Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Metrinen geometria
Harjoitus 1
1.2.2006

Kurssin voi suorittaa joko (a) ratkaisemalla (riittävän määrän) kotitehtäviä ja palauttamalla ratkaisut kirjallisena arvosteltaviksi tai (b) loppukokeella. Nämä tehtävät on palautettava viimeistään **keskiviikkona 1.2.**

1. Olkoon (X, d) metrinen avaruus.
   (a) Osoita, että (X, d^α), $0 < \alpha < 1$, on metrinen avaruus.
   (b) Osoita, että (X, d_0), missä
   $$d_0(x, y) = \frac{d(x, y)}{1 + d(x, y)},$$
   on metrinen avaruus.
   (c) Tutki, ovatko topologiat $\mathcal{T}_d$, $\mathcal{T}_{d^\alpha}$ ja $\mathcal{T}_{d_0}$ samat.

2. [Kuratowski] Osoita, että jokainen metrinen avaruus X voidaan isometrisesti upottaa Banach-avaruuteen $\ell^\infty(X)$.

3. [Fréchet] Osoita, että jokainen separoituva metrinen avaruus voidaan isometrisesti upottaa Banach-avaruuteen $\ell^\infty = \ell^\infty(\mathbb{N})$.

4. Osoita, että metrinen avaruus X on täydellinen, jos ja vain jos sillä on seuraava ominaisuus: Jos (X_n) on jono epätyhjiä suljettuja X:n osajoukkoja s.e. $X_{n+1} \subset X_n$ ja $\operatorname{diam}(X_n) \to 0$, niin $\cap_n X_n \neq \emptyset$.

5. (a) Olkoon $f \colon X \to Y$ bi-Lipschitz homeomorfismi. Osoita, että X on täydellinen, jos ja vain jos Y on täydellinen.
   (b) Anna esimerkki homeomorfisista metrisistä avaruuksista X ja Y s.e. X on täydellinen, mutta Y ei ole täydellinen.

6. Olkoon $X = (\mathbb{R}^2, d_\infty)$, missä d_∞ on normin $\|\cdot\|_\infty$ määräämä metriikka, ja olkoon $Y = \mathbb{R}^2$ varustettuna standardilla metriikalla. Olkoon
   $$A = \{(-1, 1), (1, -1), (1, 1)\}$$
   ja $f \colon A \to Y$,
   $$f(-1, 1) = (-1, 0), \quad f(1, -1) = (1, 0), \quad f(1, 1) = (0, \sqrt{3}).$$
   Osoita, että f on 1-Lipschitz kuvaus, jolla ei ole 1-Lipschitz jatkoa joukkoon $A \cup \{(0, 0)\}$.

[Vihjeitä kääntöpuolella.]

2. Kiinnitä $x_0 \in X$ ja tutki funktioita $f_y\colon X \to \mathbb{R},\ f_y(x) = |x-y| - |x-x_0|$.
3. Kiinnitä tiheä $\{x_0, x_1, \ldots\} \subset X$ ja tutki kuvausta

$$x \mapsto \big(|x - x_1| - |x_1 - x_0|, |x - x_2| - |x_2 - x_0|, \ldots\big).$$