Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Metrinen geometria
Harjoitus 4
22.2.2006

Nämä tehtävät on palautettava viimeistään **keskiviikkona 22.2.**
Tehtävissä 1, 2 ja 3 $(X_\alpha, d_\alpha)_{\alpha \in \mathcal{A}}$, $Z$, $i_\alpha \colon Z \to Z_\alpha$ ja $(\bar{X}, \bar{d})$ ovat kuten isometrisessä liimauksessa pitkin $Z$:aa (ks. Theorem 1.87).

1. Osoita, että $\bar{X}$ on täydellinen, jos jokainen $X_\alpha$ on täydellinen.

2. Oletetaan, että jokainen $X_\alpha$ on lokaalisti kompakti ja että indeksijoukko $\mathcal{A}$ on äärellinen. Osoita, että $\bar{X}$ on lokaalisti kompakti.

3. Anna esimerkki tapauksesta, jossa $X_i$ on täydellinen geodeesinen avaruus, $i \in \mathcal{A} = \{1, 2\}$, mutta $\bar{X}$ ei ole geodeesinen avaruus.

4. Olkoon $(X, d)$ metrinen graafi (ks. Example 1.86 (2)). Oletetaan, että jokaisella $v \in V$
$$\inf\{\ell(e) \colon e \in E, v \in \{\partial_0 e, \partial_1 e\}\} > 0.$$
Osoita, että $(X, d)$ on sisäinen metrinen avaruus. Onko se täydellinen?

5. Olkoon $(X, d)$ metrinen avaruus, $\mathcal{T}_d$ metriikan $d$ määräämä topologia ja $\sim$ ekvivalenssirelaatio $X$:ssä. Oletetaan, että ekvivalenssirelaatioon liittyvä tekijäpseudometriikka $\bar{d}$ on metriikka $\bar{X}$:ssa. Tällöin se määrää $\bar{X}$:aan topologian $\mathcal{T}_{\bar{d}}$. Toisaalta $\bar{X}$:ssa on ns. tekijätopologia $\mathcal{T}_\sim$, jossa $U \in \mathcal{T}_\sim \iff \pi^{-1} U \in \mathcal{T}_d$. Osoita, että $\mathcal{T}_{\bar{d}} \subset \mathcal{T}_\sim$.