

Näiden tehtävien ratkaisut on palautettava viimeistään maanantaina 5.11.

1. Konstruoi kompaktit metriset avaruudet X ja X_i , $i \in \mathbb{N}$, siten, että $d_{\text{GH}}(X_i, X) \rightarrow 0$, mutta ettei ehto

$$d_{\text{GH}}(\bar{B}_{x_i}(p_i, r), \bar{B}_X(p, r)) \rightarrow 0 \quad \forall r > 0$$

toteudu millään valinnoilla $p_i \in X_i$, $p \in X$.

2. Olkoon ω vapaa ultrafiltteri $\mathbb{N}$:ssä, Y topologinen avaruus ja $S \subset Y$ suljettu. Olkoon $y_n \in Y$, $n \in \mathbb{N}$, jono s.e. $y_n \in S$ kaikilla $n \in A$, missä $\omega(A) = 1$. Oletetaan, että $\lim_{\omega} y_n$ on olemassa. Osoita, että $\lim_{\omega} y_n \in S$.

3. Olkoot (X_i, p_i) , $i \in \mathbb{N}$, tuplaavia ankkuroituja metrisiä avaruuksia samalla tuplausvakiolla C . Oletetaan, että $(X_i, p_i) \xrightarrow{\text{GH}} (X, p)$. Osoita, että X on tuplaava vakiolla, joka riippuu vain C :stä (esim. vakiolla C^2).

4. Konstruoi metrinen avaruus X ja pisteet $p \in X$ ja $q \in X$ siten, että jokaisella $r > 0$ kuulat $B(p, r)$ ja $B(q, r)$ ovat isometriset, mutta ettei ole olemassa isometriaa $f: X \rightarrow X$, jolla $f(p) = q$.

[Vihje: Yritä konstruoida X niin, että $\text{card } X = 5$.]

5. Oletetaan, että $(X_i, p_i) \xrightarrow{\text{GH}} (X, p)$, missä X_i :t ovat rajoitetusti kompakteja ja X on täydellinen. Osoita, että X on rajoitetusti kompakti.