

Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Metriinen geometria
Harjoitus 3
15.2.2006

Nämä tehtävät on palautettava viimeistään **keskiviikkona 15.2.**

1. Olkoon (\mathbb{R}^2, d) metriinen avaruus, missä

$$d((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = |x_1 - x_2| + \sqrt{|y_1 - y_2|}.$$

Etsi d :hen liittyvä yleistetty sisäinen metriikka (generalized inner metric) d_s . Millainen on d_s :n määräämä topologia \mathcal{T}_{d_s} ?

2. Olkoon X sisäinen avaruus ja $x, y \in X$, $x \neq y$. Osoita, että

$$\text{dist}(x, B(y, r)) = |x - y| - r,$$

kun $r < |x - y|$.

3. Osoita, että sisäisen avaruuden täydellistymä on sisäinen avaruus.

4. Konstruoi täydellinen sisäinen avaruus, joka ei ole geodeesinen avaruus.

5. Konstruoi lokaalisti kompakti geodeesinen avaruus, jonka täydellistymä ei ole geodeesinen eikä lokaalisti kompakti.

[Vihjeitä kääntöpuolella.]

2

4. Yhdistä tasossa pisteet $(0, 0)$ ja $(0, 1)$ poluilla, joiden pituudet ovat $1 + 1/i$ ja jotka leikkaavat toisensa vain päätepisteissä. Varusta sitten näin saatu joukko $(\subset \mathbb{R}^2)$ indusoidulla sisäisellä metriikalla.

5. Varusta tason pistejoukko

$$((0, 1] \times \{0\}) \cup ((0, 1] \times \{1\}) \cup \bigcup_{i=1}^{\infty} \{1/n\} \times [0, 1]$$

tason tavallisen metriikan indusoimalla sisäisellä metriikalla.