

Näiden tehtävien ratkaisut on palautettava viimeistään maanantaina 12.11.

1. Olkoot (X_i, p_i) , $i \in \mathbb{N}$, tuplaavia ankkuroituja metrisiä avaruuksia ja $c_0 \in \mathbb{N}$ vakio s.e. jokaisella $i \in \mathbb{N}$ ja $\delta > 0$ jokainen joukko $A \subset X_i$ voidaan peittää joukoilla $B_1, \dots, B_{c_0} \subset X_i$, joilla $\text{diam } B_k \leq \text{diam } A/2 + \delta$, $k = 1, \dots, c_0$. Oletetaan, että $(X_i, p_i) \xrightarrow{\text{GH}} (X, p)$. Osoita, että X :llä on myös sama ominaisuus samalla vakiolla c_0 (ts. jokaisella $\delta > 0$ jokainen joukko $A \subset X$ voidaan peittää joukoilla $B_1, \dots, B_{c_0} \subset X$, joilla $\text{diam } B_k \leq \text{diam } A/2 + \delta$, $k = 1, \dots, c_0$).
2. Olkoon μ tuplaava mitta metrisessä avaruudessa X s.e. jokainen avoin kuula on mitallinen ja $0 < \mu(X) < \infty$. Osoita, että $\text{diam } X < \infty$.
3. Olkoon μ tuplaava mitta X :ssä s.e. jokainen avoin kuula on mitallinen. Osoita, että X on tuplaava vakiolla, joka riippuu vain μ :n tuplausvakiosta.
4. Olkoon X tuplaava metrinen avaruus vakiolla C , $x_0 \in X$ ja $k \geq 0$. Osoita, että $\text{card } P \leq C^{k+3}$, jos P on 2^{-k} -verkko kuulassa $B(x_0, 1) \subset X$.
5. Todista Lemma 4.6: Olkoon (X, d) tuplaava metrinen avaruus vakiolla C , $x_0 \in X$ ja $s > 0$. Silloin on olemassa äärellisen monta s -säteistä kuulaa $B_1, \dots, B_N$ s.e. $B(x_0, 1) \subset \cup_i B_i$ ja jokainen yhdisteen $\cup_i B_i$ piste kuuluu korkeintaan M :ään kuulaan B_j , missä vakio $M \in \mathbb{N}$ riippuu vain tuplausvakiosta C ja $N \in \mathbb{N}$ riippuu vain C :stä ja s :stä.