Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Metrinen geometria
Harjoitus 5
15.3.2006

Nämä tehtävät on palautettava viimeistään **keskiviikkona 15.3.**

Maanantaina 6.3 ja keskiviikkona 8.3 ei ole luentoja.

1. Osoita, että $\langle x, y\rangle_{n,1} \leq -1$ kaikilla $x, y \in \mathbb{H}^n$ ja että $\langle x, y\rangle_{n,1} = -1 \iff x = y$.

2. Olkoon $x \in \mathbb{H}^n$, $u \in x^{\perp}$ yksikkövektori ($\langle \cdot, \cdot\rangle_{n,1}$:n suhteen) ja $\gamma\colon \mathbb{R} \to \mathbb{H}^n$,
$$\gamma(t) = (\cosh t)x + (\sinh t)u,$$
kuten luentomuistiinpanojen kaavassa (2.10). Laske $\gamma'(t) \in \mathbb{R}^{n+1}$ ja osoita, että $\gamma'(t) \in \gamma(t)^{\perp}$. Laske
$$\|\gamma'(t)\| := \langle \gamma'(t), \gamma'(t)\rangle_{n,1}^{1/2}.$$

3. Olkoon $Z = \{0, 1, 1/2, 1/4, \ldots, 2^{-n}, \ldots\}$. Liimataan isometrisesti yhteen kaksi $\mathbb{R}$:n kopiota pitkin Z:aa ja olkoon X näin saatu metrinen avaruus (ks. Theorem 1.87). Olkoot $\alpha\colon [0,\infty) \to X$ ja $\beta\colon [0,\infty) \to X$ pisteestä 0 (tark. $[0]$) lähteviä geodeeseja siten, että
$$\alpha(t) = \beta(t) \iff t \in Z.$$
Määrää $\angle_0(\alpha, \beta)$ ja osoita, ettei tämä kulma ole olemassa vahvassa mielessä.

4. Olkoot $\gamma_n\colon [0, 1/n] \to (\mathbb{R}^2, d_\infty)$,
$$\gamma_n(t) = \big(t, t^n(1-t)^n\big),\ n \in \mathbb{N},\ n \geq 2,$$
origosta lähteviä geodeeseja. Osoita, että $\angle_0(\gamma_n, \gamma_m) = 0$ kaikilla $n, m \geq 2$.