä inf otetaan yli kaikkien x :n ja y :n yhdistävien polkujen. Osoita, että (X, d_s) on *geodeesinen*, ts. jokaista pistettä $x \in X$ ja $y \in X$ kohti on olemassa (X, d_s) :n polku γ pisteestä x pisteeseen y s.e.

$$d_s(x, y) = \ell_s(\gamma).$$

Tässä $\ell_s(\gamma)$ on γ :n pituus d_s -metriikassa.