Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Metrinen geometria
Harjoitus 2
8.2.2006

Nämä tehtävät on palautettava viimeistään **keskiviikkona 8.2.**

1. Olkoon (X, d) metrinen avaruus ja $0 < \alpha < 1$. Etsi kaikki metrisen avaruuden (X, d^α) suoristuvat polut.

2. Olkoon $f\colon [0,1] \to [0,1]$ Cantorin 1/3-funktio ja olkoon $\gamma\colon [0,1] \to \mathbb{R}^2$ polku
$$\gamma(t) = (t, f(t)).$$
Laske $V_\gamma(0,t)$, kun $t \in [0,1]$, ja tutki metrisen derivaatan $|\dot{\gamma}|(t)$ olemassaoloa ja arvoja. Tee näistä johtopäätöksiä.

3. Konstruoi suoristuvasti polkuyhtenäinen metrinen avaruus (X, d) niin, että $\mathcal{T}_{d_s} \not\subset \mathcal{T}_d$. Toisin sanoen, että on olemassa avoimia joukkoja sisäisen metriikan määräämässä topologiassa, jotka eivät ole avoimia alkuperäisessä (d:n määräämässä) topologiassa.

4. Osoita, etteivät metriset avaruudet $(\mathbb{R}^2, d_1)$ ja $(\mathbb{R}^2, d_\infty)$ ole yksikäsitteisesti geodeettisia etsimällä pisteet x ja y, jotka voidaan yhdistää useammalla kuin yhdellä geodeesilla. Tässä d_1 ja d_∞ ovat normien $\|\cdot\|_1$ ja $\|\cdot\|_\infty$ määräämiä metriikkoja.

5. Todista luentomuistiinpanojen Lauseen 1.64 (b)-kohta.