Johdatus differentiaaligeometriaan

Ilkka Holopainen[1]

8. toukokuuta 2020

[1]Ilmoita painovirheistä esim. sähköpostitse osoitteeseen ilkka.holopainen@helsinki.fi

Sisältö

0 Topologian kertausta ja täydennystä

0.1 Topologinen avaruus

Olkoon X (mikä tahansa) joukko ja

$$\mathcal{P}(X) = \{A\colon A \subset X\}$$

X:n potenssijoukko. Kokoelma $\mathcal{T} \subset \mathcal{P}(X)$ on *X:n topologia*, jos

1. $\mathcal{T}$ sisältää jäsentensä mielivaltaiset yhdisteet, ts.

   $$U_\alpha \in \mathcal{T} \Rightarrow \bigcup_{\alpha \in \mathcal{A}} U_\alpha \in \mathcal{T},$$

   missä $\mathcal{A}$ on mikä tahansa indeksijoukko;

2. $\mathcal{T}$ sisältää jäsentensä äärelliset leikkaukset, ts.

   $$U_1, \ldots, U_k \in \mathcal{T} \Rightarrow \bigcap_{i=1}^{k} U_i \in \mathcal{T};$$

3. $\emptyset \in \mathcal{T},\ X \in \mathcal{T}$.

Pari $(X, \mathcal{T})$, tai lyhyemmin X, on *topologinen avaruus.* Topologian $\mathcal{T}$ alkioita kutsutaan *avoimiksi joukoiksi*. Joukko $F \subset X$ on *suljettu*, jos komplementti $X \setminus F$ on avoin.

Example 0.2. 1. Olkoon (X, d) metrinen avaruus. Toisin sanoen $d\colon X \times X \to \mathbb{R}$ toteuttaa (metriikan) ehdot:

$$\begin{aligned}
&d(x,y) \geq 0 \quad \forall x, y \in X \\
&d(x,y) = 0 \iff x = y \\
&d(x,y) = d(y,x) \quad \forall x, y \in X \\
&d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y) \quad \forall x, y, z \in X \quad \text{(kolmioepäyhtälö, } \triangle\text{-ey).}
\end{aligned}$$

Tällöin metriikka d määrittelee X:lle topologian $\mathcal{T}_d$.
$U \in \mathcal{T}_d \iff \forall x \in U\ \exists r > 0$ s.e. avoin kuula $B(x,r) = \{y \in X : d(x,y) < r\} \subset U$.

2. Erikoistapaus: Euklidinen avaruus $\mathbb{R}^n$ varustettuna metriikalla $d(x,y) = |x - y|$.

3. Topologinen avaruus $(X, \mathcal{T})$ on *metristyvä*, jos $\exists$ metriikka d s.e. $\mathcal{T} = \mathcal{T}_d$.

Joukko U on pisteen $x \in X$ *ympäristö*, jos $x \in U \in \mathcal{T}$ (ts. U on avoin ja sisältää x:n). Pätee: Joukko $A \subset X$ on avoin $\iff \forall x \in A\ \exists\ x$:n ympäristö U s.e. $U \subset A$.

Topologinen avaruus $(X, \mathcal{T})$ on *Hausdorff*, jos sen eri pisteillä on olemassa erilliset ympäristöt. (Ts. $\forall x, y \in X,\ x \neq y$, on olemassa $U \in \mathcal{T},\ V \in \mathcal{T}$ s.e. $x \in U,\ y \in V$, ja $U \cap V = \emptyset$.)

Example 0.3. 1. Jokainen metristyvä topologinen avaruus on Hausdorff. (HT)

2. <u>Esim.</u> Samastetaan joukon $\mathbb{R}^n \times \{0\} \cup \mathbb{R}^n \times \{1\}$ pisteet $(x, 0)$ ja $(x, 1)$ aina, kun $x \neq 0$. Saadaan avaruus X, jolla on "kaksi origoa". Annetaan X:lle topologia sanomalla, että $U \subset X$ on avoin $\iff$ U:n alkukuva samastuksessa on avoin. Tällöin pisteillä $a = (0,0)$ ja $b = (0,1)$ ei ole erillisiä ympäristöjä, joten X ei ole Hausdorff. (Ylim. HT: X:n topologian tarkka konstruktio.)

Sanomme, että X:n pistejono (x_i), $i \in \mathbb{N}$, suppenee kohti pistettä $x \in X$ (merkitään $x_i \to x$), jos $\forall$ x:n ympäristöä U kohti $\exists$ $i_0 \in \mathbb{N}$ s.e. $x_i \in U$ $\forall i \geq i_0$. Totea: jos X on Hausdorff ja $x_i \to x$ ja $x_i \to y$, niin $x = y$.

Olkoon $(X, \mathcal{T})$ topologinen avaruus. Kokoelma $\mathcal{B} \subset \mathcal{P}(X)$ on topologian $\mathcal{T}$ *kanta* (tai X:n kanta), jos

1. $\mathcal{B} \subset \mathcal{T}$,
2. jokainen $U \in \mathcal{T}$, $U \neq \emptyset$, voidaan esittää yhdisteenä joistakin $\mathcal{B}$:n jäsenistä.

Example 0.4. Olkoon (X, d) metrinen avaruus. Tällöin

$$\mathcal{B} = \{B(x, r) \colon x \in X, \ r > 0\}$$

on $\mathcal{T}_d$:n eräs kanta.

Tämän kurssin kannalta tärkeä on tapaus, jossa $\mathcal{T}$:llä on *numeroituva kanta* $\mathcal{B} = \{B_i \colon i \in \mathbb{N}\}$. Tällöin sanomme, että $(X, \mathcal{T})$ on N_2 (engl. "second countable").

Example 0.5. Euklidinen avaruus $\mathbb{R}^n$ varustettuna tavallisella topologialla on N_2. Valitse esim. $\mathcal{B} = \{B(q, r) \colon q \in \mathbb{Q}^n, \ r \in \mathbb{Q}_+\}$.

Olkoot X ja Y topologisia avaruuksia. Sanomme, että kuvaus $f \colon X \to Y$ on *jatkuva* pisteessä $x \in X$, jos $\forall$ $f(x)$:n ympäristöä V kohti $\exists$ x:n ympäristö U s.e. $fU \subset V$. Kuvaus f on jatkuva X:ssä, jos se on jatkuva jokaisessa X:n pistessä.
Pätee: $f \colon X \to Y$ on jatkuva X:ssä $\iff$ $\forall$ avoimen $U \subset Y$ alkukuva $f^{-1}U = \{x \in X \colon f(x) \in U\}$ on avoin $\iff$ $\forall$ suljetun $F \subset Y$ alkukuva $f^{-1}F$ on suljettu. (HT)

Kuvaus $f \colon X \to Y$ on *homeomorfismi*, jos

1. f on bijektio,
2. f on jatkuva, ja
3. f^{-1} on jatkuva.

Olkoon X joukko, $(Y, \mathcal{T}')$ topologinen avaruus, ja $f \colon X \to Y$ kuvaus. Tällöin kokoelma

$$\mathcal{T} = \{f^{-1}U \colon U \in \mathcal{T}'\}$$

on X:n topologia (kuvauksen f topologiasta $\mathcal{T}'$ indusoima topologia). Huom. Kuvaus f on tällöin automaattisesti jatkuva.

Jos $(X, \mathcal{T})$ on topologinen avaruus ja $A \subset X$, niin *inkluusion* $i \colon A \to X$, $i(x) = x$, indusoimaa topologiaa sanotaan $(X, \mathcal{T})$:n *relatiivitopologiaksi* A:ssa (merk. $\mathcal{T}|A$). Siis

$$\mathcal{T}|A = \{U \cap A \colon U \in \mathcal{T}\}.$$

Toisin sanoen, joukko $V \subset A$ on avoin A:ssa (eli $V \in \mathcal{T}|A$) $\iff$ $V = U \cap A$ jollakin avoimella $U \subset X$ (eli $U \in \mathcal{T}$).

Sekä Hausdorff- että N_2-ominaisuus ovat *periytyviä*:

Olkoon $(X, \mathcal{T})$ topol. avaruus ja $A \subset X$. Silloin

1. $(X, \mathcal{T})$ on Hausdorff $\Rightarrow$ $(A, \mathcal{T}|A)$ Hausdorff,
2. $(X, \mathcal{T})$ on N_2 $\Rightarrow$ $(A, \mathcal{T}|A)$ on N_2.

Todistus (HT).

Olkoot $(X_1, \mathcal{T}_1), \dots, (X_k, \mathcal{T}_k)$ topologisia avaruuksia. Merkitään

$$X = X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_k = \{(x_1, \dots, x_k) \colon x_i \in X_i\}.$$

Kokoelma

$$\mathcal{B} = \{U_1 \times U_2 \times \cdots \times U_k \colon U_i \subset X_i \text{ avoin}\}$$

on X:n erään topologian, ns. *tulotopologian*, kanta.

Remark 0.6.

1. Olkoot $(X_i, \mathcal{T}_i)$, $i = 1, \dots, k$, Hausdorff-avaruuksia. Tällöin $X = X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_k$ varustettuna tulotopologialla on Hausdorff.
2. Olkoot $(X_i, \mathcal{T}_i)$, $i = 1, \dots, k$, topologisia avaruuksia, joilla on numeroituva kanta (ts. jokainen $(X_i, \mathcal{T}_i)$ on N_2). Silloin $X = X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_k$ varustettuna tulotopologialla on N_2.

Ylläolevien väitteiden todistus (HT).

Seuraavaksi hyödyllinen tulos, jota voidaan käyttää monissa olemassaolo-todistuksissa. Ensin kuitenkin muistutus.

Definition 0.7. Olkoon (X, d) metrinen avaruus. Jono (x_i), $x_i \in X$, on *Cauchy-jono*, jos $\forall \varepsilon > 0\ \exists i_\varepsilon \in \mathbb{N}$ s.e. $d(x_i, x_j) < \varepsilon$ aina kun $i, j \geq i_\varepsilon$. Metrinen avaruus X on *täydellinen*, jos sen jokainen Cauchy-jono suppenee.

Theorem 0.8 (Kiintopistelause, Kontraktiokuvauslause)**.** *Olkoon X täydellinen metrinen avaruus ja $f \colon X \to X$ kuvaus. Oletetaan, että $\exists$ vakio $L \in [0, 1[$ s.e.*

$$d(f(x), f(y)) \leq L d(x, y) \quad \forall\ x, y \in X.$$

Silloin f:llä on olemassa yksikäsitteinen kiintopiste, ts. $\exists$ yksikäsitteinen $x_0 \in X$ s.e. $f(x_0) = x_0$.

Todistus. Olkoon $y_0 \in X$ mielivaltainen. Määritellään rekursiivisesti pisteet

$$y_{i+1} = f(y_i), \quad i = 0, 1, 2, \dots$$

Induktiolla nähdään, että

$$d(y_{i+1}, y_i) \leq L^i d(y_0, y_1).$$

Kolmioepäyhtälöstä seuraa nyt, että

$$d(y_i, y_j) \leq \big(L^i + \cdots + L^{j-1}\big) d(y_0, y_1), \quad \text{jos } i < j.$$

Koska $0 \leq L < 1$, niin sarja

$$1 + L + L^2 + \cdots$$

suppenee, joten jäännöstermi $\to 0$. Siis

$$L^i + L^{i+1} + \cdots + L^{j-1} \to 0, \quad \text{kun } i, j \to \infty.$$

Siten (y_i) on Cauchy-jono. Koska X on täydellinen, niin (y_i) suppenee, ts.

$$y_i \to x_0 \in X.$$

Nyt

$$\begin{aligned} d\big(y_i, f(y_i)\big) &= d\big(f(y_{i-1}), f(y_i)\big) \\ &\le L \underbrace{d(y_{i-1}, y_i)}_{\le L^{i-1} d(y_0,y_1)} \le L^i d(y_0, y_1). \end{aligned}$$

Saatiin

$$\begin{aligned} d\big(x_0, f(x_0)\big) &\le d(x_0, y_i) + d\big(y_i, f(y_i)\big) + \underbrace{d\big(f(y_i), f(x_0)\big)}_{\le L(y_i,x_0)} \\ &\le (1+L)d(x_0, y_i) + L^i d(y_0, y_1) \xrightarrow{i\to\infty} 0. \end{aligned}$$

Siis on oltava $d(x_0, f(x_0)) = 0$ eli $x_0 = f(x_0)$. Jos x_0' on toinen kiintopiste, niin

$$d(x_0', x_0) = d\big(f(x_0'), f(x_0)\big) \le L d(x_0', x_0),$$

ja koska $L < 1$, on oltava $x_0' = x_0$. □

0.9 Topologinen monisto

Definition 0.10. Olkoon M topologinen avaruus. Sanomme, että M on *topologinen n-monisto*, $n \in \mathbb{N}$, jos

1. M on Hausdorff,
2. M:n topologialla on numeroituva kanta (eli M on N_2),
3. jokaisella M:n pisteellä x on olemassa ympäristö, joka on homeomorfinen $\mathbb{R}^n$ avoimen joukon kanssa.

Remark 0.11.
1. Ehto 3 tarkoittaa, että M on "lokaalisti homeomorfinen $\mathbb{R}^n$:n kanssa".
2. Ehto 3 $\iff$ jokaisella $x \in M$ $\exists$ ympäristö U, joka on homeomorfinen avoimen kuulan $B^n(0,1) = \{y \in \mathbb{R}^n \colon |y| < 1\}$ (tai yhtäpitävästi koko $\mathbb{R}^n$:n kanssa).
3. Pätee: Jos M on sekä topologinen n-monisto että topologinen m-monisto, niin tällöin $m = n$. (Ei todisteta. Todistuksessa käytetään algebrallista topologiaa (alueen invarianssi).)
4. Ominaisuudet 1 ja 2 eivät seuraa ehdosta 3. Esimerkiksi ylinumeroituva pistevieras yhdiste $\mathbb{R}^n$:stä toteuttaa ehdon 3, muttei ole N_2. Toisaalta Esimerkin 0.3 topologinen avaruus toteuttaa ehdon 3, muttei ole Hausdorff.

Olkoon M topologinen n-monisto. Sanomme, että pari (U, φ) on kartta M:llä, jos

(a) $U \subset M$ on avoin ja

(b) $\varphi \colon U \to \varphi U \subset \mathbb{R}^n$ on homeomorfismi ja $\varphi U \subset \mathbb{R}^n$ on avoin.

Jos lisäksi $p \in U$, niin (U, φ) on kartta p:ssä.

Jatkossa merkitään usein (U, x), $x = (x^1, \dots, x^n)$, jossa siis $x \colon U \to xU \subset \mathbb{R}^n$ on homeomorfismi ja $x^1, x^2, \dots, x^n$ ovat x:n koordinaattifunktioita (so. reaaliarvoisia funktioita $x^i \colon U \to \mathbb{R}$).

Perusesimerkki topologisesta n-monistosta on (tietenkin) $M = \mathbb{R}^n$ varustettuna tavallisella topologialla. Aiemmin todettiin, että $\mathbb{R}^n$ on Hausdorff ja N_2.

Topologisen n-moniston määritelmän karkea idea: Ehdot takaavat sen, että M:llä on monia $\mathbb{R}^n$:n hyviä ominaisuuksia.
Hausdorff: mm. suppenevien jonojen raja-arvot ovat yksikäsitteisiä.
N_2: tärkeä ominaisuus, jota tarvitaan ykkösen osituksessa.

Example 0.12. 1. Jokainen avoin $U \subset \mathbb{R}^n$, $U \neq \emptyset$, on topologinen n-monisto. (Hausdorff ja N_2 ovat periytyviä).

2. Jatkuvien funktioiden kuvaajat: Olkoon $U \subset \mathbb{R}^n$ avoin ja $f\colon U \to \mathbb{R}^k$ jatkuva. Sanomme, että f:n kuvaaja on $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k$:n osajoukko

$$\Gamma(f) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k \colon x \in U,\ y = f(x)\}$$

varustettuna relatiivitopologialla. Nyt $\Gamma(f)$ on Hausdorff ja N_2. Olkoon $\pi_1\colon \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^n$ projektio $(x, y) \mapsto x$ ja $\varphi_f\colon \Gamma(f) \to U$ rajoittumakuvaus

$$\begin{aligned} \varphi_f &= \pi_1 | \Gamma(f), \\ \varphi_f(x, y) &= x, \quad (x, y) \in \Gamma(f). \end{aligned}$$

Koska π_1 on jatkuva, niin φ_f on jatkuva (relatiivitopologia). Lisäksi φ_f on homeomorfismi, koska sillä on jatkuva käänteiskuvaus

$$\varphi_f^{-1}(x) = (x, f(x)).$$

Siten $\Gamma(f)$ on topologinen n-monisto (homeomorfinen U:n kanssa).

3. Pallo(kuori) $\mathbb{S}^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \colon |x| = 1\}$ on topologinen n-monisto (relatiivitopologia). <u>Perustelu:</u> $\mathbb{S}^n$ voidaan peittää avoimilla joukoilla, jotka voidaan esittää jatkuvien funktioiden kuvaajina (palautuu siten edelliseen esimerkkiin). <u>Esim.</u> Olkoon

$$U_{n+1}^+ = \{(x^1, \ldots, x^{n+1}) \in \mathbb{S}^n \colon x^{n+1} > 0\}.$$

Nyt $U_{n+1}^+ = \Gamma(f) = (x, f(x)$, missä $f\colon B^n \to \mathbb{R},\ f(x) = \sqrt{1 - |x|^2}$. Samoin voidaan käsitellä kaikki U_i^+:t ja U_i^-:t,

$$\begin{aligned} U_i^+ &= \{(x^1, \ldots, x^{n+1}) \in \mathbb{S}^n \colon x^i > 0\} \\ U_i^- &= \{(x^1, \ldots, x^{n+1}) \in \mathbb{S}^n \colon x^i < 0\}. \end{aligned}$$

4. Olkoot M_i topologisia n_i-monistoja, $i = 1, 2, \ldots, k$. Silloin

$$M = M_1 \times M_2 \times \cdots \times M_k$$

on topologinen n-monisto, missä $n = n_1 + n_2 + \cdots + n_k$. Perustelu: Aiemmin todettu, että M on Hausdorff ja N_2. Jos $p = (p_1, \ldots, p_k) \in M_1 \times M_2 \times \cdots \times M_k$, niin valitaan kartat (U_i, φ_i) M_i:ssä s.e. $p_i \in U_i$, $\forall i = 1, \ldots, k$. Tulokuvaus

$$\varphi_1 \times \cdots \times \varphi_k \colon U_1 \times \cdots \times U_k \to\ R^n$$

on homeomorfismi kuvalleen, joka on $\mathbb{R}^n$:n avoin osajoukko. Tehdään samoin $\forall p \in M$.
Esimerkki tulomonistosta: n-torus

$$T^n = \underbrace{\mathbb{S}^1 \times \cdots \times \mathbb{S}^1}_{n \text{ kpl}}.$$

5. Projektiivinen avaruus $\mathbb{R}P^n$ (n-ulotteinen reaalinen projektiivinen avaruus) on kaikkien $\mathbb{R}^{n+1}$:n 1-ulotteisten lineaaristen aliavaruuksien joukko eli kaikkien $\mathbb{R}^{n+1}$:n origon kautta kulkevien suorien joukko. $\mathbb{R}P^n$ saadaan myös samastamalla pisteet $x \in \mathbb{S}^n$ ja $-x \in \mathbb{S}^n$. Tarkemmin: määritellään $\mathbb{S}^n$:ään ekvivalenssirelaatio:

$$x \sim y \iff x = \pm y,\ x, y \in \mathbb{S}^n.$$

Silloin $\mathbb{R}P^n = \mathbb{S}^n/{\sim} = \{[x] \colon x \in \mathbb{S}^n\}$. Annetaan $\mathbb{R}P^n$:lle ns. tekijätopologia, jolloin $\mathbb{R}P^n$ on topologinen n-monisto.

Tekijätopologiasta:

Definition 0.13. Olkoon $(X, \mathcal{T})$ topologinen avaruus, $\sim$ ekvivalenssirelaatio X:ssä, ja $\pi \colon X \to X/{\sim}$ luonnollinen projektio, $x \mapsto [x]$. Silloin kokoelmaa

$$\{U \subset X/{\sim} \,:\, \pi^{-1}U \in \mathcal{T}\}$$

sanotaan $X/{\sim}$:n tekijätopologiaksi.

Joukko $\Gamma = \{(x, x') \in X \times X \colon x \sim x'\}$ on ekvivalenssirelaation $\sim$ graafi. Sanomme, että $\sim$ on avoin (suljettu), jos projektio $\pi \colon X \to X/{\sim}$ on avoin (suljettu) kuvaus.

[Huom.: Olkoot X, Y topologisia avaruuksia. Kuvaus $f \colon X \to Y$ on avoin (suljettu), jos jokaisen avoimen (suljetun) joukon $A \subset X$ kuva fA on avoin (suljettu) Y:ssä.]

Theorem 0.14. *Jos $X/{\sim}$ on Hausdorff, niin ekvivalenssirelaation $\sim$ graafi Γ on suljettu joukko $X \times X$:ssä. Jos $\Gamma \subset X \times X$ suljettu, ja $\sim$ on avoin, niin $X/{\sim}$ on Hausdorff.*

Todistusta varten tarvitaan lemma.

Lemma 0.15. *X on Hausdorff $\iff$ (diagonaalijoukko) $\Delta_X = \{(x, x) \in X \times X \colon x \in X\}$ on suljettu $X \times X$:ssä.*

Todistus. X Hausdorff $\iff$ $\forall\, p, q \in X,\ p \neq q,\ \exists$ (erilliset) ympäristöt $U_p \ni p,\ U_q \ni q$ s.e. $(U_p \times U_q) \cap \Delta_X = \emptyset \iff (X \times X) \setminus \Delta_X$ avoin. □

Lauseen 0.14:n todistus. $X/{\sim}$ Hausdorff $\Rightarrow$ $\Delta_{X/\sim}$ on suljettu, joten $\Gamma = (\pi \times \pi)^{-1}(\Delta_{X/\sim})$ on suljettu. Oletetaan sitten, että Γ on suljettu ja $\sim$ avoin. Jos $X/{\sim}$ ei ole Hausdorff, $\exists$ erilliset pisteet $[x], [y] \in X/{\sim}$, joiden kaikille ympäristöille $U_{[x]}, U_{[y]}$ pätee $U_{[x]} \cap U_{[y]} \neq \emptyset$. Olkoot V_x, V_y mitkä tahansa x:n ja y:n ympäristöt. Koska $\sim$ on avoin, $\pi(V_x), \pi(V_y)$ ovat $[x]$:n ja $[y]$:n ympäristöjä. Koska $\pi(V_x) \cap \pi(V_y) \neq \emptyset,\ \exists\ x' \in V_x,\ y' \in V_y$ s.e. $[x'] = [y']$, ts. $x' \sim y'$ eli $(x', y') \in \Gamma$. Siis $(x, y) \in \bar{\Gamma}$ (mikä tahansa (x, y):n ympäristö leikkaa Γ:aa). Koska Γ on suljettu, $(x, y) \in \Gamma$ eli $[x] = [y]$. Saatiin ristiriita, joten $X/{\sim}$ on Hausdorff. □

Theorem 0.16. *Jos X on N_2 ja $\sim$ on avoin ekvivalenssirelaatio X:ssä, niin $X/{\sim}$ on N_2.*

Todistus Olkoon $\mathcal{B} = \{B_i \colon i \in \mathbb{N}\}$ X:n numeroituva kanta. Väite: $[\mathcal{B}] = \{[B_i] \colon i \in \mathbb{N}\}$ on $X/{\sim}$:n numeroituva kanta. (Tässä $[B_i] = \pi B_i,\ \pi \colon X \to X/{\sim}$ luonnollinen projektio.) Numeroituvuus on selvä. Lisäksi jokainen $[B_i]$ on avoin, koska $\sim$ on avoin. Olkoon $A \subset X/{\sim}$ avoin. Silloin (tekijätopologian määr. nojalla) $\pi^{-1}A \subset X$ on avoin, joten $\pi^{-1}A = \bigcup_{j \in J} B_j,\ J \subset \mathbb{N}$. Siten $A = \bigcup_{j \in J} \pi(B_j) = \bigcup_{j \in J} [B_j]$ ja $X/{\sim}$ on N_2. □

0.17 Topologisen moniston ominaisuuksia

Kerrataan määritelmät:

Topologisen avaruuden X *avoin peite* on kokoelma

$$\{V_\alpha \colon \alpha \in \mathcal{A}\}$$

X:n avoimia joukkoja V_α s.e. $X = \bigcup_\alpha V_\alpha$. Tässä $\mathcal{A}$ on jokin indeksijoukko.

Topologinen avaruus X on *kompakti*, jos sen jokaisella avoimella peitteellä on äärellinen osapeite.

Topologinen avaruus X on *lokaalisti kompakti*, jos $\forall x \in X \ \exists$ ympäristö U, jonka sulkeuma $\bar{U}$ on kompakti. Sanomme, että joukko $A \subset X$ on *prekompakti* tai *relatiivisesti kompakti* (merk. $A \Subset X$), jos $\bar{A}$ on kompakti. [Muistutus: $\bar{U} = \{x \in X : U \cap V \neq \emptyset \ \forall \ x\text{:n ympäristöillä } V\}$]

Topologinen avaruus X on *yhtenäinen*, jos $\nexists$ osajoukkoja A, B s.e.

1. $X = A \cup B$
2. $A \neq \emptyset \neq B$
3. $A \cap B = \emptyset$
4. $A \subset X$ avoin, $B \subset X$ avoin.

Toisin sanoen X on yhtenäinen, jos sitä ei voida esittää kahden erillisen avoimen epätyhjän osajoukon yhdisteenä.

Topologinen avaruus X on *polkuyhtenäinen*, jos jokainen pari $x, y \in X$ voidaan yhdistää polulla, ts. $\exists$ jatkuva kuvaus $\alpha \colon [0, 1] \to X$ (eli polku) s.e. $\alpha(0) = x$ ja $\alpha(1) = y$.

Huom.: polkuyhtenäisyys $\Rightarrow$ yhtenäisyys, muttei kääntäen.

Topologinen avaruus X on *lokaalisti (polku)yhtenäinen* pisteessä $x \in X$, jos jokainen x:n ympäristö U sisältää x:n (polku)yhtenäisen ympäristön.

Theorem 0.18. *Topologinen n-monisto M on lokaalisti kompakti ja lokaalisti polkuyhtenäinen.*

Todistus. Väite seuraa topologisen n-moniston ehdoista 1 ja 3 sekä $\mathbb{R}^n$:n vastaavista ominaisuuksista: Olkoon $x \in M$ mielivaltainen ja (U, φ) kartta x:ssä. Koska $\varphi U \subset \mathbb{R}^n$ avoin ja $\varphi(x) \in \varphi U$, niin $\exists$ kuula $B^n(\varphi(x), r) \subset \varphi U$. Koska $\bar{B}^n(\varphi(x), r/2)$ on kompakti, on $\varphi^{-1}\bar{B}^n(\varphi(x), r/2)$ kompakti ja siten suljettu, sillä M on Hausdorff. Näin ollen $\varphi^{-1}B^n(\varphi(x), r/2)$ on sellainen x:n ympäristö, jonka sulkeuma on kompakti. Toisaalta $B^n(\varphi(x), r)$ on polkuyhtenäinen, joten $\varphi^{-1}B^n(\varphi(x), r)$ $(\subset U)$ on polkuyhtenäinen x:n ympäristö. □

Muuan muassa ykkösen ositusta varten tarvitaan seuraavia:

Lemma 0.19 (Lindelöf)**.** *Olkoon X topologinen avaruus, jolla on numeroituva kanta, ja olkoon $A \subset X$. Silloin jokainen A:n avoin peite $\{V_\alpha \colon \alpha \in \mathcal{A}\}$ ($A \subset \bigcup_\alpha V_\alpha$) sisältää numeroituvan osapeitteen.*

Todistus. Olkoon $\mathcal{B} = \{B_i \colon i \in \mathbb{N}\}$ X:n numeroituva kanta. Jokaista $x \in A$ kohti $\exists$ indeksit $i \in \mathbb{N}$ ja $\alpha \in \mathcal{A}$ s.e. $x \in B_i \subset V_\alpha$. Olkoon

$$\mathcal{B}' = \{B_i \colon \exists \alpha \in \mathcal{A} \text{ s.e. } B_i \subset V_\alpha\},$$

jolloin $\mathcal{B}'$ on A:n peite. Jokaisella $B_i \in \mathcal{B}'$ valitaan joukoksi $V_{\alpha(i)}$ jokin niistä V_α:sta, joilla $B_i \subset V_\alpha$. Koska $\mathcal{B}'$ on A:n peite ja $B_i \subset V_\alpha \ \forall B_i \in \mathcal{B}'$, on $\{V_{\alpha(i)}\}$ numeroituva A:n peite. □

Theorem 0.20. *Topologisella n-monistolla M on sellainen numeroituva kanta $\mathcal{B} = \{B_i \colon i \in \mathbb{N}\}$, että jokainen B_i on prekompakti ja homeomorfinen $\mathbb{R}^n$:n kuulan kanssa. Erityisesti M on σ-kompakti (ts. numeroituva yhdiste kompakteista joukoista).*

Todistus. (i) Jokaisessa M:n pisteessä $\exists$ kartta (U,φ), joten "karttaympäristöt" U muodostavat M:n avoimen peitteen. Lemma 0.19 $\Rightarrow$ $\exists$ M:n numeroituva peite $\{U_i\colon i\in\mathbb{N}\}$ s.e. (U_i,φ_i) on kartta.
(ii) Merkitään $\tilde U=\varphi U_i$ ($\subset\mathbb{R}^n$ avoin) ja

$$\tilde{\mathcal{B}}_i=\{B^n(x,r)\colon x\in\mathbb{Q}^n, r\in\mathbb{Q}_+, \bar B^n(x,r)\subset\tilde U_i\}.$$

Tällöin jokainen tällainen $\bar B^n(x,r)\subset\tilde U_i$ on kompakti ja $\tilde{\mathcal{B}}_i$ on $\tilde U_i$:n numeroituva kanta. Koska $\varphi_i\colon U_i\to\tilde U_i$ on homeomorfismi, kokoelma

$$\mathcal{B}_i=\{\varphi_i^{-1}B\colon B\in\tilde{\mathcal{B}}_i\}$$

on U_i:n numeroituva kanta ja jokainen $\overline{\varphi_i^{-1}B}$ on kompakti U_i:n osajoukko. Tällöin $\mathcal{B}=\bigcup_i\mathcal{B}_i$ toteuttaa lauseen ehdot. Koska $M=\bigcup_{B\in\mathcal{B}}\overline{B}$ ja jokainen $\overline{B}$ on kompakti, M on σ-kompakti. $\square$

1 $\mathbb{R}^n$:n differentiaalilaskennan kertausta

1.1 Differentioituvuus

Definition 1.2. Olkoon $G\subset\mathbb{R}^n$ avoin. Kuvaus $f\colon G\to\mathbb{R}^m$ on *differentioituva* pisteessä $x\in G$, jos $\exists$ lineaarikuvaus $A(x)\in L(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^m)$ s.e.

$$f(x+h)=f(x)+A(x)h+|h|\varepsilon(x,h),$$

missä $\varepsilon(x,h)\xrightarrow{h\to0}0$. Lineaarikuvaus $A(x)$ on f:n differentiaali pisteessä x ja sitä merkitään $A(x)=f'(x)=Df(x)$.

Voidaan osoittaa, että $f'(x)$:n matriisi (standardikantojen suhteen) on

$$\begin{pmatrix} D_1f_1(x) & \cdots & D_nf_1(x)\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ D_1f_m(x) & \cdots & D_nf_m(x)\end{pmatrix},$$

missä $f=(f_1,\dots,f_m)$.

Definition 1.3. Kuvaus $f\colon G\to\mathbb{R}^m$ on *jatkuvasti differentioituva* pisteessä $x_0\in G$, jos $\exists$ x_0:n ympäristö $U\subset G$ s.e.

1. f on differentioituva $\forall$ $x\in U$, ja
2. $f'\colon U\to L(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^m)$ on jatkuva x_0:ssa.

Huom.: Yllä $L(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^m)$:n topologia on määritelty normin avulla.
Muistutus: Lineaarikuvauksen $L\in L(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^m)$ normi on $|L|=\sup\{|Lh|\colon |h|=1\}$.

Pätee: Kuvaus f on jatkuvasti differentioituva G:ssä $\iff$ $\exists$ jatkuvat osittaisderivaatat D_jf_i joukossa G kaikilla $i=1,\dots,m,\ j=1,\dots,n$.

Yleisesti: Olkoon $k\in\mathbb{N}\cup\{0\}$. Sanomme, että f on k-kertaa jatkuvasti differentioituva G:ssä, merk. $f\in C^k(G)$, jos osittaisderivaatat

$$\frac{\partial^{|\alpha|}f_i}{\partial^\alpha x},\ i=1,\dots,m,$$

ovat jatkuvia G:ssä $\forall$ multi-indekseillä $\alpha=(\alpha_1,\dots,\alpha_n)$, joilla $|\alpha|=\alpha_1+\cdots+\alpha_n\le k$. Tässä

$$\frac{\partial^{|\alpha|}f_i}{\partial^\alpha x}=\frac{\partial^{|\alpha|}f_i}{(\partial x_1)^{\alpha_1}\cdots(\partial x_n)^{\alpha_n}}.$$

Jos $f\in C^k(G)$ $\forall$ $k\in\mathbb{N}$, niin merkitään $f\in C^\infty(G)$.

Definition 1.4. Olkoot $G,\ V \subset \mathbb{R}^n$ avoimia. Kuvaus $f\colon G \to V$ on C^∞-diffeomorfismi, jos $f \in C^\infty(G)$ ja $\exists f^{-1} \in C^\infty(V)$.

Käänteiskuvauslause.

Theorem 1.5 (Käänteiskuvauslause)**.** *Olkoon $G \subset \mathbb{R}^n$ avoin, $f\colon G \to \mathbb{R}^n,\ f \in C^1(G)$. Oletetaan, että pisteessä $a \in G$*

$$J_f(a) = \det f'(a) \neq 0.$$

Silloin on olemassa ympäristöt $U \ni a,\ V \ni f(a)$, ja käänteiskuvaus $g = f^{-1}\colon V \to U$. Lisäksi $g \in C^1(V)$ ja $g'\big(f(x)\big) = f'(x)^{-1},\ x \in U$.

Muistutus: $\det f'(a) \neq 0 \iff$ lineaarikuvauksella $f'(a)\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ on käänteiskuvaus $f'(a)^{-1}$.
Todistusta varten tarvitaan kaksi lemmaa.

Merkitään $GL(n,\mathbb{R})$:llä kaikkien lineaaristen bijektioiden $A \in L(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n)$ joukkoa (eli kaikkien (reaalisten) $n \times n$-matriisien $A,\ \det A \neq 0$, joukkoa).

Lemma 1.6. *1. Jos $A \in GL(n,\mathbb{R})$ ja $B \in L(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n)$ s.e.*

$$|B - A||A^{-1}| < 1,$$

niin $B \in GL(n,\mathbb{R})$.

2. $GL(n,\mathbb{R}^n)$ on $L(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n)$:n avoin osajoukko ja kuvaus $A \mapsto A^{-1}$ on jatkuva $GL(n,\mathbb{R})$:ssä.

Todistus. HT [Ks. esim. Rudin [Ru].] □

Lemma 1.7 (Väliarvolause)**.** *Olkoon $G \subset \mathbb{R}^m$ avoin ja $J \subset G$ suljettu jana, jonka päätepisteet ovat a ja b. Olkoon $f\colon G \to \mathbb{R}^n$ kuvaus, joka on differentioituva jokaisessa J:n pisteessä. Tällöin $\forall v \in \mathbb{R}^n$ kohti $\exists x_v \in J$ s.e.*

$$v \cdot \big(f(b) - f(a)\big) = v \cdot \big(f'(x_v)(b-a)\big).$$

Erityisesti, jos $|f'(x)| \leq M\ \forall x \in J$, niin

$$|f(b) - f(a)| \leq M|b - a|.$$

Todistus. HT □

Lauseen 1.5 todistus. (i) Merkitään $L = f'(a)$ ja valitaan $\lambda > 0$ s.e. $2\lambda|L^{-1}| = 1$. Koska f' on jatkuva a:ssa, $\exists$ kuula $U = B^n(a,\varepsilon)$ s.e.

$$|f'(x) - L| < \lambda \quad \forall x \in U.$$

Määritellään jokaisella $y \in \mathbb{R}^n$ kuvaus $\varphi\ (= \varphi_y)$

$$\varphi(x) = x + L^{-1}\big(y - f(x)\big), \quad x \in G. \tag{1.8}$$

Havaitaan: $f(x) = y \iff \varphi(x) = x$.
Ketjusääntö $\Rightarrow$

$$\begin{aligned}\varphi'(x) &= I - L^{-1}f'(x) \qquad (I = \text{ identtinen kuvaus})\\ &= L^{-1}\big(L - f'(x)\big)\\ \Rightarrow |\varphi'(x)| &\leq \underbrace{|L^{-1}|}_{=\frac{1}{2\lambda}}\underbrace{|L - f'(x)|}_{<\lambda} < \frac{1}{2},\ x \in U.\end{aligned}$$

Väliarvolause $\Rightarrow$

$$|\varphi(x_2)-\varphi(x_1)| \le \frac{1}{2}|x_2-x_1|, \quad x_1,x_2 \in U.$$

Siten φ:llä on korkeintaan yksi kiintopiste U:ssa, joten $f(x)=y$ korkeintaan yhdellä $x \in U$. Sama pätee $\forall y \in \mathbb{R}^n$, joten $f|U$ on injektio.

(ii) Merkitään $V=fU$ ja olkoon $y_0 \in V$. Silloin $y_0=f(x_0)$ jollakin $x_0 \in U$. Olkoon $r>0$ niin pieni, että $\bar{B}=\bar{B}^n(x_0,r)\subset U$. Osoitetaan: $B^n(y_0,\lambda r)\subset V$, jolloin on näytetty, että V on avoin. Kiinnitetään $y \in B^n(y_0,\lambda r)$ (eli $|y-y_0|<\lambda r$). Kuvaukselle $\varphi=\varphi_y$ pätee:

$$|\varphi(x_0)-x_0| = |L^{-1}(y-y_0)| \le |L^{-1}||y-y_0| < \frac{r}{2}.$$

Jos $x \in \bar{B}$ ($\subset U$), niin

$$\begin{aligned}|\varphi(x)-x_0| &\le |\varphi(x)-\varphi(x_0)|+|\varphi(x_0)-x_0|\\ &\le \frac{1}{2}|x-x_0|+\frac{r}{2}<r,\end{aligned}$$

joten $\varphi(x)\in B^n(x_0,r)$. Siis

$$\begin{gathered}\varphi\bar{B}^n(x_0,r)\subset \bar{B}^n(x_0,r),\\ |\varphi(x_2)-\varphi(x_1)|\le \frac{1}{2}|x_2-x_1|,\ \forall x_1,x_2\in \bar{B}^n(x_0,r).\end{gathered}$$

$\bar{B}^n(x_0,r)$ on kompakti, joten se on täydellinen.
Kontraktiokuvauslause $\Rightarrow$ φ:llä on täsmälleen yksi kiintopiste x joukossa $\bar{B}^n(x_0,r)$. Siten $y=f(x)\in f\bar{B}^n(x_0,r)\subset fU=V$, joten V on avoin. Nyt on osoitettu: $\exists$ ympäristöt $U\ni a$, $V\ni f(a)$ ja $f|U\colon U\to V$ on bijektio.

(iii) Olkoot $y\in V$ ja $y+k\in V$. Merkitään $x=f^{-1}(y)$ ja $h=f^{-1}(y+k)-x$, jolloin $x\in U$, $x+h=f^{-1}(y+k)\in U$, ja $f(x+h)=y+k$. Jos φ on y:tä vastaava kuvaus (ks. (1.8)), ts.

$$\begin{aligned}\varphi(x+h)&=x+h+L^{-1}\big(y-f(x+h)\big)\\ \varphi(x)&=x+L^{-1}\big(y-f(x)\big),\end{aligned}$$

niin

$$\begin{aligned}\varphi(x+h)-\varphi(x)&=h+L^{-1}\big(\underbrace{f(x)}_{=y}-\underbrace{f(x+h)}_{y+k}\big)\\ &=h-L^{-1}k.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&\Rightarrow\ |h-L^{-1}k|=|\varphi(x+h)-\varphi(x)|\le\frac{1}{2}|x+h-x|=\frac{1}{2}|h|\\ &\Rightarrow\ |L^{-1}k|\ge\frac{1}{2}|h| \quad \text{ja}\end{aligned}$$

$$|h|\le 2|L^{-1}k|\le 2|L^{-1}||k|=\frac{|k|}{\lambda}. \tag{1.9}$$

Toisaalta

$$|f'(x)-L||L^{-1}|<\frac{1}{2},$$

joten Lemma 1.6 nojalla $f'(x)$ on bijektio eli $\exists\, T = f'(x)^{-1}$. Merkitään $g = f^{-1}\colon V \to U$. Halutaan osoittaa, että $g'(y) = T$. Nyt

$$\begin{aligned}\underbrace{g(y+k)}_{=h+x} - \underbrace{g(y)}_{=x} - Tk &= h + x - x - Tk = h - Tk \\ &= Tf'(x)h - Tk = -T\big(k - f'(x)h\big) \\ &= -T\big(\underbrace{f(x+h)}_{=y+k} - \underbrace{f(x)}_{=y} - f'(x)h\big).\end{aligned}$$

Tämä ja epäyhtälö (1.9) $\Rightarrow$

$$\frac{|g(y+k) - g(y) - Tk|}{|k|} \le \frac{|T|}{\lambda} \frac{|f(x+h) - f(x) - f'(x)h|}{|h|}. \tag{1.10}$$

Kun $k \to 0$, niin (1.9):n nojalla $h \to 0$, jolloin (1.10):n oikea puoli $\to 0$. Siten myös (1.10):n vasen puoli

$$\frac{|g(y+k) - g(y) - Tk|}{|k|} \xrightarrow{k\to 0} 0,$$

eli g on differentioituva y:ssä ja

$$g'(y) = T = f'(x)^{-1} = f'\big(g(y)\big)^{-1}, \; y \in V. \tag{1.11}$$

Koska g on differentioituva $\forall y \in V$, on g jatkuva V:ssä. Lisäksi $f \in C^1(U)$ ja $\exists f'(x)^{-1}\ \forall x \in U$, joten $f'\colon U \to GL(n,\mathbb{R})$ on jatkuva. Lemman 1.6 (b)-kohta: $A \mapsto A^{-1}$ jatkuva $GL(n,\mathbb{R})$:ssä. Yhdistämällä nämä (1.11):n kanssa saadaan, että

$$g'\colon V \to GL(n,\mathbb{R}),\; y \mapsto g'(y) = f'\big(g(y)\big)^{-1},$$

on jatkuva, joten $g \in C^1(V)$. □

Remark 1.12. Oletusta $f \in C^1(G)$ käytettiin vasta todistuksen lopussa. Jos oletetaan pelkästään, että f on differentioituva G:ssä, jatkuvasti differentioituva a:ssa ja $J_f(a) \neq 0$, niin vastaavasti käänteiskuvaus $g = f^{-1}\colon V \to U$ on differentioituva V:ssä ja jatkuvasti differentioituva $f(a)$:ssa.

Corollary 1.13. *Jos $G \subset \mathbb{R}^n$ on avoin, $f\colon G \to \mathbb{R}^n$, $f \in C^1(G)$ ja $J_f(x) \neq 0\ \forall x \in G$, niin f on avoin kuvaus.*

Implisiittifunktiolause. Kirjoitetaan $\mathbb{R}^{m+n} = \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$, jolloin

$$\begin{aligned} t \in \mathbb{R}^{m+n} \iff t &= (t_1, \ldots, t_{m+n}) = (x_1, \ldots, x_m, y_1, \ldots, y_n) \\ &= (x, y).\end{aligned}$$

Theorem 1.14 (Implisiittifunktiolause)**.** *Olkoon $G \subset \mathbb{R}^{m+n}$ avoin, $f\colon G \to \mathbb{R}^n$, ja $(x_0, y_0) \in G$. Oletetaan, että*

1. $f(x_0, y_0) = 0$,
2. $f \in C^1(G)$,
3. $J_u(y_0) \neq 0$, *missä* $u(y) = f(x_0, y)$.

Tällöin $\exists$ *ympäristöt* $X \ni x_0$ *ja* $Y \ni y_0$ *s.e.* $\forall x \in X$ $\exists$ *yksikäsitteinen* $\varphi(x) \in Y$, *jolle* $f\big(x, \varphi(x)\big) = 0$. *Kuvaus* $\varphi\colon X \to Y$ *on jatkuvasti differentioituva* X*:ssä ja* $\varphi(x_0) = y_0$.

Todistus. Määritellään kuvaus $g\colon G \to \mathbb{R}^{m+n}$,

$$g(x,y) = \big(x, f(x,y)\big),$$

jolloin $g(x_0, y_0) = (x_0, 0)$ ja

$$\begin{aligned} &g_1(x,y) = x_1, \quad g_2(x,y) = x_2, \quad \dots \quad g_m(x,y) = x_m \\ &g_{m+1}(x,y) = f_1(x,y), \quad g_{m+2}(x,y) = f_2(x,y), \quad \dots \quad g_{m+n}(x,y) = f_n(x,y). \end{aligned} \tag{1.15}$$

Havaitaan

$$J_g(x_0,y_0) = \begin{vmatrix} 1 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ D_1 f_1(x_0,y_0) & \cdots & D_m f_1(x_0,y_0) & D_{m+1} f_1(x_0,y_0) & \cdots & D_{m+n} f_1(x_0,y_0) \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ D_1 f_n(x_0,y_0) & \cdots & D_m f_n(x_0,y_0) & D_{m+1} f_n(x_0,y_0) & \cdots & D_{m+n} f_n(x_0,y_0) \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} D_{m+1} f_1(x_0,y_0) & \cdots & D_{m+n} f_1(x_0,y_0) \\ \vdots & & \vdots \\ D_{m+1} f_n(x_0,y_0) & \cdots & D_{m+n} f_n(x_0,y_0) \end{vmatrix}$$

$$= J_u(y_0) \neq 0.$$

Käänteiskuvauslauseesta seuraa, että $\exists$ ympäristöt $U \ni (x_0, y_0)$ ja $V \ni (x_0, 0)$ s.e. $g|U : U \to V$ on homeomorfismi, jolla $\exists$ käänteiskuvaus $g^* = (g|U)^{-1}\colon V \to U$. Pienentämällä U:ta ja V:tä voidaan valita $V = B^{m+n}\big((x_0, 0), r\big)$. Kaava (1.15) $\Rightarrow$

$$\begin{aligned} g_1^*(x,y) &= x_1 \\ &\vdots \\ g_m^*(x,y) &= x_m. \end{aligned}$$

Merkitään $h = (g_{m+1}^*, \dots, g_{m+n}^*)\colon V \to \mathbb{R}^n$ ja määritellään $\varphi\colon B^m(x_0, r) \to \mathbb{R}^n,\ \varphi(x) = h(x, 0)$.
Väite: φ on etsitty kuvaus, ts. $f\big(x, \varphi(x)\big) = 0$.
Nyt

$$\begin{aligned} \big(x, \varphi(x)\big) &= \big(x_1, \dots, x_m, h_1(x,0), \dots, h_n(x,0)\big) \\ &= \big(g_1^*(x,0), \dots, g_m^*(x,0), g_{m+1}^*(x,0), \dots, g_{m+n}^*(x,0)\big) = g^*(x,0), \end{aligned}$$

joten $g\big(x, \varphi(x)\big) = g\big(g^*(x,0)\big) = (x, 0)$. Toisaalta $(x,0) = g\big(x, \varphi(x)\big) = \big(x, f(x, \varphi(x))\big)$, josta seuraa

$$f\big(x, \varphi(x)\big) = 0.$$

Lisäksi: f on jatkuvasti differentioituva $\Rightarrow$ g jatkuvasti differentioituva ja edelleen käänteiskuvauslause $\Rightarrow$ g^* jatkuvasti differentioituva $\Rightarrow$ φ jatkuvasti differentioituva.

$$(x_0, y_0) = g^*(x_0, 0) = \big(x_0, \varphi(x_0)\big) \;\Rightarrow\; \varphi(x_0) = y_0.$$

Valitaan sitten ympäristöt $X \ni x_0$ ja $Y \ni y_0$ s.e.

1. $X \times Y \subset U$
2. $\varphi X \subset Y$.

Tällöin $\forall x \in X\ \exists y = \varphi(x) \in Y$ s.e. $f(x, y) = 0$. Vielä on jäljellä yksikäsitteisyys. Oletetaan, että myös $z \in Y$ toteuttaa yhtälön $f(x, z) = 0,\ (x, z) \in U$. Silloin

$$g(x,z) = \big(x, f(x,z)\big) = (x,0) = \big(x, f(x,y)\big) = g(x,y)$$
$$g|U \text{ injektio } \;\Rightarrow\; (x,z) = (x,y) \;\Rightarrow\; z = y.$$

□

2 Sileät monistot

2.1 Määritelmiä ja esimerkkejä

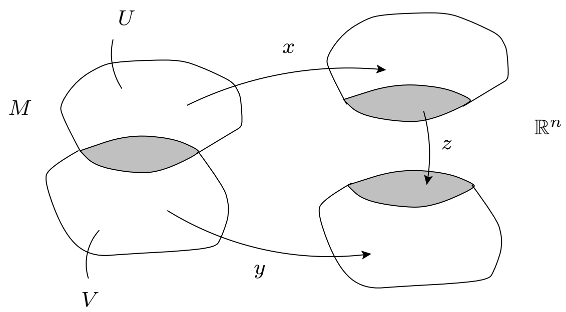
Olkoon M topologinen n-monisto. Palautetaan mieliin, että kartta M:llä on (mikä tahansa) pari (U, x), missä

1. $U \subset M$ on avoin,
2. $x\colon U \to xU \subset \mathbb{R}^n$ on homeomorfismi, $xU \subset \mathbb{R}^n$ avoin.

Sanomme, että kartat (U, x) ja (V, y) ovat C^∞-*yhteensopivat*, jos $U \cap V = \emptyset$ tai

$$z = y \circ x^{-1}|x(U \cap V)\colon x(U \cap V) \to y(U \cap V)$$

on C^∞-diffeomorfismi.



Moniston M C^∞-*kartasto* $\mathcal{A}$ on joukko C^∞-yhteensopivia karttoja s.e.

$$M = \bigcup_{(U,x)\in\mathcal{A}} U.$$

C^∞-kartasto $\mathcal{A}$ on *maksimaalinen*, jos $\mathcal{A} = \mathcal{B}$ kaikilla C^∞-kartastoilla $\mathcal{B} \supset \mathcal{A}$. Ts. jos (U, x) on C^∞-yhteensopiva jokaisen $\mathcal{A}$:n kartan kanssa, niin $(U, x) \in \mathcal{A}$.

Lemma 2.2. *Olkoon M topologinen monisto. Silloin:*

1. *Jokainen M:n C^∞-kartasto $\mathcal{A}$ kuuluu yksikäsitteiseen maksimaaliseen C^∞-kartastoon (merk. $\bar{\mathcal{A}}$).*

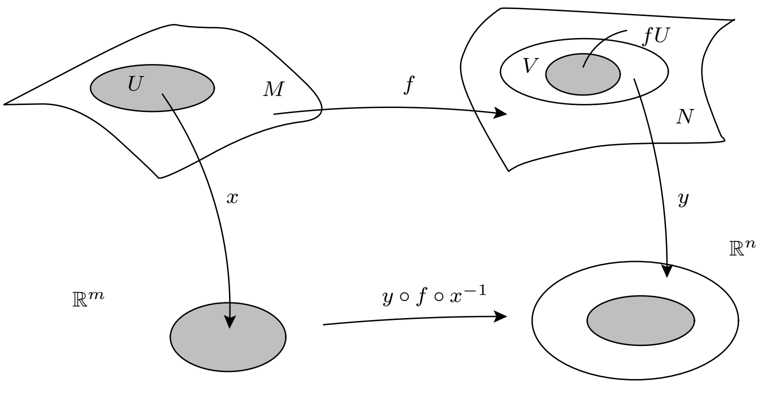
2. *C^∞-kartastot $\mathcal{A}$ ja $\mathcal{B}$ kuuluvat samaan maksimaaliseen C^∞-kartastoon $\iff$ $\mathcal{A} \cup \mathcal{B}$ on C^∞-kartasto.*

Todistus. HT $\square$

Definition 2.3. *Differentioituva n-monisto* (tai sileä n-monisto) on pari $(M, \mathcal{A})$, missä M on topologinen n-monisto ja $\mathcal{A}$ on maksimaalinen M:n C^∞-kartasto (eli differentioituva struktuuri).

Käytämme lyhenteitä M tai M^n ja sanomme, että M on C^∞-monisto, differentioituva monisto, sileä monisto (tai lyh. C^∞, sileä).

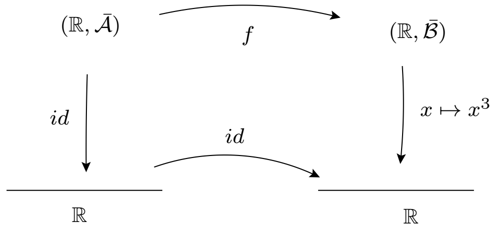
Definition 2.4. Olkoot $(M^m, \mathcal{A})$ ja $(N^n, \mathcal{B})$ C^∞-monistoja. Sanomme, että kuvaus $f\colon M \to N$ on C^∞ (tai sileä), jos sen jokainen lokaali esitys (differentioituvien struktuurien suhteen) on C^∞. Tarkemmin sanoen, jos kaikilla kartoilla $(U, x) \in \mathcal{A}$ M:ssä ja $(V, y) \in \mathcal{B}$ N:ssä yhdistetty kuvaus $y \circ f \circ x^{-1}$ on sileä kuvaus $x(U \cap f^{-1}V) \to yV$. Sanomme, että $f\colon M \to N$ on C^∞-diffeomorfismi, jos f on C^∞ ja sillä on käänteiskuvaus f^{-1}, joka myös on C^∞.



Remark 2.5. Kuvaus $f\colon M \to N$ on C^∞ $\iff$ $\forall p \in M$ $\exists$ kartat $(U, x) \in \mathcal{A}$ ja $(V, y) \in \mathcal{B}$ s.e. $p \in U \subset M,\ fU \subset V \subset N$, ja $y \circ f \circ x^{-1} \in C^\infty(xU)$.

Example 2.6. 1. $M = \mathbb{R}^n,\ \mathcal{A} = \{id\},\ \bar{\mathcal{A}} =$ luonnollinen struktuuri.

2. $M = \mathbb{R},\ \mathcal{A} = \{id\},\ \mathcal{B} = \{x \overset{h}{\mapsto} x^3\}$. Nyt $\bar{\mathcal{A}} \neq \bar{\mathcal{B}}$, koska $id \circ h^{-1}$ ei ole C^∞ origossa. Kuitenkin $(\mathbb{R}, \bar{\mathcal{A}})$ ja $(\mathbb{R}, \bar{\mathcal{B}})$ ovat diffeomorfiset, diffeomorfismina kuvaus $f\colon (\mathbb{R}, \bar{\mathcal{A}}) \to (\mathbb{R}, \bar{\mathcal{B}}),\ f(y) = y^{1/3}$. Huom.: f on diffeomorfismi $\mathbb{R}$:n struktuureiden $\bar{\mathcal{A}}$ ja $\bar{\mathcal{B}}$ välillä, sillä sen lokaali esitys on id (ks. kuva). [Ks. esimerkkien jälkeinen Huomautus.]



3. Jos M on differentioituva monisto ja $U \subset M$ on avoin, niin U on differentioituva monisto luonnollisella tavalla.

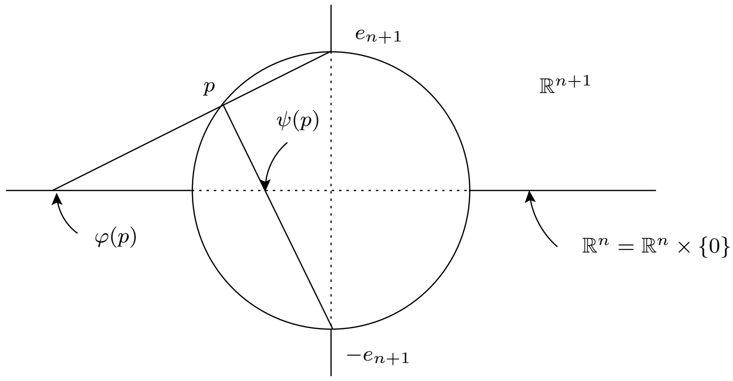
4. *Äärellisulotteiset vektoriavaruudet.* Olkoon V n-ulotteinen vektoriavaruus. Jokainen V:n normi määrittelee V:lle topologian. Tämä topologia ei riipu normin valinnasta, sillä mitkä tahansa kaksi V:n normia ovat ekvivalentit (V äärellisulotteinen). Olkoon $E_1, \ldots, E_n$ jokin V:n kanta ja $E \colon \mathbb{R}^n \to V$ isomorfismi
$$E(x) = \sum_{i=1}^{n} x^1 E_i, \quad x = (x^1, \ldots, x^n).$$
Tällöin E on homeomorfismi (V:ssä normitopologia) ja kartta (V, E^{-1}) määrää V:lle sileän struktuurin. Lisäksi tämä sileä struktuuri ei riipu kannan $E^1, \ldots, E_n$ valinnasta. (HT)

5. *Matriisit.* Olkoon $M(n \times m, \mathbb{R})$ kaikkien (reaalisten) $n \times m$-matriisien joukko. Se on nm-ulotteinen vektoriavaruus, joten se on sileä nm-monisto. Matriisi $A = (a_{ij}) \in M(n \times m, \mathbb{R})$, $i = 1, \ldots, n$, $j = 1, \ldots, m$
$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix}$$
voidaan luonnollisella tavalla samastaa $\mathbb{R}^{nm}$:n pisteen
$$(a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{1m}, a_{21}, \ldots, a_{2m}, \ldots, a_{n1}, \ldots, a_{nm})$$
kanssa, jolloin saadaan (globaali) kartta. Jos $n = m$, niin merkitään lyhyemmin $M(n, \mathbb{R})$.

6. $GL(n, \mathbb{R})$ = *yleinen lineaarinen ryhmä*
$$\begin{aligned} &= \{L \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n \text{ lineaarinen isomorfismi}\} \\ &= \{A = (a_{ij}) \colon \text{ ei-singulaarinen } n \times n\text{-matriisi}\} \\ &= \{A = (a_{ij}) \colon \det A \neq 0\}. \end{aligned}$$
[Muistutus: $n \times n$-matriisi A on ei-singulaarinen, jos $\exists$ käänteismatriisi A^{-1}.]

   Yo. identifioinnin avulla voidaan tulkita, että $GL(n, \mathbb{R}) \subset M(n, \mathbb{R}) = \mathbb{R}^{n^2}$. Annetaan $M(n, \mathbb{R})$:lle identifioinnin määräämä topologia. Nyt nähdään, että kuvaus $\det \colon M(n, \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ on jatkuva (n:nnen asteen polynomi luvuista a_{ij}), joten $G(n, \mathbb{R}) \subset \mathbb{R}^{n^2}$ on avoin (= avoimen joukon $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ alkukuva jatkuvassa kuvauksessa).

7. *Pallo* $\mathbb{S}^n = \{p \in \mathbb{R}^{n+1} \colon |p| = 1\}$. Olkoon $e_1, \ldots, e_{n+1}$ $\mathbb{R}^{n+1}$:n standardi kanta,
$$\begin{aligned} \varphi &\colon \mathbb{S}^n \setminus \{e_{n+1}\} \to \mathbb{R}^n \\ \psi &\colon \mathbb{S}^n \setminus \{-e_{n+1}\} \to \mathbb{R}^n \end{aligned}$$
stereograafiset projektiot (ks. kuva), ja $\mathcal{A} = \{\varphi, \psi\}$. (Tarkempi konstruktio (HT).)



8. *Projektiivinen avaruus* $\mathbb{R}P^n$.

9. *Tulomonistot.* Olkoot $(M, \mathcal{A})$, $(N, \mathcal{B})$ differentioituvia monistoja ja $p_1 \colon M \times N \to M$, $p_2 \colon M \times N \to N$ projektiot. Silloin

$$\mathcal{C} = \big\{ \big(U \times V, (x \circ p_1, y \circ p_2)\big) \colon (U, x) \in \mathcal{A}, (V, y) \in \mathcal{B} \}$$

on $M \times N$:n C^∞-kartasto. Esim.

   (a) Sylinteri $\mathbb{R}^1 \times \mathbb{S}^1$
   (b) Torus $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1 = T^2$.

10. *Lien ryhmät.* Lien ryhmä on ryhmä G, joka on samalla sileä monisto s.e. ryhmäoperaatiot ovat C^∞, ts.

$$(g, h) \mapsto gh^{-1}$$

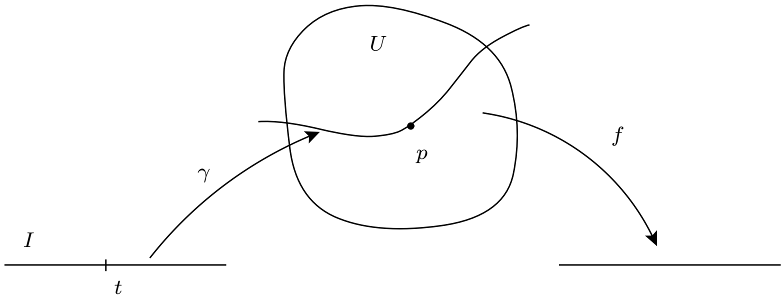
on C^∞-kuvaus $G \times G \to G$. Esimerkiksi $GL(n, \mathbb{R})$ on Lien ryhmä, kun ryhmäoperaationa on kuvausten yhdistäminen.

Remark 2.7. 1. M:lle voidaan antaa myös muita struktuureita korvaamalla C^∞ esim. C^k:lla, C^ω:lla (= reaalianalyyttinen), tai kompleksianalyyttisyydellä (jolloin oltava $n = 2m$ parillinen).

2. On olemassa topologisia n-monistoja, joilla ei ole differentioituvaa struktuuria. (Kervaire, $n = 10$, 60-luvulla; Freedman, Donaldson, $n = 4$, 80-luvulla). $\mathbb{R}^n$ varustettuna millä tahansa kartastolla on diffeomorfinen kanonisen struktuurin kanssa, kun $n \neq 4$ ($\mathbb{R}^4$:n ”eksoottisia” struktuureita löydettiin vasta 80-luvulla).

2.8 Tangenttiavaruus

Olkoon M differentioituva monisto, $p \in M$, ja $\gamma \colon I \to M$ C^∞-polku s.e. $\gamma(t) = p$ jollakin $t \in I$, missä $I \subset \mathbb{R}$ on avoin väli.



Merkitään
$$C^\infty(p) = \{f\colon U \to \mathbb{R} \mid f \in C^\infty(U),\ U \text{ jokin } p\text{:n ympäristö}\}.$$

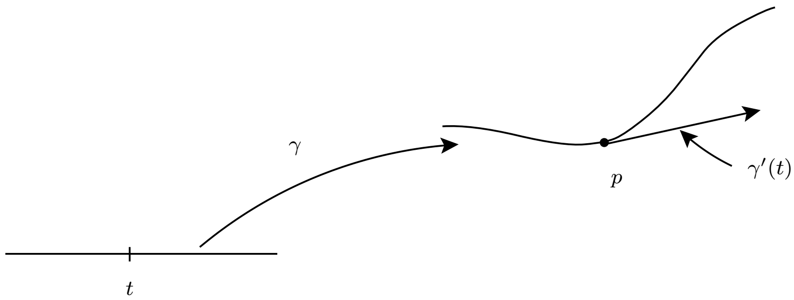
Huom.: Tässä U voi riippua funktiosta f, siksi merkintä $C^\infty(p)$ eikä $C^\infty(U)$.

Tällöin polku γ määrittelee kuvauksen $\dot\gamma_t\colon C^\infty(p) \to \mathbb{R}$,
$$\dot\gamma_t f = (f \circ \gamma)'(t).$$

Huom.: $f \circ \gamma$ on jossakin pisteen $t \in I$ ympäristössä määritelty reaaliarvoinen funktio ja $(f \circ \gamma)'(t)$ on sen tavallinen derivaatta pisteessä t.

Tulkinta: $\dot\gamma_t f$ voidaan ajatella f:n ”suunnatuksi derivaataksi p:ssä γ:n suuntaan”.

Example 2.9. $M = \mathbb{R}^n$
Jos $\gamma = (\gamma_1, \ldots, \gamma_n)\colon I \to \mathbb{R}^n$ on sileä polku ja $\gamma'(t) = \big(\gamma_1'(t), \ldots, \gamma_n'(t)\big) \in \mathbb{R}^n$ on γ:n derivaatta t:ssä, niin
$$\dot\gamma_t f = (f \circ \gamma)'(t) = f'(p)\gamma'(t) = \gamma'(t) \cdot \nabla f(p).$$



Yleisesti: $\dot\gamma_t$ toteuttaa seuraavat ehdot:
Olkoot $f, g \in C^\infty(p)$ ja $a, b \in \mathbb{R}$. Silloin

a) $\dot\gamma_t(af + bg) = a\dot\gamma_t f + b\dot\gamma_t g$,

b) $\dot\gamma_t(fg) = g(p)\dot\gamma_t f + f(p)\dot\gamma_t g$.

Sanomme: $\dot\gamma_t$ on *derivaatio*.

Yllä olevan motivoimana annamme seuraavan määritelmän:

Definition 2.10. Differentioituvan moniston M *tangenttivektori* pisteessä $p \in M$ on kuvaus $v\colon C^\infty(p) \to \mathbb{R}$, joka toteuttaa ehdot:

(1) $v(af + bg) = av(f) + bv(g), \quad f, g \in C^\infty(p),\ a, b \in \mathbb{R}$;

(2) $v(fg) = g(p)v(f) + f(p)v(g)$ (vrt. tulon derivaatta eli ”Leibnizin sääntö”).

Näiden tangenttivektoreiden muodostama vektoriavaruus on M:n *tangenttiavaruus* p:ssä, merk. T_pM tai M_p.

Remark 2.11. 1. Jos $v, w \in T_pM$ ja $c, d \in \mathbb{R}$, niin $cv + dw$ on (tietenkin) kuvaus $(av + bw)\colon C^\infty(p) \to \mathbb{R}$,
$$(cv + dw)(f) = cv(f) + dw(f).$$

Helposti havaitaan, että $cv + dw$ on tangenttivektori p:ssä.

2. Merkitsemme lyhyemmin $vf = v(f)$.

3. Väite: Jos $v \in T_pM$ ja $c \in C^\infty(p)$ on vakiofunktio, niin $vc = 0$. (HT)

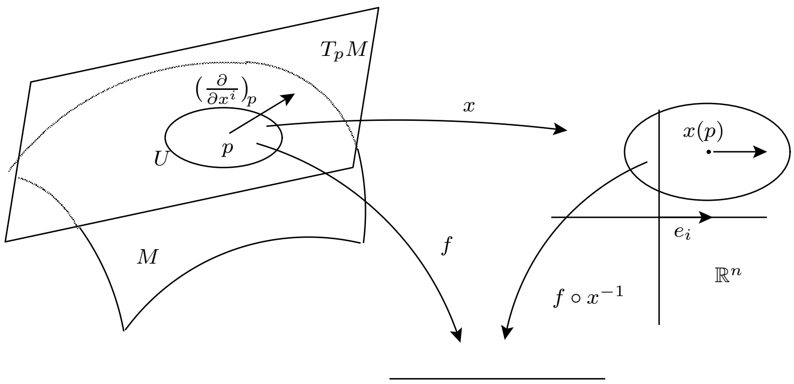
4. Olkoon U jokin p:n ympäristö ja tulkitaan se differentioituvaksi monistoksi. Koska T_pM:n määritelmässä käytetään funktioita luokasta $C^\infty(p)$ (ts. p:n ympäristöä ei olla kiinnitetty), tulee T_pM ja T_pU samaistetuksi luonnollisella tavalla.

Olkoon (U, x), $x = (x^1, x^2, \ldots, x^n)$, kartta pisteessä p. Määritellään tangenttivektori (*koordinaattivektori*) $\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_p$ pisteessä p kaavalla

$$\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_p f = D_i\big(f \circ x^{-1}\big)\big(x(p)\big), \quad f \in C^\infty(p).$$

Tässä D_i on osittaisderivaatta i:nnen muuttujan suhteen. Merkitään myös

$$(\partial_i)_p = D_{x_i}(p) = \left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_p.$$



Remark 2.12. 1. On helppo havaita, että $(\partial_i)_p$ (todellakin) on tangenttivektori p:ssä.

2. Jos (U, x), $x = (x^1, \ldots, x^n)$, on kartta p:ssä, niin $(\partial_i)_p x^j = \delta_{ij}$.

Seuraavaksi osoitamme (erityisesti), että T_pM on n-ulotteinen. Tarvitaan lemma.

Lemma 2.13. *Jos $f \in C^k(B)$, $k \geq 1$, on reaaliarvoinen funktio kuulassa $B = B^n(0, r) \subset \mathbb{R}^n$, niin on olemassa funktiot $g_i \in C^{k-1}(B), i = 1, \ldots, n$, siten, että $g_i(0) = D_i f(0)$ ja*

$$f(y) - f(0) = \sum_{i=1}^{n} y_i g_i(y)$$

kaikilla $y = (y_1, \ldots, y_n) \in B$.

Todistus. Jos $y \in B$, niin

$$\begin{aligned} f(y) - f(0) &= f(y) - f(y_1, \dots, y_{n-1}, 0) \\ &\quad + f(y_1, \dots, y_{n-1}, 0) - f(y_1, \dots, y_{n-2}, 0, 0) \\ &\quad + f(y_1, \dots, y_{n-2}, 0, 0) - f(y_1, \dots, y_{n-3}, 0, 0 \\ &\quad\ \vdots \\ &\quad + f(y_1, 0, \dots, 0) - f(0) \\ &= \sum_{i=1}^{n} \int_0^1 f(y_1, \dots, y_{i-1}, ty_i, 0, \dots, 0) \\ &= \sum_{i=1}^{n} \int_0^1 \frac{d}{dt}\big(f(y_1, \dots, y_{i-1}, ty_i, 0, \dots, 0)\big) dt \\ &= \sum_{i=1}^{n} \int_0^1 D_i f(y_1, \dots, y_{i-1}, ty_i, 0, \dots, 0) y_i dt. \end{aligned}$$

Asetetaan

$$g_i(y) = \int_0^1 D_i f(y_1, \dots, y_{i-1}, ty_i, 0, \dots, 0) dt.$$

Silloin $g_i \in C^{k-1}(B)$ (sillä $f \in C^k(B)$) ja $g_i(0) = D_i f(0)$. □

Theorem 2.14. *Jos* (U, x), $x = (x^1, \dots, x^n)$, *on kartta* p*:ssä ja* $v \in T_pM$, *niin*

$$v = \sum_{i=1}^{n} vx^i (\partial_i)_p.$$

Lisäksi vektorit $(\partial_i)_p$, $i = 1, \dots, n$, *muodostavat* T_pM*:n kannan ja* $\dim T_pM = n$.

Todistus. Kun $u \in U$, niin merkitään $x(u) = y = (y^1, \dots, y^n) \in \mathbb{R}^n$, jolloin $x^i(u) = y^i$. Voidaan olettaa, että $x(p) = 0 \in \mathbb{R}^n$. Olkoon $f \in C^\infty(p)$. Koska $f \circ x^{-1}$ on C^∞, on Lemma 2.13:n nojalla olemassa kuula $B = B^n(0, r) \subset xU$ ja funktiot $g_i \in C^\infty(B)$ siten, että

$$\big(f \circ x^{-1}\big)(y) = \big(f \circ x^{-1}\big)(0) + \sum_{i=1}^{n} y_i g_i(y) \quad \forall y \in B$$

ja $g_i(0) = D_i\big(f \circ x^{-1}\big)(0) = (\partial_i)_p f$. Tällöin

$$f(u) = f(p) + \sum_{i=1}^{n} x^i(u) h_i(u),$$

missä $h_i = g_i \circ x$ ja

$$h_i(p) = g_i(0) = (\partial_i)_p f.$$

Siis

$$\begin{aligned} vf &= \underbrace{v\big(f(p)\big)}_{=0} + \sum_{i=1}^{n} \underbrace{x^i(p)}_{=0} vh_i + \sum_{i=1}^{n} (vx^i) h_i(p) \\ &= \sum_{i=1}^{n} vx^i (\partial_i)_p f. \end{aligned}$$

Tämä pätee kaikilla $f \in C^\infty(p)$, joten

$$v = \sum_{i=1}^{n} vx^i (\partial_i)_p.$$

Siten vektorit $(\partial_i)_p,\ i = 1, \dots, n$, virittävät T_pM:n. Osoitettava vielä niiden lineaarinen riippumattomuus. Jos

$$w = \sum_{i=1}^{n} b_i (\partial_i)_p = 0,$$

niin

$$0 = wx^j = \sum_{i=1}^{n} b_i \underbrace{(\partial_i)_p x^j}_{=\delta_{ij}} = b_j.$$

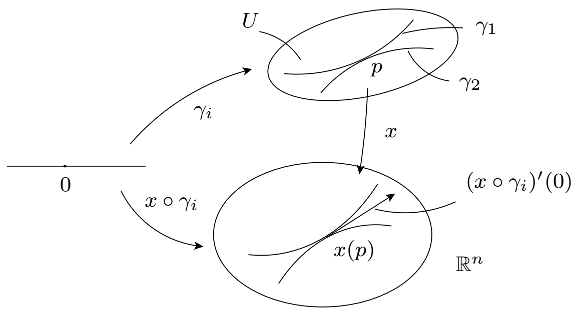
Siis vektorit $(\partial_i)_p,\ i = 1, \dots, n$, lineaarisesti riippumattomia. □

Remark 2.15. Edellä ollut tangenttivektorin määritelmä on käyttökelpoinen vain C^∞-monistoilla. Syy: Jos M on C^k-monisto, niin Lauseen 2.14 todistuksessa esiintyvät funktiot h_i eivät välttämättä ole C^k-sileitä (vrt. Lemma 2.13).

Vaihtoehtoinen määritelmä, joka toimii myös C^k-monistoilla, $k \geq 1$. Olkoon M C^k-monisto ja $p \in M$. Olkoot $\gamma_i \colon I_i \to M$ C^1-polkuja, $0 \in I_i \subset \mathbb{R}$ avoimia välejä, $\gamma_i(0) = p,\ i = 1, 2$. Asetetaan (ekvivalenssirelaatio) $\gamma_1 \sim \gamma_2 \iff$ jokaisella kartalla (U, x) p:ssä pätee

$$\big(x \circ \gamma_1\big)'(0) = \big(x \circ \gamma_2\big)'(0)$$

Määr.: Ekvivalenssiluokat = M:n tangenttivektorit p:ssä. C^∞-moniston tapauksessa tämä määritelmä vastaa aiempaa määritelmää (vastaavuus: $[\gamma] = \dot\gamma_0$).



2.16 Tangenttikuvaus

Definition 2.17. Olkoot M^m ja N^n differentioituvia monistoja ja olkoon $f \colon M \to N$ C^∞ kuvaus. Sanomme, että lineaarinen kuvaus $f_* \colon T_pM \to T_{f(p)}N$,

$$(f_* v)g = v(g \circ f), \quad \forall g \in C^\infty\big(f(p)\big),\ v \in T_pM,$$

on f:n *tangenttikuvaus* p:ssä. Käytämme myös merkintöjä $f_{*p},\ T_pf$.

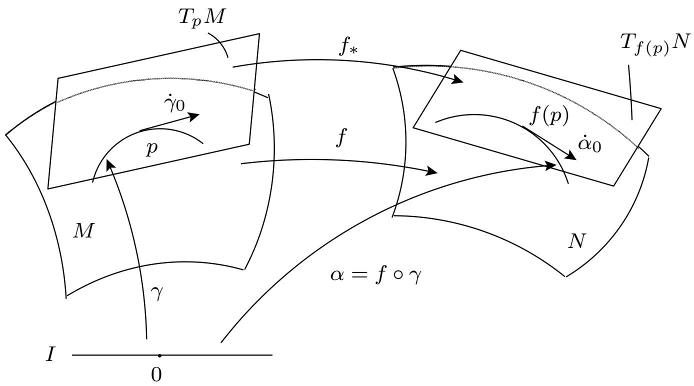
Remark 2.18.

1. (Helpoksi) harjoitustehtäväksi jää todeta, että $f_* v$ on tangenttivektori $f(p)$:ssä kaikilla $v \in T_pM$, ja että f_* on lineaarinen.
2. Jos $M = \mathbb{R}^m$ ja $N = \mathbb{R}^n$, niin $f_{*p} = f'(p)$ (vrt. alla oleva kanoninen samaistus $T_p\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^n$).

3. "Ketjusääntö": Olkoot M, N, ja L differentioituvia monistoja sekä $f\colon M \to N$ ja $g\colon N \to L$ C^∞- kuvauksia. Silloin kaikilla $p \in M$,

$$(g \circ f)_{*p} = g_{*f(p)} \circ f_{*p}. \quad \text{(HT)}$$

4. Tangenttikuvauksen "tulkinta" polkuja käyttäen:
Olkoon $v \in T_pM$ ja $\gamma\colon I \to M$ C^∞-polku siten, että $\gamma(0) = p$ ja $\dot\gamma_0 = v$. Olkoon $f\colon M \to N$ C^∞-kuvaus ja $\alpha = f \circ \gamma\colon I \to N$. Silloin $f_*v = \dot\alpha_0$. (HT)



Olkoon $x = (x^1, \dots, x^m)$ kartta pisteessä $p \in M^m$ ja $y = (y^1, \dots, y^n)$ kartta pisteessä $f(p) \in N^n$. Mikä on lineaarikuvauksen $f_*\colon T_pM \to T_{f(p)}N$ matriisi kantojen $\big(\frac{\partial}{\partial x^i}\big)_p$, $i = 1, \dots, m$, ja $\big(\frac{\partial}{\partial y^j}\big)_{f(p)}$, $j = 1, \dots, n$, suhteen? Lause 2.14 $\Rightarrow$

$$f_*\left(\frac{\partial}{\partial x^j}\right)_p = \sum_{i=1}^n f_*\left(\frac{\partial}{\partial x^j}\right)_p y^i \left(\frac{\partial}{\partial y^i}\right)_{f(p)}, \quad 1 \le j \le m.$$

Saadaan $n \times m$ matriisi (a_{ij}),

$$a_{ij} = f_*\left(\frac{\partial}{\partial x^j}\right)_p y^i = \frac{\partial}{\partial x^j}(y^i \circ f).$$

Tämä on f:n Jacobin matriisi pisteessä p ko. kantojen suhteen. Se on matriisina sama kuin lineaarikuvauksen $g'\big(x(p)\big)$, $g = y \circ f \circ x^{-1}$, matriisi $\mathbb{R}^m$:n ja $\mathbb{R}^n$:n standardikantojen suhteen.

Palautetaan mieliin, että $f\colon M^m \to N^n$ on diffeomorfismi, jos sekä f että sen käänteiskuvaus f^{-1} ovat C^∞. Kuvaus $f\colon M \to N$ on *lokaali diffeomorfismi* pisteessä $p \in M$, jos on olemassa p:n ja $f(p)$:n ympäristöt U ja V siten, että $f\colon U \to V$ on diffeomorfismi.
Huom.: Tällöin välttämättä $m = n$. (HT)

Theorem 2.19. *Olkoon $f\colon M \to N$ C^∞ ja $p \in M$. Tällöin f on lokaali diffeomorfismi p:ssä $\iff$ $f_*\colon T_pM \to T_{f(p)}N$ on isomorfismi.*

Todistus. $\mathbb{R}^n$:n käänteiskuvauslauseen sovellus (sivuutetaan). ☐

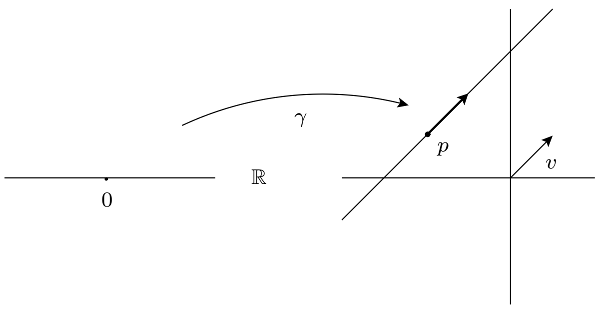
n-ulotteisen vektoriavaruuden tangenttiavaruus. Olkoon V n-ulotteinen reaalinen vektoriavaruus. Kuten olemme aiemmin todenneet (HT) jokainen (lineaarinen) isomorfismi $x\colon V \to \mathbb{R}^n$ indusoi saman C^∞-struktuurin V:hen. Voimme samastaa luonnollisella tavalla V:n ja T_pV:n, kun

$p \in V$. Jos $p \in V$, niin on olemassa kanoninen isomorfismi $i\colon V \to T_pV$. Nimittäin: Olkoon $v \in V$ ja $\gamma\colon \mathbb{R} \to V$ polku (p:n kautta kulkeva suora)

$$\gamma(t) = p + tv.$$

Asetetaan

$$i(v) = \dot\gamma_0.$$



<u>Esim.</u>: $V = \mathbb{R}^n, \quad T_p\mathbb{R}^n \cong \mathbb{R}^n$ kanonisesti.

Jos $f\colon M \to \mathbb{R}$ on C^∞ ja $p \in M$, niin määritellään f:n *differentiaali* $df\colon T_pM \to \mathbb{R}$ asettamalla

$$df v = vf, \quad v \in T_pM.$$

(Merkitään myös df_p.)
Käyttämällä yo. kanonista isomorfismia $i\colon \mathbb{R} \to T_{f(p)}\mathbb{R}$ saadaan $df = i^{-1} \circ f_*$. Usein samaistamme $df = f_*$. <u>Huom.</u>: Koska $df\colon T_pM \to \mathbb{R}$ on lineaarinen, $df \in T_pM^*$ (=T_pM:n duaali).

$$\begin{tikzcd}
T_pM \arrow[rr, "f_*"] \arrow[dr, bend right, "df"'] & & T_{f(p)}\mathbb{R} \\
& \mathbb{R} \arrow[ur, bend right, "i"'] &
\end{tikzcd}$$

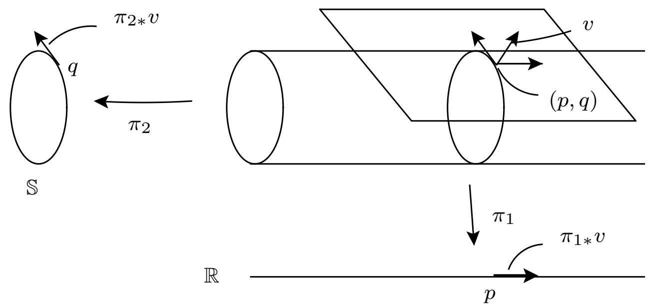
Tulon tangenttiavaruus. Olkoot M ja N differentioituvia monistoja ja

$$\pi_1\colon M \times N \to M,$$
$$\pi_2\colon M \times N \to N$$

projektiot. Projektioiden avulla voidaan samaistaa $T_{(p,q)}(M \times N)$ ja $T_pM \oplus T_qN$ luonnollisella tavalla: Määritellään kanoninen isomorfismi

$$\tau\colon T_{(p,q)}(M \times N) \to T_pM \oplus T_qN,$$
$$\tau v = \underbrace{\pi_{1*}v}_{\in T_pM} + \underbrace{\pi_{2*}v}_{\in T_pN}, \quad v \in T_{(p,q)}(M \times N).$$

<u>Esim.</u>: $M = \mathbb{R},\ N = \mathbb{S}^1$



Olkoon $f\colon M \times N \to L$ C^∞-kuvaus, missä L on differentioituva monisto. Jokaisella $(p,q) \in M \times N$ määritellään kuvaukset

$$f_p\colon N \to L, \quad f^q\colon M \to L,$$
$$f_p(q) = f^q(p) = f(p,q).$$

Tällöin, jos $v \in T_pM$ ja $w \in T_qN$, niin

$$f_*(v + w) = (f^q)_*v + (f_p)_*w. \quad \text{(HT)}$$

2.20 Tangenttikimppu

Olkoon M differentioituva monisto. Määritellään M:n *tangenttikimppu* (merk. TM) pistevieraana yhdisteenä kaikista tangenttiavaruuksista, ts.

$$TM = \bigsqcup_{p \in M} T_pM.$$

TM:n pisteet ovat siten (järjestettyjä) pareja (p,v), missä $p \in M$ ja $v \in T_pM$. Usein merkitään lyhyemmin $v = (p,v)$. Tämä on perusteltua, sillä ehto $v \in T_pM$ määrää pisteen $p \in M$.

Olkoon $\pi\colon TM \to M$ projektio

$$\pi(v) = p, \quad \text{kun } v \in T_pM.$$

Tangenttikimpulla TM on luonnollinen differentioituvan moniston struktuuri.

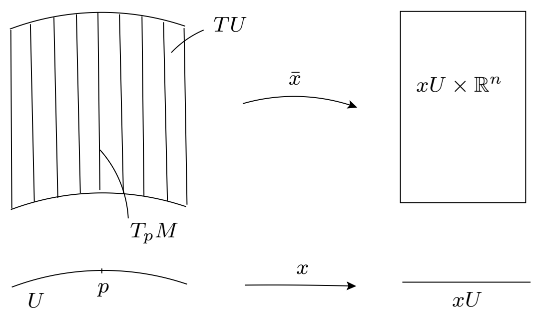
Theorem 2.21. *Olkoon M differentioituva n-monisto. Silloin sen tangenttikimpulla TM on luonnollinen topologia ja differentioituvan $2n$-moniston struktuuri niin, että projektio $\pi\colon TM \to M$ on sileä.*

Todistus. (idea): Olkoon (U,x), $x = (x^1, \ldots, x^n)$, kartta M:llä. Määritellään bijektio

$$\bar{x}\colon TU \to xU \times \mathbb{R}^n \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n = \mathbb{R}^{2n}$$

seuraavasti. [Tässä $TU = \bigsqcup_{p\in U} T_pU = \bigsqcup_{p \in U} T_pM$.] Jos $p \in U$ ja $v \in T_p$, niin asetetaan

$$\bar{x}(v) = \big(\underbrace{x^1(p), \ldots, x^n(p)}_{\in \mathbb{R}^n}, \underbrace{vx^1, \ldots, vx^n}_{\in \mathbb{R}^n}\big)$$



Siirretään ensin $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$:n topologia TM:ään kuvauksilla $\bar{x}$ ja todetaan, että parit $(TU, \bar{x})$ muodostavat TM:n kartaston. Saadaan TM:ään C^∞-struktuuri. [Yksityiskohdat harjoitustehtävänä.] □

Jatkossa M:n tangenttikimpulla tarkoitetaan TM:ää yhdessä tämän differentioituvan struktuurin kanssa. Se on esimerkki M:n vektorikimpuista.

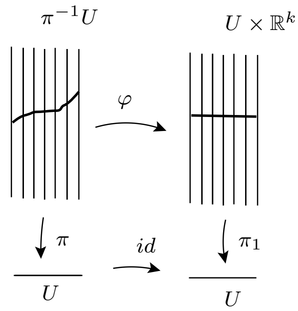
Olkoon $\pi\colon TM \to M$ projektio ($\pi(v) = p$, kun $v \in T_pM$). Silloin $\pi^{-1}(p) = T_pM$ on *säie* p:n päällä. Jos $A \subset M$, niin mikä tahansa kuvaus $s\colon A \to TM$, jolle $\pi \circ s = id$, on TM:n *sektio* A:ssa (eli *vektorikenttä*).

Sileät vektorikimput. Olkoon M differentioituva monisto. Sileä k-ulotteinen *vektorikimppu* M:n päällä on pari (E, π), missä E on sileä monisto ja $\pi\colon E \to M$ on sileä surjektiivinen kuvaus (projektio), joille pätee:

(a) Jokaisella $p \in M$, joukko $E_p = \pi^{-1}(p) \subset E$ on k-ulotteinen reaalinen vektoriavaruus ($= E$:n säie p:n päällä).

(b) Jokaisella $p \in M$ on olemassa ympäristö $U \ni p$ ja diffeomorfismi $\varphi\colon \pi^{-1}U \to U \times \mathbb{R}^k$ ($= E$:n lokaali trivialisaatio U:n päällä) siten, että kaavio

$$\begin{tikzcd} \pi^{-1}U \arrow[rr, "\varphi"] \arrow[dr, "\pi"'] & & U \times \mathbb{R}^k \arrow[dl, "\pi_1"] \\ & U & \end{tikzcd}$$



kommutoi [$\pi_1\colon U \times \mathbb{R}^k \to U$ projektio] ja $\varphi|E_q\colon E_q \to \{q\} \times \mathbb{R}^k$ on lineaarinen isomorfismi jokaisella $q \in U$.

Monisto E on kimpun *totaali avaruus* ja M *kanta-avaruus.* Jos on olemassa E:n lokaali trivialisaatio koko moniston M päällä $\varphi\colon \pi^{-1}M \to M \times \mathbb{R}^k$, niin E on *triviaali kimppu.*

E:n sektio on mikä tahansa kuvaus $\sigma\colon M \to E$, jolle pätee $\pi \circ \sigma = id\colon M \to M$. Jos $\sigma\colon M \to E$ on sileä (huom. M ja E differentioituvia monistoja), niin σ on sileä sektio. *Nollasektio* on kuvaus $\zeta\colon M \to E$ s.e.

$$\zeta(p) = 0 \in E_p \quad \forall p \in M.$$

Jos $U \subset M$ on avoin, niin E:n *lokaali kehys* U:n päällä on (mikä tahansa) $(\sigma_1, \ldots, \sigma_k)$, missä jokainen σ_i on E:n sileä sektio (U:n päällä) siten, että $\big(\sigma_1(p), \sigma_2(p), \ldots, \sigma_k(p)\big)$ on E_p:n kanta $\forall p \in U$. Jos $U = M$, kutsutaan $(\sigma_1, \ldots, \sigma_k)$:ta *globaaliksi kehykseksi.*

2.22 Alimonistot

Definition 2.23. Olkoot M ja N differentioituvia monistoja ja $f\colon M \to N$ C^∞-kuvaus. Sanomme, että:

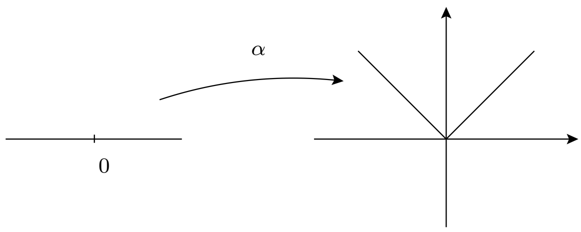
1. f on *submersio*, jos $f_{*p}\colon T_pM \to T_{f(p)}N$ on surjektio $\forall p \in M$.
2. f on *immersio*, jos $f_{*p}\colon T_pM \to T_{f(p)}N$ on injektio $\forall p \in M$.
3. f on *upotus*, jos f on immersio ja $f\colon M \to fM$ on homeomorfismi (huom. fM:ssä relatiivitopologia).

Jos $M \subset N$ ja inkluusio $i\colon M \hookrightarrow N$, $i(p) = p$, on upotus, niin M on N:n *alimonisto*.

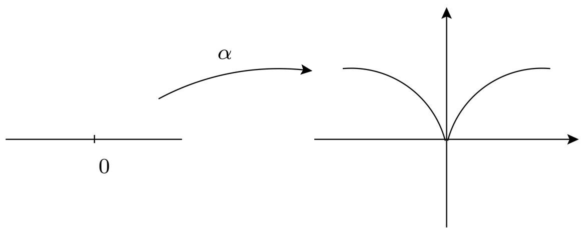
Remark 2.24. Jos $f\colon M^m \to N^n$ on immersio, niin välttämättä $m \le n$.
$n - m$ on (f:n) *kodimensio*.

Example 2.25. (a) Jos $M_1, \dots, M_k$ ovat sileitä monistoja, niin jokainen projektio $\pi_i\colon M_1 \times \cdots \times M_k \to M_i$ on submersio.

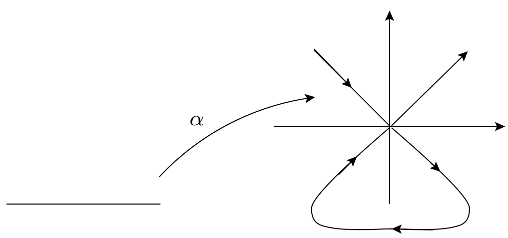
(b) $(M = \mathbb{R},\ N = \mathbb{R}^2)$ $\alpha\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, $\alpha(t) = (t, |t|)$ ei differentioituva pist. $t = 0$.



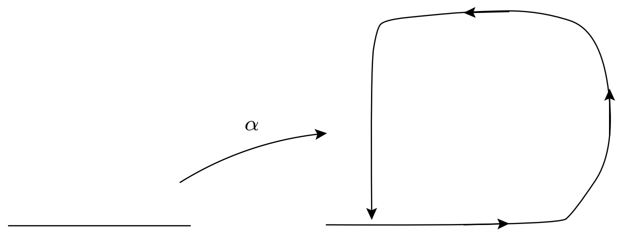
(c) $\alpha\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, $\alpha(t) = (t^3, t^2)$ on C^∞, muttei immersio. Syy: $\alpha'(0) = 0$.



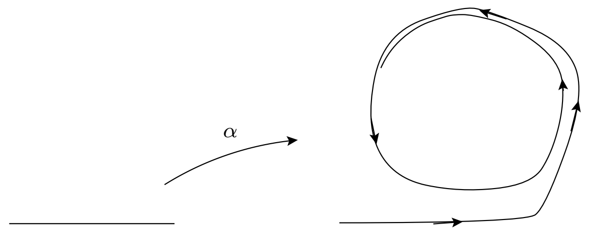
(d) $\alpha\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, $\alpha(t) = (t^3 - 4t, t^2 - 4)$ on C^∞, immersio, muttei upotus $(\alpha(\pm 2) = (0,0))$.



(e) α:lla on olemassa käänteiskuvaus, mutta α ei ole upotus (käänteiskuvaus ei ole jatkuva indusoidussa topologiassa).



(f) α on upotus.



Remark 2.26. Kirjallisuudessa alimoniston käsitteellä saattaa joskus olla eri merkitys. Esim. Bishop-Crittenden [BC] sallii tapauksen (e) alimoniston määritelmässä.

Theorem 2.27. *Olkoon $f\colon M^m \to N^n$ immersio. Silloin jokaisella pisteellä $p \in M^m$ on ympäristö U s.e. $f|U\colon U \to N^n$ on upotus.*

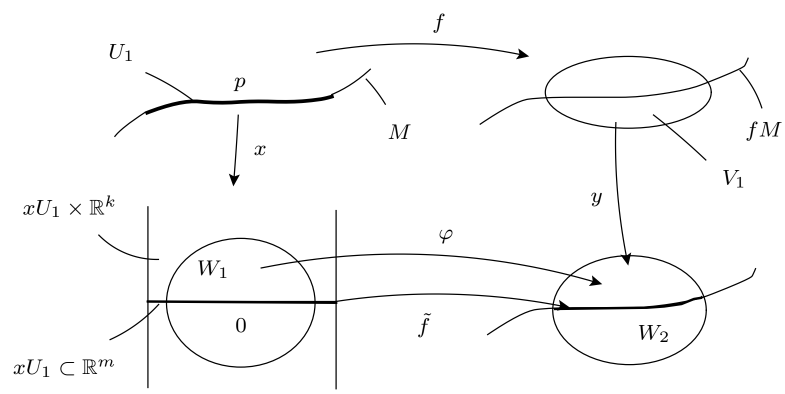
Todistus. Olkoon $p \in M$. On löydettävä ympäristö $U \ni p$ s.e. $f|U : U \to fU$ on homeomorfismi, kun fU:lla on N:stä indusoitu topologia. Olkoot (U_1, x) ja (V_1, y) kartat pisteissä p ja $f(p)$ s.e. $fU_1 \subset V_1,\ x(p) = 0\ (\in \mathbb{R}^m)$, ja $y\big(f(p)\big) = 0\ (\in \mathbb{R}^n)$. Asetetaan $\tilde f = y \circ f \circ x^{-1},\ \tilde f = (\tilde f_1, \dots, \tilde f_n)$. Koska f on immersio, on $\tilde f'(0)\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ injektio. Voidaan olettaa, että $\tilde f'(0)\mathbb{R}^m = \mathbb{R}^m \subset \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^k,\ k = n - m$ (muussa tapauksessa suoritetaan kierto $\mathbb{R}^n$:ssä). Tällöin $\det \tilde f'(0) \neq 0$, kun $\tilde f'(0)$ tulkitaan lineaariseksi kuvaukseksi $\mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$. Määritellään kuvaus

$$
\begin{aligned}
&\varphi\colon xU_1 \times \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^n,\\
&\varphi(\tilde x, t) = \big(\tilde f_1(\tilde x), \tilde f_2(\tilde x), \dots, \tilde f_m(\tilde x), \tilde f_{m+1}(\tilde x) + t_1, \dots, \tilde f_{m+k}(\tilde x) + t_k)\big),\\
&\tilde x \in xU_1, \quad t = (t_1, \dots, t_k) \in \mathbb{R}^k.
\end{aligned}
$$

Lineaarikuvauksen $\varphi'(0,0)\colon \mathbb{R}^{m+k} \to \mathbb{R}^{m+k}$ matriisi on

$$
\begin{pmatrix} \frac{\partial \tilde f_i(0)}{\partial \tilde x_j} & 0 \\ * & I_k \end{pmatrix},
$$

joten $\det \varphi'(0,0) = \det \tilde f'(0) \neq 0$. Käänteiskuvauslauseen nojalla on olemassa ympäristöt $0 \in W_1 \subset xU_1 \times \mathbb{R}^k$ ja $0 \in W_2 \subset \mathbb{R}^n$ s.e. $\varphi|W_1\colon W_1 \to W_2$ on diffeomorfismi. Merkitään $\tilde U = W_1 \cap xU_1$ ja $U = x^{-1}\tilde U\ (\subset U_1)$. Koska $\varphi|xU_1 \times \{0\} = \tilde f$, niin $\varphi|\tilde U = \tilde f$.
Erityisesti, $f|U\colon U \to fU$ on homeomorfismi, kun fU:ssa on N:stä indusoitu topologia.



Example 2.28. Olkoon $f\colon \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}$ C^∞-funktio s.e. $\nabla f(p) = \big(D_1 f(p), \dots, D_{n+1} f(p)\big) \neq 0$ kaikilla $p \in M = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \colon f(x) = 0\} \neq \emptyset$. Tällöin M on $\mathbb{R}^{n+1}$:n n-ulotteinen alimonisto.

Esimerkin väitteen todistuksen idea: Olkoon $p \in M$ mielivaltainen. Siirron ja kierron jälkeen voidaan olettaa, että $p = 0$ ja

$$\nabla f(0) = \Big(0, \dots, 0, \frac{\partial f}{\partial x_{n+1}}(0)\Big).$$

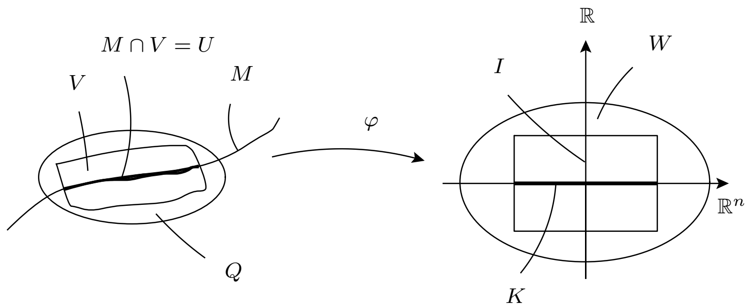
Siten $\frac{\partial f}{\partial x_{n+1}}(0) \neq 0$. Määritellään kuvaus $\varphi\colon \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}^{n+1}$,

$$\varphi(x) = \big(x_1, \dots, x_n, f(x)\big), \quad x = (x_1, \dots, x_n, x_{n+1}).$$

Tällöin

$$\det \varphi'(0) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & & & & & \vdots \\ \vdots & & & & & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & \frac{\partial f}{\partial x_{n+1}}(0) \end{vmatrix} = \frac{\partial f}{\partial x_{n+1}}(0) \neq 0.$$

Käänteiskuvauslauseen mukaan $\exists$ ympäristöt $Q \ni p$ ja $W \ni \varphi(0) = (0,0) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ s.e. $\varphi\colon Q \to W$ on diffeomorfismi.



Valitaan avoin joukko $K \subset \mathbb{R}^n$, $0 \in K$, ja avoin väli $I \subset \mathbb{R}$, $0 \in I$, s.e. $K \times I \subset W$. Olkoon $V = \varphi^{-1}(K \times I) \cap Q$ ja $U = V \cap M$. Silloin $\varphi\colon V \to K \times I$ on diffeomorfismi. Olkoon $y = \varphi|U$. Tehdään samoin kaikilla $p \in M$, jolloin havaitaan, että parit (U, y) muodostavat M:n kartaston. Koska inkluusiolle $i\colon M \hookrightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ pätee

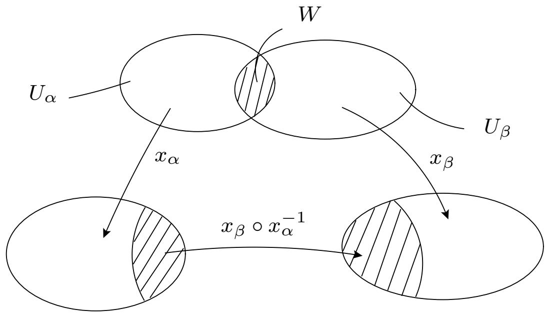
$$i|U = y^{-1} \circ \varphi|U,$$

on i upotus. $\square$

2.29 Suunnistus

Definition 2.30. Sileä monisto M on *suunnistuva*, jos M:llä on sileä kartasto $\{(U_\alpha, x_\alpha)\}$ s.e. jokaisella indeksillä α ja β, joilla $U_\alpha \cap U_\beta = W \neq \emptyset$, kuvauksen $x_\beta \circ x_\alpha^{-1}$ Jacobin determinantti on positiivinen jokaisessa pisteessä $q \in x_\alpha W$, ts.

$$\det\bigl(x_\beta \circ x_\alpha^{-1}\bigr)'(q) > 0, \quad \forall q \in x_\alpha W. \tag{2.31}$$



Muussa tapauksessa M on *suunnistumaton.* Jos M on suunnistuva, niin M:n *suunnistus* on sellainen kartasto, jolle (2.31) pätee. Lisäksi sanomme, että M (varustettuna tällä kartastolla) on *suunnistettu*. Sanomme, että kaksi sellaista kartastoa, jotka toteuttavat (2.31):n, määräävät *saman suunnistuksen*, jos niiden yhdiste toteuttaa myös (2.31):n.

Remark 2.32.

1. Varoitus: Sileällä struktuurilla voi olla eri merkityksiä kirjallisuudessa (esim. do Carmo [Ca2]). Mikä menee vikaan, jos määrittelisimme suunnistuvuuden sanomalla: "M on suunnistuva, jos sille voidaan antaa C^∞-struktuuri niin, että (2.31) pätee?" (HT)
2. Jos M on suunnistuva ja yhtenäinen, niin M:llä on täsmälleen kaksi (eri) suunnistusta. (HT)
3. Jos M ja N ovat sileitä monistoja ja $f\colon M \to N$ on diffeomorfismi, niin silloin
$$M \ \text{ on suunnistuva} \iff N \text{ on suunnistuva.}$$
4. Olkoot M ja N ovat yhtenäisiä suunnistettuja sileitä monistoja ja $f\colon M \to N$ diffeomorfismi. Tällöin f indusoi suunnistuksen N:ään. Jos N:n indusoitu suunnistus on sama kuin N:n alkuperäinen suunnistus, sanotaan, että f on *suunnansäilyttävä* (muussa tapauksessa *suunnankääntävä*).

Example 2.33.

1. Oletetaan, että on olemassa M:n kartasto $\{(U, x), (V, y)\}$ siten, että $U \cap V$ on yhtenäinen. Silloin M on suunnistuva.
Todistus. Kuvaus $y \circ x^{-1}\colon x(U \cap V) \to y(U \cap V)$ on diffeomorfismi, joten
$$\det\bigl(y \circ x^{-1}\bigr)'(q) \neq 0 \quad \forall q \in x(U \cap V).$$
Koska $q \mapsto \det\bigl(y \circ x^{-1}\bigr)'(q)$ on jatkuva ja $x(U \cap V)$ on yhtenäinen, determinantti ei voi vaihtaa merkkiä. Jos merkki on positiivinen, asia on selvä. Jos merkki on negatiivinen, korvataan kartta (V, y), $y = (y_1, \dots, y_n)$, kartalla $(V, \tilde{y})$, $\tilde{y} = (-y_1, y_2, \dots, y_n)$. Silloin kartasto $\{(U, x), (V, \tilde{y})\}$ toteuttaa (2.31):n. $\square$
2. Esimerkiksi pallo S^n on suunnistuva edellisen kohdan nojalla.

2.34 Ryhmän epäjatkuva toiminta

Definition 2.35. Sanomme, että ryhmä G *toimii* differentioituvalla monistolla M, jos on olemassa kuvaus $\varphi\colon G \times M \to M$ s.e.

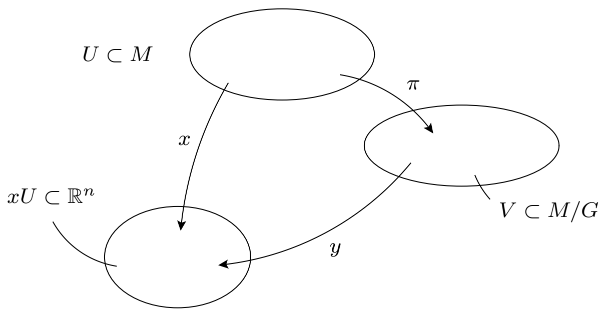
1. kuvaus $\varphi_p\colon M \to M$,
$$\varphi_g(p) = \varphi(g,p),$$
on diffeomorfismi kaikilla $g \in G$, ja $\varphi_e = id_M$ (e = neutraalialkio),

2. jos $g, h \in G$, niin $\varphi_{gh} = \varphi_g \circ \varphi_h$.

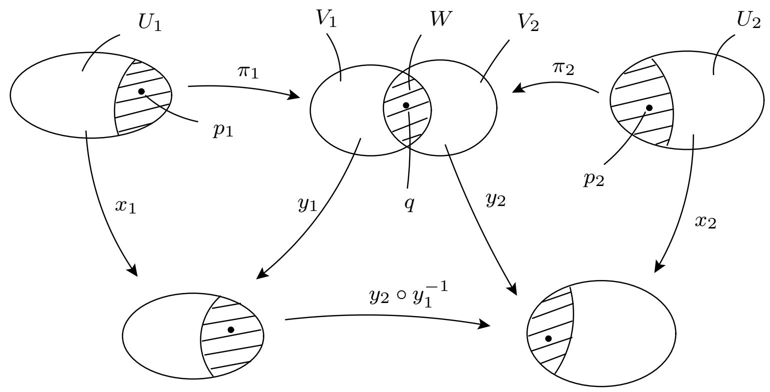
Useimmiten kirjoitamme $\varphi(g,p) = gp,\ g \in G,\ p \in M$. Ryhmän toiminta määrittelee M:ään ekvivalenssirelaation:
$$p \sim q \iff \exists\, g \in G \text{ s.e. } q = gp.$$
Sanomme edelleen, että G *toimii aidosti epäjatkuvasti ilman kiintopisteitä*, jos jokaisella $p, q \in M$, joilla $p \not\sim q$, on olemassa ympäristöt $V_1 \ni p$ ja $V_2 \ni q$ s.e. $gV_1 \cap V_2 = \emptyset\ \forall g \in G$ ja jokaisella $m \in M$ on olemassa ympäristö U s.e. $gU \cap U = \emptyset$ kaikilla $g \neq e$. (Tässä $gU = \varphi_g U$.) Olkoon M/G tämän ekvivalenssirelaation tekijäavaruus ja $\pi\colon M \to M/G$, $\pi(p) = [p] = Gp$ projektio.

Theorem 2.36. *Olkoon M^n differentioituva monisto ja olkoon G ryhmä, joka toimii M:llä aidosti epäjatkuvasti ilman kiintopisteitä. Silloin tekijäavaruudella M/G on sileä struktuuri s.e. $\pi\colon M \to M/G$ on lokaali diffeomorfismi.*

Todistus. Jokaisella $p \in M$ valitaan kartta (U, x), $p \in U$, s.e. $gU \cap U = \emptyset\ \forall g \neq e$. Tällöin $\pi|U$ on injektio. Merkitään $V = \pi U$ $(\subset M/G)$.



Koska $\pi|U\colon U \to V$ on bijektio, voimme määritellä homeomorfismin $y\colon V \to xU \subset \mathbb{R}^n$ asettamalla $y = x \circ (\pi|U)^{-1}$. [Huom. M/G:ssä tekijätopologia, eli $D \subset M/G$ avoin $\iff$ $\pi^{-1}D \subset M$ avoin.] Olkoon $\mathcal{A} = \{(V, y)\}$, missä kartat (V, y) on konstruoitu yo. tavalla antamalla p:n käydä läpi kaikki M:n pisteet. Olkoot $(V_1, y_1), (V_2, y_2) \in \mathcal{A}$ karttoja s.e. $W = V_1 \cap V_2 \neq \emptyset$. On osoitettava, että $y_2 \circ y_1^{-1}|y_1W\colon y_1W \to y_2W$ on diffeomorfismi. Olkoot (U_i, x_i), $i = 1, 2$, vastaavat kartat M:llä, ts. $\pi_i = \pi|U_i\colon U_i \to V_i$ on bijektio ja $y_i = x_i \circ (\pi|U_i)^{-1}$. Koska
$$y_2 \circ y_1^{-1}|y_1W = x_2 \circ \pi_2^{-1} \circ \pi_1 \circ x_1^{-1}|y_1W$$
(= kuvauksen $\pi_2^{-1} \circ \pi_1|\pi_1^{-1}W$ lokaali esitys), meidän on näytettävä, että $\pi_2^{-1} \circ \pi_1|\pi_1^{-1}W$ on diffeomorfismi. Huomaa, että
$$\pi_2^{-1} \circ \pi_1|\pi_1^{-1}W\colon \pi_1^{-1}W \to \pi_2^{-1}W$$
on homeomorfismi. Olkoon $q \in W$ mielivaltainen ja merkitään $p_i = \pi_i^{-1}(q)$.



Riittää osoittaa, että p_1:llä on ympäristö A s.e. $\pi_2^{-1} \circ \pi_1|A$ on diffeomorfismi. Koska $p_1 \sim p_2$, on olemassa $g \in G$ s.e. $p_2 = gp_1$. Väitämme: On olemassa p_1:n ympäristö A s.e.

$$\pi_2^{-1} \circ \pi_1|A = \varphi_g|A \tag{2.37}$$

ja siis diffeomorfismi. Tehdään vastaoletus, ettei (2.37) päde. Silloin on olemassa jono p_1:n ympäristöjä A_j s.e. $A_{j+1} \subset A_j$ ja $\cap_j A_j = \{p_1\}$ ja pisteitä $z_j \in A_j$ s.e.

$$\big(\pi_2^{-1} \circ \pi_1\big)(z_j) \neq gz_j.$$

Toisaalta $z_j \sim \big(\pi_2^{-1} \circ \pi_1\big)(z_j)$, joten $\big(\pi_2^{-1} \circ \pi_1\big)(z_j) = g_j z_j$ jollakin $g_j \in G$. Siten $g_j \neq g$. Nyt $z_j \to p_1$ ja $\pi_2^{-1} \circ \pi_1$ on jatkuva, joten

$$g_j z_j = \big(\pi_2^{-1} \circ \pi_1\big)(z_j) \to p_2 = \big(\pi_2^{-1} \circ \pi_1\big)(p_1).$$

Olkoon A_{j_0} mielivaltainen. Silloin

$$z_j \in A_{j_0}$$

kaikilla riittävän suurilla j. Koska gA_{j_0} on p_2:n ympäristö ja $g_j z_j \to p_2$, on oltava

$$g_j z_j \in gA_{j_0}$$

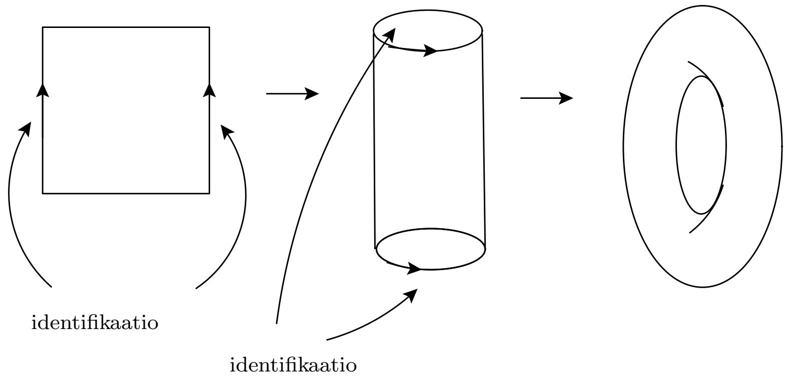
kaikilla riittavän suurilla j. Siten

$$z_j \in \big(g_j^{-1} g\big) A_{j_0} \cap A_{j_0}, \quad g_j^{-1} g \neq e.$$

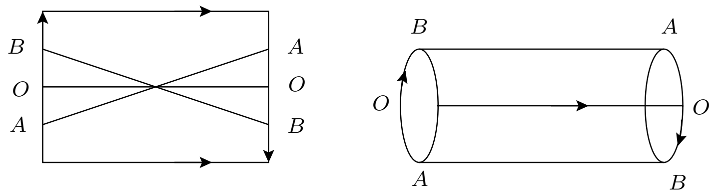
Koska A_{j_0} oli mielivaltainen, saadaan ristiriita ja siten (2.37) pätee.
Projektio $\pi\colon M \to M/G$ on lokaali diffeomorfismi, sillä $\pi|U\colon U \to V$ on diffeomorfismi (U ja V kuten yllä). Sen lokaali esitys on $y \circ (\pi|U) \circ x^{-1} = id$. Lopuksi todetaan, että M/G on Hausdorff (ylim. HT). $\square$

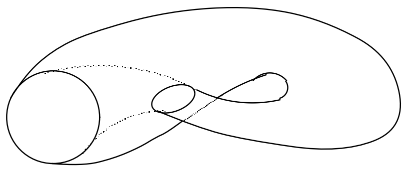
Example 2.38. 1. Olkoon $M = \mathbb{S}^n$ ja G diffeomorfismien $\mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^n$ ryhmä, jonka virittää ”antipodaali” kuvaus $p \mapsto -p$. Silloin $M/G = \mathbb{R}P^n$.

2. Olkoon $M = \mathbb{R}^n$ ja $G = \mathbb{Z}^n$ ryhmäoperaationa yhteenlasku ($\mathbb{Z}^n = \{(z_1, \ldots, z_n)\colon z_i \in \mathbb{Z}\}$). Ryhmä G toimii $\mathbb{R}^n$:llä aidosti epäjatkuvasti ilman kiintopisteitä (toiminnan määrää siirrot $x \mapsto x + h,\ h \in \mathbb{Z}^n$). Nyt $M/G = \mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n = n$-ulotteinen torus T^n.



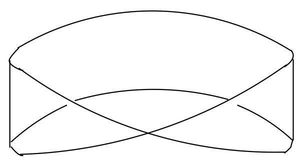
3. *Kleinin pullo* saadaan (esim.) seuraavasti: Pyöräytetään yz-tason ympyrä $(y-1)^2+z^2=\frac{1}{4}$ z-akselin ympäri. Saadaan torus T^2. Olkoon G diffeomorfismien $T^2 \to T^2$ ryhmä, jonka muodostavat identtinen kuvaus ja $p \mapsto -p$. Silloin T^2/G varustettuna Lauseen 2.36 antamalla C^∞-struktuurilla on Kleinin pullo. Kleinin pullo voidaan myös ajatella "kiertyneeksi" torukseksi:





4. *Möbius-nauha.* Olkoon $C=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \colon x^2+y^2=1,\ -1<z<1\}$, $G=\{id, p\mapsto -p\}$ (= ryhmä C:n diffeomorfismeja).

$$C/G = \quad \text{Möbiuksen nauha.}$$



5. Olkoon $M=\mathbb{R}$ ja $G=\{id, p\mapsto -p\}$.

Nyt G ei toimi aidosti epäjatkuvasti: $U \ni 0$ ympäristö $\Rightarrow$ $gU\cap U\neq\emptyset\ \forall g\in G$.

3 Vektorikentät ja virtaukset

Otetaan käyttöön ns. *Einsteinin summaustapa*: Jos jokin indeksi esiintyy sekä ylä- että alaindeksinä samassa termissä, niin nämä termit summataan yli kaikkien mahdollisten kyseisen indeksin arvojen (useimmiten 1:stä avaruuden dimensioon n). Nämä mahdolliset indeksin arvot käyvät (yleensä) ilmi asiayhteydestä.
Esim.:

$$v^i\partial_i = \sum_{i=1}^n v^i\partial_i,$$
$$g_{ij}dx^i dx^j = \sum_{i,j=1}^n g_{ij}dx^i dx^j.$$

3.1 Vektorikentät

Olkoon M differentioituva n-monisto ja $A \subset M$. Palautetaan mieliin, että kuvausta $V\colon A \to TM$, jolle $\pi\circ V = id$, sanotaan *vektorikentäksi* A:ssa, ts. V on A:n sektio. Tällöin siis $V(p) \in T_pM\ \forall p \in A$. Merkitään $V_p = V(p)$. Jos $A \subset M$ on avoin ja $V\colon A \to TM$ on C^∞-vektorikenttä, niin merkitsemme $V \in \mathcal{T}(A)$. Selvästi $\mathcal{T}(A)$ on reaalinen vektoriavaruus, missä yhteenlasku ja skalaarilla kertominen määritellään pisteittän: Jos $V, W \in \mathcal{T}(A)$ ja $a, b \in \mathbb{R}$, niin $aV + bW$, $p \mapsto aV_p + bW_p$, on sileä vektorikenttä. Lisäksi vektorikenttiä $V \in \mathcal{T}(A)$ voidaan kertoa sileillä (reaaliarvoisilla) funktioilla $f \in C^\infty(A)$, jolloin tuloksena on sileä vektorikenttä fV, $p \mapsto f(p)V_p$. (HT)

Olkoon M differentioituva n-monisto ja $A \subset M$ avoin. Sanomme, että A:n vektorikentät $V^1, \ldots, V^n$ muodostavat *lokaalin kehyksen* (tai *kehyksen* A:ssa), jos vektorit $V_p^1, \ldots, V_p^n$ muodostavat T_pM:n kannan jokaisessa pisteessä $p \in A$. Tapauksessa $A = M$ sanomme, että vektorikentät $V^1, \ldots, V^n$ muodostavat *globaalin kehyksen*. Sanomme, että M on *yhdensuuntaistuva*, jos M:llä on olemassa sileä globaali kehys $V^1, \ldots, V^n \in \mathcal{T}(M)$. Tämä on yhtäpitävää sen kanssa, että TM on triviaali kimppu.[1] (HT)

Olkoon (U, x), $x = (x^1, \ldots, x^n)$, kartta ja $(\partial_i)_p = \left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_p$, $i = 1, \ldots, n$, vastaavat koordinaattivektorit pisteessä $p \in U$. Tällöin kuvaukset

$$\partial_i\colon U \to TM,\ p \mapsto (\partial_i)_p = \left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_p,$$

ovat vektorikenttiä U:ssa, (ns. *koordinaattivektorikenttiä*). Koska vektorikentät ∂_i muodostavat kehyksen U:ssa, voidaan jokainen U:n vektorikenttä V kirjoittaa muodossa

$$V_p = v^i(p)(\partial_i)_p, \quad p \in U,$$

missä $v^i\colon U \to \mathbb{R}$. Funktioita v^i kutsutaan V:n *komponenttifunktioiksi* kartan (U, x) suhteen. [Muista: Einsteinin summaustapa.]

Lemma 3.2. *Olkoon V vektorikenttä M:llä. Tällöin seuraavat ehdot ovat yhtäpitäviä:*

(a) $V \in \mathcal{T}(M)$.

[1] Jokainen Lien ryhmä on yhdensuuntaistuva. Palloista vain $\mathbb{S}^1, \mathbb{S}^3$ ja $\mathbb{S}^7$ ovat yhdensuuntaistuvia. Samoin $\mathbb{R}P^1$, $\mathbb{R}P^3$ ja $\mathbb{R}P^7$ ovat ainoat yhdensuuntaistuvat projektiiviset avaruudet. Toisaalta tulo $\mathbb{S}^n \times \mathbb{S}^m$ on yhdensuuntaistuva, jos ainakin toinen luvuista $n > 0$ tai $m > 0$ on pariton. ([Bott, Kervaire, Milnor])

(b) *Jos* $v^i\colon U \to \mathbb{R}$, $i = 1,\dots,n$, *ovat vektorikentän* V *komponenttifunktiot kartan* (U,x), $x = (x^1,\dots,x^n)$, *suhteen, ts.*

$$V|U = v^i\partial_i,$$

niin $v^i \in C^\infty(U)$.

(c) *Jos* $U \subset M$ *on avoin ja* $f\colon U \to \mathbb{R}$ *on sileä, niin funktio* $Vf\colon U \to \mathbb{R}$, $(Vf)(p) = V_pf$, *on sileä.*

Todistus. HT □

Remark 3.3. Erityisesti (b)-kohdasta seuraa, että koordinaattivektorikentät ∂_i ovat sileitä.

Oletetaan, että $A \subset M$ on avoin ja $V, W \in \mathcal{T}(A)$. Jos $f \in C^\infty(p)$, missä $p \in A$, niin $Vf \in C^\infty(p)$ ja siten $W_p(Vf) \in \mathbb{R}$ (= "funktion Vf derivaatta vektorin W_p suuntaan"). Näin saatua sileää funktiota $A \to \mathbb{R}$, $p \mapsto W_p(Vf)$, merkitään WVf:llä. Siis $(WVf)(p) = W_p(Vf)$. Merkitsemme myös $(WV)_pf = W_p(Vf)$. Jälkimmäiseen merkintään liittyy kuitenkin seuraava huomautus (varoitus).

Remark 3.4. $(WV)_p$ ei yleensä ole derivaatio, joten $(WV)_p \notin T_p(M)$. Syy: Leibnizin sääntö (2) ei päde (valitse $f = g$).

Lien hakatulo.

Definition 3.5. Oletetaan, että $A \subset M$ on avoin ja $V, W \in \mathcal{T}(A)$. Määritellään vektorikenttien V ja W *Lien hakatulo* $[V,W]$ (engl. *Lie bracket*) asettamalla

$$[V,W]_pf = V_p(Wf) - W_p(Vf), \quad p \in A,\ f \in C^\infty(p).$$

Theorem 3.6. *Olkoon* $A \subset M$ *avoin ja* $V, W \in \mathcal{T}(A)$. *Tällöin:*

(a) $[V,W]_p \in T_pM$.

(b) $[V,W] \in \mathcal{T}(A)$ *ja sille pätee*

$$[V,W]f = V(Wf) - W(Vf),\ f \in C^\infty(A). \tag{3.7}$$

(c) *Jos* $x = (x^1,\dots,x^n)$ *on kartta sekä* v^i *ja* w^i *vektorikenttien* V *ja* W *komponenttifunktiot kyseisen kartan suhteen, niin*

$$[V,W] = \left(v^i\partial_iw^j - w^i\partial_iv^j\right)\partial_j. \tag{3.8}$$

Huom. Kaava (3.8) voidaan kirjoittaa myös muodossa

$$[V,W] = \left(Vw^j - Wv^j\right)\partial_j.$$

Todistus.

(a) On osoitettava, että tangenttivektorin määritelmän ehdot (1) ja (2) pätevät $[V,W]_p$:lle.
Ehto (1) on selvä.
Ehto (2): Olkoot $f, g \in C^\infty(p)$. Tällöin

$$\begin{aligned}
[V,W]_p(fg) &= V_p\big(W(fg)\big) - W_p\big(V(fg)\big)\\
&= V_p\big(fWg + gWf\big) - W_p\big(fVg + gVf\big)\\
&= f(p)V_p(Wg) + (W_pg)(V_pf) + g(p)V_p(Wf) + (W_pf)(V_pg)\\
&\quad - f(p)W_p(Vg) - (V_pg)(W_pf) - g(p)W_p(Vf) - (V_pf)(W_pg)\\
&= f(p)\big(V_p(Wg) - W_p(Vg)\big) + g(p)\big(V_p(Wf) - W_p(Vf)\big)\\
&= f(p)[V,W]_pg + g(p)[V,W]_pf.
\end{aligned}$$

(b) Kaava (3.7) seuraa suoraan Lien hakatulon määritelmästä. Olkoon $f \in C^\infty(A)$. Koska $V, W \in \mathcal{T}(A)$, niin Lemman 3.2 (c)-kohdan mukaan funktiot Wf, Vf, $V(Wf)$, ja $W(Vf)$ ovat sileitä. Tällöin myös funktio $[V,W]f = V(Wf) - W(Vf)$ on sileä ja siten $[V,W] \in \mathcal{T}(A)$.

(c) Jos $V = v^i\partial_i$, $W = w^j\partial_j$, ja f on sileä, saadaan suoraan laskemalla

$$\begin{aligned}[V,W]f &= V(Wf) - W(Vf) = v^i\partial_i(w^j\partial_j f) - w^j\partial_j(v^i\partial_i f)\\ &= v^i(\partial_i w^j)(\partial_j f) + v^i w^j\partial_i(\partial_j f) - w^j(\partial_j v^i)(\partial_i f) - w^j v^i\partial_j(\partial_i f)\\ &= v^i(\partial_i w^j)(\partial_j f) - w^j(\partial_j v^i)(\partial_i f).\end{aligned}$$

Viimeisessä vaiheessa käytettiin hyväksi tietoa, että $\partial_j(\partial_i f) = \partial_i(\partial_j f)$ sileille funktioille f. Vaihtamalla i:n ja j:n roolit jälkimmäisessä summassa saadaan (3.8). □

Lemma 3.9. *Lien hakatulolle pätee:*

(a) Bilineaarisuus: Jos $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$, niin

$$\begin{aligned}[a_1X_1 + a_2X_2, Y] &= a_1[X_1,Y] + a_2[X_2,Y] \quad \textit{ja}\\ [X, a_1Y_1 + a_2Y_2] &= a_1[X,Y_1] + a_2[X,Y_2].\end{aligned}$$

(b) Antisymmetrisyys: $[X,Y] = -[Y,X]$.

(c) Jacobin identiteetti:

$$\big[X,[Y,Z]\big] + \big[Y,[Z,X]\big] + \big[Z,[X,Y]\big] = 0.$$

(d)

$$[fX, gY] = fg[X,Y] + f(Xg)Y - g(Yf)X.$$

Todistus.

(a),(b) Bilineaarisuus ja antisymmetrisyys seuraavat suoraan määritelmästä.

(c)

$$\begin{aligned}\big[X,[Y,Z]\big]f &= X\big([Y,Z]f\big) - [Y,Z](Xf)\\ &= X\big(Y(Zf) - Z(Yf)\big) - Y\big(Z(Xf)\big) + Z\big(Y(Xf)\big)\\ &= X\big(Y(Zf)\big) - X\big(Z(Yf)\big) - Y\big(Z(Xf)\big) + Z\big(Y(Xf)\big)\end{aligned}$$

$$\big[Y,[Z,X]\big]f = Y\big(Z(Xf)\big) - Y\big(X(Zf)\big) - Z\big(X(Yf)\big) + X\big(Z(Yf)\big)$$

$$\big[Z,[X,Y]\big]f = Z\big(X(Yf)\big) - Z\big(Y(Xf)\big) - X\big(Y(Zf)\big) + Y\big(X(Zf)\big)$$

$$\Rightarrow \big[X,[Y,Z]\big]f + \big[Y,[Z,X]\big]f + \big[Z,[X,Y]\big]f = 0.$$

(d)

$$\begin{aligned}[fX, gY]h &= fX(gYh) - gY(fXh)\\ &= fgX(Yh) + f(Xg)(Yh) - gfY(Xh) - g(Yf)(Xh)\\ &= fg[X,Y]h + f(Xg)Yh - g(Yf)Xh.\end{aligned}$$

□

Lemma 3.10. *Olkoon (U,x), $x=(x^1,\dots,x^n)$, kartta ja ∂_i, $i=1,\dots,n$, vastaavat koordinaattivektorikentät. Silloin*
$$[\partial_i,\partial_j]=0 \quad \forall i,j.$$

Todistus. Olkoon $p\in U$ ja $f\in C^\infty(p)$. Silloin

$$\begin{aligned}(\partial_i)_p(\partial_j f) &= (\partial_i)_p\left[\big(D_j\big(f\circ x^{-1}\big)\big)\circ x\right]\\ &= D_i\left[\big(D_j(f\circ x^{-1})\circ x\big)\circ x^{-1}\right]\big(x(p)\big)=D_iD_j\big(f\circ x^{-1}\big)\big(x(p)\big).\end{aligned}$$

Koska $D_iD_jg=D_jD_ig$ sileille funktioille g, saadaan väite. □

Example 3.11. Käytetään $\mathbb{R}^3$:n pisteille merkintää (x,y,t) ja $\mathbb{R}^3$:n (standardi)koordinaattivektoreille merkintää
$$\frac{\partial}{\partial x},\ \frac{\partial}{\partial y},\ \frac{\partial}{\partial t}.$$

Olkoot $X,Y,T\in\mathcal{T}(\mathbb{R}^3)$ vektorikentät

$$\begin{aligned}X&=\frac{\partial}{\partial x},\\ Y&=\frac{\partial}{\partial y}+x\frac{\partial}{\partial t},\\ T&=\frac{\partial}{\partial t}.\end{aligned}$$

Silloin $[X,Y]=T$, sillä

$$\begin{aligned}[X,Y]f&=X(Yf)-Y(Xf)\\ &=\frac{\partial}{\partial x}\Big(\frac{\partial f}{\partial y}+x\frac{\partial f}{\partial t}\Big)-\Big(\frac{\partial}{\partial y}+x\frac{\partial}{\partial t}\Big)\Big(\frac{\partial f}{\partial x}\Big)\\ &=\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}+x\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial t}+\frac{\partial x}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial t}-\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}-x\frac{\partial^2 f}{\partial t\partial x}\\ &=\frac{\partial f}{\partial t}=Tf.\end{aligned}$$

Samoin voidaan laskea, että $[X,T]=0$, $[Y,T]=0$. (HT)

Olkoot M ja N differentioituvia monistoja ja $f\colon M\to N$ sileä kuvaus. Jos V on vektorikenttä M:ssä, niin $f_{*p}V_p$ on tangenttivektori $T_{f(p)}N$:ssä. Tämä ei kuitenkaan välttämättä määrittele vektorikenttää N:ään. Esimerkiksi, jos f ei ole surjektio, ei pisteisiin $q\in N\setminus fM$ voida yo. tavalla liittää mitään vektoria. Jos taas f ei ole injektio, niin on olemassa pisteet $p_1\neq p_2$ s.e. $f(p_1)=f(p_2)$. Tällöin on mahdollista, että $f_{*p_1}V_{p_1}\neq f_{*p_2}V_{p_2}$, jolloin f_*V ei ole vektorikenttä N:ssä.
Jos on olemassa vektorikentät $V\in\mathcal{T}(M)$ ja $W\in\mathcal{T}(N)$ siten, että $f_{*p}V_p=W_{f(p)}$ kaikilla $p\in M$, kutsumme vektorikenttiä V ja W *f-yhteenliitetyiksi* ja merkitsemme $W=f_*V$.

Lemma 3.12. *Oletetaan, että $f\colon M\to N$ on sileä kuvaus, $V\in\mathcal{T}(M)$ ja $W\in\mathcal{T}(N)$. Tällöin V ja W ovat f-yhteenliitetyt, jos ja vain jos jokaisella sileällä funktiolla h, joka on määritelty jossain N:n avoimessa joukossa, pätee*

$$V(h\circ f)=(Wh)\circ f. \tag{3.13}$$

Todistus. Jokaisella $p \in M$,

$$V(h \circ f)(p) = V_p(h \circ f) = \big(f_{*p}V_p\big)h$$

ja

$$\big((Wh) \circ f\big)(p) = \big(Wh\big)\big(f(p)\big) = W_{f(p)}h.$$

Siten (3.13) pätee, jos ja vain jos

$$f_{*p}V_p = W_{f(p)}$$

kaikilla $p \in M$, toisin sanoen, jos ja vain jos V ja W ovat f-yhteenliitetyt. □

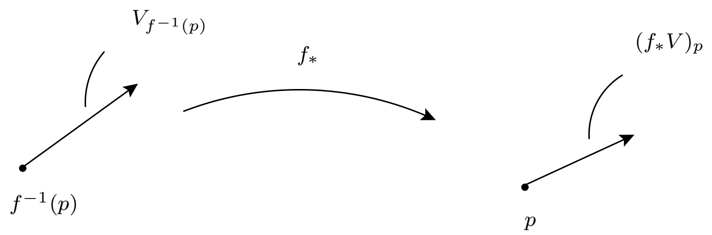
Remark 3.14. Jos $f\colon M \to N$ on sileä ja $V \in \mathcal{T}(M)$, ei välttämättä ole olemassa vektorikenttää $W \in \mathcal{T}(N)$ siten, että V ja W olisivat f-yhteenliitetyt.

Lemma 3.15. *Jos $f\colon M \to N$ on diffeomorfismi ja $V \in \mathcal{T}(M)$, niin on olemassa yksikäsitteinen vektorikenttä $W \in \mathcal{T}(N)$ siten, että V ja W ovat f-yhteenliitetyt.*

Todistus. Jos $V \in \mathcal{T}(M)$ ja $f\colon M \to N$ on diffeomorfismi, niin määritellään vektorikenttä $f_*V \in \mathcal{T}(N)$ asettamalla

$$(f_*V)_p = f_*V_{f^{-1}(p)}, \quad p \in N. \tag{3.16}$$

Tällöin selvästi f_*V on ainut sileä vektorikenttä N:ssä, joka on f-yhteenliittynyt V:n kanssa. □



Lemma 3.17. *Olkoon $f\colon M \to N$ sileä kuvaus, ja $V^i \in \mathcal{T}(M)$, $W^i \in \mathcal{T}(N)$, $i = 1, 2$, vektorikenttiä s.e. V^i ja W^i ovat f-yhteenliitetyt. Tällöin $[V^1, V^2]$ ja $[W^1, W^2]$ ovat f-yhteenliitetyt. Jos f on diffeomorfismi, niin*

$$[f_*V^1, f_*V^2] = f_*[V^1, V^2].$$

Todistus. HT

Definition 3.18. Olkoon $f\colon M \to M$ diffeomorfismi ja $X \in \mathcal{T}(M)$ vektorikenttä siten, että $f_*X = X$, eli X on f-yhteenliittynyt itsensä kanssa. Tällöin sanomme, että X on *invariantti f:n suhteen,* tai että X on *f-invariantti.*

Huom.: Ehto $f_*X = X$ tarkoittaa siis, että $f_{*p}X_p = X_{f(p)}$ kaikilla $p \in M$.

Vasen-invariantit vektorikentät Lien ryhmällä. Olkoon G Lien ryhmä. Tällöin jokainen piste $g \in G$ määrittelee diffeomorfismit $L_g\colon G \to G$ ja $R_g\colon G \to G$ (*vasen-translaatio* ja *oikea-translaatio*),

$$L_g(h) = gh, \quad R_g(h) = hg.$$

Vektorikenttää X sanotaan *vasen-invariantiksi*, jos se on invariantti kaikissa vasen-translaatioissa, toisin sanoen $L_{g*}X = X$ kaikilla $g \in G$ (eli tarkemmin $L_{g*h}X_h = X_{gh}$ kaikilla $g, h \in G$). Vektorikentän oikea-invarianttisuus määritellään vastaavalla tavalla.

Theorem 3.19. *Olkoon G Lien ryhmä ja T_eG sen tangenttiavaruus neutraalialkiossa $e \in G$. Silloin jokainen vektori $X_e \in T_eG$ määrää yksikäsitteisen vasen-invariantin vektorikentän X. Erityisesti G on yhdensuuntaistuva.*

Todistus. Jokaista $g \in G$ vastaa täsmälleen yksi vasen-translaatio, joka kuvaa neutraalialkion e pisteeksi g, nimittäin L_g. Jos siis lauseen vektorikenttä X on olemassa, se määräytyy yksikäsitteisesti kaavalla

$$X_g = L_{g*}X_e.$$

Toisaalta tämä kaava määrittelee vasen-invariantin vektorikentän, sillä jokaiselle $h \in G$ pätee

$$L_{g*h}X_h = L_{g*h}(L_{h*}X_e) = L_{g*} \circ L_{h*}X_e = L_{gh*}X_e = X_{gh}.$$

Osoitetaan seuraavaksi, että $g \mapsto X_g$ on sileä. Olkoon $f\colon U \to \mathbb{R}$ sileä jollakin avoimella $U \subset G$. Valitaan C^∞-polku $\gamma\colon]-\varepsilon,\varepsilon[\to G$ siten, että $\dot\gamma_0 = X_e$. Tällöin jokaisella $g \in U$

$$\begin{aligned}(Xf)(g) = X_g f = \big(L_{g*}X_e\big)f = \dot\gamma_0\big(f \circ L_g\big)\\ = \big(f \circ L_g \circ \gamma\big)'(0) = \frac{d}{dt} f\big(g\gamma(t)\big)_{|t=0}.\end{aligned}$$

Kuvaus φ, $(g,t) \mapsto \varphi(g,t) = f\big(g\gamma(t)\big)$, on sileä $G\times]-\varepsilon,\varepsilon[$:ssä, sillä se on yhdistetty kuvaus ryhmäoperaatiosta, f:sta ja γ:sta. Siksi

$$\frac{d}{dt} f\big(g\gamma(t)\big)_{|t=0}$$

on sileä g funktiona, joten $g \mapsto (Xf)(g)$ on sileä. Lemman 3.2 (c)-kohdan nojalla $X \in \mathcal{T}(G)$. Olkoon lopuksi $X_e^1, \dots, X_e^n$ jokin T_eG:n kanta. Tällöin vastaavat vasen-invariantit vektorikentät $X^1, \dots, X^n$ muodostavat globaalin kehyksen. Jos nimittäin on olemassa $g \in G$ s.e. $X_g^1, \dots, X_g^n$ eivät ole lineaarisesti riippumattomia, voidaan jokin vektori X_g^i lausua muiden lineaarikombinaationa, ts.

$$X_g^i = \sum_{j \neq i} a_j X_g^j, \quad \text{missä } a_j \in \mathbb{R}.$$

Tällöin vasen-invarianttisuuden nojalla

$$X_e^i = \sum_{j \neq i} a_j X_e^j,$$

joka johtaa ristiriitaan, sillä $X_e^1, \dots, X_e^n$ on T_eG:n kanta. Siten G:llä on globaali kehys eli se on yhdensuuntaistuva. $\square$

Alimonistot ja Lien hakatulo. Palautetaan mieliin, että M on N:n alimonisto, jos inkluusio $i\colon M \hookrightarrow N$ on upotus. Jokaisella $p \in M$ samaistamme T_pM:n ja i_*T_pM:n, jonka jälkeen T_pM voidaan tulkita T_pN:n aliavaruudeksi. Tällöin vektori $T_pM \ni v = i_*v \in T_pN$ operoi $C^\infty(p)$:ssä seuraavasti:

$$vf = (i_*v)f = v(f \circ i) = v(f|M).$$

[Tässä $C^\infty(p) = \{f \in C^\infty(U)\colon U \subset N \text{ jokin } p\text{:n ympäristö}\}$ ja merkintä $f|M$ tarkoittaa $f|U \cap M$.]

Theorem 3.20. *Olkoon $M \subset N$ alimonisto. Jos $X, Y \in \mathcal{T}(N)$ ovat sellaisia vektorikenttiä, että $X_p, Y_p \in T_pM$ $\forall p \in M$, niin myös $[X,Y]_p \in T_pM$ $\forall p \in M$.*

Todistuksessa käytetään seuraavaa lemmaa.

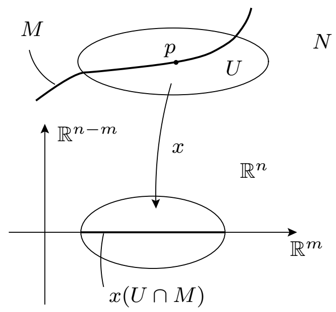
Lemma 3.21. *Olkoon $M^m \subset N^n$ alimonisto ja $p \in M$. Silloin*

$$T_pM = \{v \in T_pN \colon vf = 0 \ \forall f \in C^\infty(p), f|M = 0\}.$$

Todistus. Oletetaan ensin, että $v \in T_pM \subset T_pN$ (eli tarkasti ottaen $v = i_* w$ jollakin $w \in T_pM$). Olkoon $f \in C^\infty(U)$, $f|U \cap M = 0$, jollakin p:n ympäristöllä $U \subset N$. Silloin $f \circ i = 0$, joten

$$vf = (i_* w)f = w(f \circ i) = 0.$$

Oletetaan sitten, että $v \in T_pN$ toteuttaa ehdon $vf = 0$ kaikilla $f \in C^\infty(p)$, $f|M = 0$. Osoitetaan, että $v \in T_pM$. Lauseen 2.27 todistuksesta ilmenee, että on olemassa N:n kartta (U, x), $x = (x^1, \ldots, x^n)$, siten, että $x^{m+1} = \cdots = x^n = 0$ joukossa $U \cap M$ ja $(x^1, \ldots, x^m)$ on $U \cap M$:n kartta p:ssä.



Kirjoitetaan

$$v = \sum_{i=1}^{n} v^i (\partial_i)_p.$$

Nyt T_pM on T_pN:n aliavaruus, jonka virittävät koordinaattivektorit $(\partial i)_p, i = 1, \ldots, m$. Siten $v \in T_pM$, jos ja vain jos $v^j = 0$ kaikilla $j = m+1, \ldots, n$. Jokaisella $j = m+1, \ldots, n$ valitaan funktio $f \colon U \to \mathbb{R}, f(x) = x^j$. Tällöin $f \in C^\infty(p)$ ja $f|M \cap U = 0$. Saadaan

$$0 = vf = \sum_{i=1}^{n} v^i \frac{\partial x^j}{\partial x^i}(p) = v^j,$$

joten $v \in T_pM$. □

Lauseen 3.20 todistus. Olkoon $p \in M$ ja olkoon $f \in C^\infty(U)$, $f|U \cap M = 0$, jollakin p:n ympäristöllä $U \subset N$. Koska $X_q \in T_qM$ ja $Y_q \in T_qM$ kaikilla $q \in M$, pätee Lemman 3.21 nojalla

$$X_q f = 0 \ \text{ ja } \ Y_q f = 0 \ \forall q \in U \cap M.$$

Siten

$$(Xf)|U \cap M = 0 \ \text{ ja } \ (Yf)|U \cap M = 0.$$

Käyttämällä Lemmaa 3.21 funktioihin Xf ja Yf saadaan

$$Y_p(Xf) = 0 \text{ ja } X_p(Yf) = 0,$$

joten

$$[X, Y]_p f = X_p(Yf) - Y_p(Xf) = 0.$$

Siis $[X, Y]_p \in T_pM$ (jälleen Lemman 3.21 nojalla). □

Käänteiseen suuntaan pätee ns. Frobeniuksen lause:

Olkoon M sileä n-monisto ja $k \in \{1, \dots, n-1\}$. Oletetaan, että jokaista pistettä $p \in M$ kohti on annettu k-ulotteinen T_pM:n aliavaruus $\Delta_p \subset T_pM$. Oletetaan lisäksi, että jokaisella $p \in M$ on olemassa ympäristö U ja sileät vektorikentät $X^1, \dots, X^k \in \mathcal{T}(U)$ siten, että vektorit $X^1_q, \dots, X^k_q$ muodostavat Δ_q:n kannan kaikilla $q \in U$. Tällöin sanotaan, että

$$\Delta = \bigsqcup_{p \in M} \Delta_p \quad (\subset TM)$$

on *sileä k-ulotteinen (tangentti)distribuutio M:llä* (tai sileä k-tasojen kenttä, sileä TM:n alikimppu).

Olkoon $\Delta \subset TM$ sileä tangenttidistribuutio. Alimonistoa $N \subset M$ sanotaan Δ:n *integraalimonistoksi*, jos $T_pN = \Delta_p$ kaikilla $p \in N$. Lisäksi sanotaan, että Δ on *integroituva*, jos jokaista pistettä $p \in M$ kohti on olemassa Δ:n integraalimonisto N siten, että $p \in N$.

Sanomme, että sileä distribuutio Δ on *involutiivinen*, jos kaikilla vektorikentille $X, Y \in \mathcal{T}(M)$, joilla $X_p, Y_p \in \Delta_p \ \forall p \in M$, myös $[X,Y]_p \in \Delta_p \ \forall p \in M$.

Frobeniuksen lause karakterisoi integraalimoniston olemassaolon:

Theorem 3.22 (Frobenius)**.** *Olkoon M differentioituva n-monisto ja Δ sileä k- ulotteinen tangenttidistribuutio M:llä, $1 \le k \le n-1$. Tällöin*

$$\Delta \text{ on integroituva} \iff \Delta \text{ on involutiivinen.}$$

Lisäksi, jos Δ on integroituva, on jokaisessa pisteessä $p \in M$ olemassa kartta (U, x) siten, että jokainen

$$x^{-1}\{y \in \mathbb{R}^n : y \in \mathbb{R}^k \times \{c\}\}, \ c \in \mathbb{R}^{n-k},$$

on Δ:n integraalimonisto (mikäli $\neq \emptyset$).

Todistus. Sivuutetaan (ks. esim. Lee [L2, §19]).

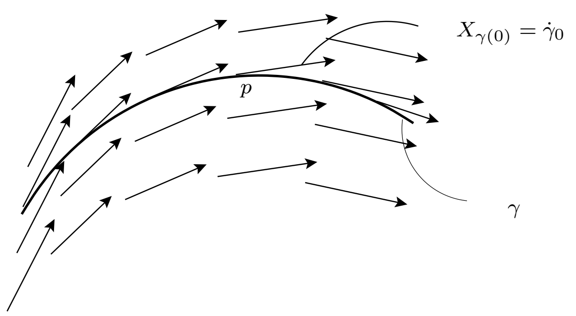
Huom. Joskus integraalimoniston määritelmässä vaaditaan vain, että $T_pN \subset \Delta_p \ \forall p$, jolloin N:n dimensio voi olla pienempi kuin k.

3.23 Integraalikäyrät

Definition 3.24. Olkoon M differentioituva monisto ja $X \in \mathcal{T}(M)$. Sanomme, että C^∞-polku $\gamma : I \to M$ on X:n *integraalikäyrä,* jos

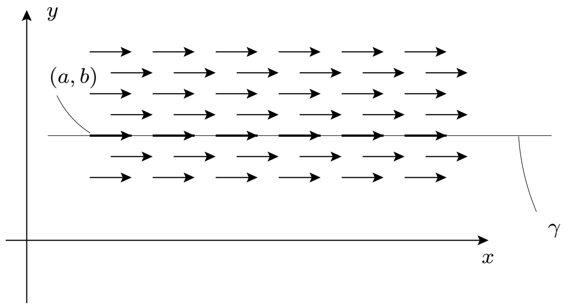
$$\dot{\gamma}_t = X_{\gamma(t)} \ \forall t \in I.$$

Jos lisäksi $I \subset \mathbb{R}$ on avoin väli, $0 \in I$, ja $\gamma(0) = p$, niin sanomme, että γ on X:n integraalikäyrä alkaen pisteestä $p \in M$.



Example 3.25. Merkitään $\mathbb{R}^2$:n pisteitä (x,y):llä ja olkoot $\frac{\partial}{\partial x}$, $\frac{\partial}{\partial y}$ vastaavat koordinaattivektorikentät.

(a) Olkoon $X \in \mathcal{T}(\mathbb{R}^2)$, $X = \frac{\partial}{\partial x}$. Selvästi jokainen polku $\gamma(t) = (t+a, b)$, missä $a, b \in \mathbb{R}$ ovat vakioita, on X:n integraalikäyrä alkaen pisteestä (a,b). Siten jokaisen tason pisteen kautta kulkee X:n integraalikäyrä.



(b) Olkoon $V \in \mathcal{T}(\mathbb{R}^2)$,

$$V = x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y}.$$

Jos $\gamma\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, $\gamma(t) = \big(x(t), y(t)\big)$, on C^∞-polku, niin

$$\begin{aligned}
& \dot{\gamma}_t = V_{\gamma(t)} \\
\iff\ & x'(t)\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)_{\gamma(t)} + y'(t)\left(\frac{\partial}{\partial y}\right)_{\gamma(t)} = x(t)\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)_{\gamma(t)} + y(t)\left(\frac{\partial}{\partial y}\right)_{\gamma(t)} \\
\iff\ & \begin{cases} x'(t) = x(t) \\ y'(t) = y(t) \end{cases} \\
\iff\ & \begin{cases} x(t) = ae^t \\ y(t) = be^t, \end{cases}
\end{aligned}$$

missä $a, b \in \mathbb{R}$. Havaitaan, että polku $\gamma(t) = \big(ae^t, be^t\big)$, missä $a, b, \in \mathbb{R}$, on V:n integraalikäyrä alkaen pisteestä $\gamma(0) = (a,b)$. Siten jokaisen tason pisteen kautta kulkee V:n integraalikäyrä.

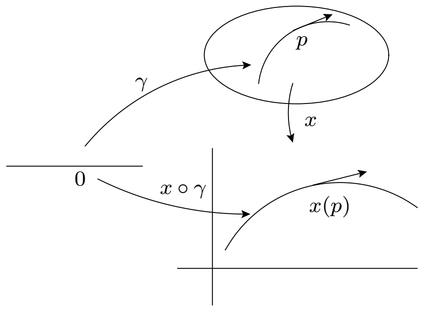
Kuten esimerkki 2. osoittaa, joudumme ratkaisemaan tavallisen differentiaaliyhtälösysteemin (lokaaleissa koordinaateissa) löytääksemme vektorikentän integraalikäyrät. Yleisesti:

Lemma 3.26. *Olkoon (U,x), $x = (x^1, \ldots, x^n)$, kartta M:llä ja olkoon $V \in \mathcal{T}(U)$,*

$$V_p = v^i(p)(\partial_i)_p, \quad p \in U.$$

Oletetaan, että $\gamma : I \to U$ on C^∞-polku, missä $I \subset \mathbb{R}$ on avoin väli ja $0 \in I$. Tällöin γ on V:n integraalikäyrä alkaen pisteestä $p \in U$, jos ja vain jos kaikilla $i = 1, \ldots, n$

$$\begin{cases} (x^i \circ \gamma)'(t) &= v^i(\gamma(t)) \quad \textit{jokaisella } t \in I \\ (x^i \circ \gamma)(0) &= x^i(p). \end{cases} \tag{3.27}$$



Todistus. (HT)

Remark 3.28. Määrittelemällä

$$\beta = (\beta^1, \dots, \beta^n)\colon I \to xU \subset \mathbb{R}^n,$$
$$w^i = v^i \circ x^{-1}\colon xU \to \mathbb{R},\ i = 1, \dots, n,$$

voidaan yhtälösysteemi (3.27) kirjoittaa muotoon

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}\beta^i(t) & = w^i\big(\beta^1(t), \dots, \beta^n(t)\big) \quad \forall t \in I,\ i = 1, \dots, n, \\ \beta^i(0) & = x^i(p). \end{cases} \tag{3.29}$$

Olkoon $V \in \mathcal{T}(M)$. Tavallisten differentiaaliyhtälösysteemien teoriasta seuraa, että jokaista $p \in M$ kohti on olemassa V:n *yksikäsitteinen maksimaalinen* integraalikäyrä $\gamma^p\colon I_p \to M$ alkaen pisteestä p, ts. jos $\gamma\colon I \to M$ on jokin V:n integraalikäyraä alkaen pisteestä p, niin $I \subset I_p$ ja $\gamma = \gamma^p|I$. Palaamme tämän todistukseen myöhemmin.

Lemma 3.30. *Olkoon $V \in \mathcal{T}(M)$ ja $\gamma\colon I \to M$ V:n integraalikäyrä. Jokaisella $a \in \mathbb{R}$ määritellään*

$$I + a = \{t + a\colon t \in I\}$$

ja $\tilde\gamma\colon I + a \to M,\ \tilde\gamma(t) = \gamma(t - a)$. Tällöin $\tilde\gamma$ on myös V:n integraalikäyrä.

Todistus. Olkoon $t_0 \in I + a$ ja $f \in C^\infty\big(\tilde\gamma(t_0)\big)$. Tällöin

$$\begin{aligned} \tilde\gamma'(t_0)f &= \frac{d}{dt}\big(f \circ \tilde\gamma\big)(t)_{|t=t_0} = \frac{d}{dt}\big(f \circ \gamma\big)(t - a)_{|t=t_0} \\ &= (f \circ \gamma)'(t_0 - a) = \dot\gamma_{t_0 - a} f = V_{\gamma(t_0 - a)} f \\ &= V_{\tilde\gamma(t_0)} f. \quad \square \end{aligned}$$

3.31 Virtaukset

Olkoon M sileä monisto. Sanomme, että avoin joukko $\mathcal{D} \subset \mathbb{R} \times M$ on *virtausalue*, jos kaikilla $p \in M$

$$\mathcal{D} \cap \big(\mathbb{R} \times \{p\}\big) = I_p \times \{p\},$$

missä $I_p \subset \mathbb{R}$ on avoin väli, $0 \in I_p$. Sileä kuvaus $\theta\colon \mathcal{D} \to M$ on (lokaali) *virtaus* M:llä, jos

$$\theta(0, p) = p \quad \forall p \in M,$$
$$I_{\theta(s,p)} = I_p - s \quad \forall s \in I_p,$$
$$\theta\big(t, \theta(s, p)\big) = \theta(t + s, p) \quad \forall s \in I_p,\ t + s \in I_p.$$

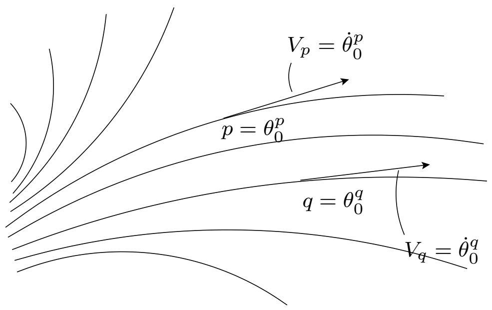
Merkitsemme myös

$$\theta_t^p = \theta_t(p) = \theta^p(t) = \theta(t,p).$$

Kuvaus $\theta^p\colon I_p \to M,\ t \mapsto \theta_t^p$, on C^∞-polku. Vektorikenttää V,

$$V_p = \dot\theta_0^p,$$

kutsutaan virtauksen θ *synnyttäjäksi* (engl. infinitesimal generator).



Theorem 3.32 (Virtauksen ominaisuuksia)**.** *Olkoon $\theta\colon \mathcal{D} \to M$ virtaus. Silloin:*

(a) $\forall t \in \mathbb{R}$, joukko $\mathcal{D}_t = \{p \in M\colon (t,p) \in \mathcal{D}\} \subset M$ on avoin, $\theta_t\colon \mathcal{D}_t \to \mathcal{D}_{-t}$ on diffeomorfismi ja $\theta_t^{-1} = \theta_{-t}$.

(b) $\theta_t \circ \theta_s = \theta_{t+s}$ (aina kun vasen puoli määr.).

(c) θ:n synnyttäjä V on sileä vektorikenttä.

(d) $\forall p \in M,\ \theta^p\colon I_p \to M$ on V:n integraalikäyrä alkaen pisteestä p.

(e) $\theta_{t*}V_p = V_{\theta_t(p)}, \quad \forall p \in M,\ \forall t \in I_p$.

Todistus.

(a) Olkoon $p \in \mathcal{D}_t$, jolloin $(t,p) \in \mathcal{D}$. Koska $\mathcal{D}$ on avoin, on olemassa $\delta > 0$ ja p:n ympäristö U s.e. $]t-\delta, t+\delta[\times U \subset \mathcal{D}$. Erityisesti $\{t\} \times U \subset \mathcal{D}$, joten $U \subset \mathcal{D}_t$ ja siten $\mathcal{D}_t$ on avoin.
Jos $p \in \mathcal{D}_t$, niin $t \in I_p$ ja $t + (-t) = 0 \in I_p$. Siten $\theta_t(p) \in \mathcal{D}_{-t}$ ja

$$(\theta_{-t} \circ \theta_t)(p) = \theta\big(-t, \theta(t,p)\big) = \theta(-t+t, p) = p.$$

Samoin $\theta_{-t}(\mathcal{D}_{-t}) \subset \mathcal{D}_t$ ja $(\theta_{-t} \circ \theta_t)(q) = q$ kaikilla $q \in \mathcal{D}_{-t}$. Lisäksi θ_t ja θ_{-t} ovat sileitä jokaisessa M:n avoimessa joukossa, jossa ne ovat määriteltyjä.

(b) Selvä suoraan määritelmän nojalla.

(c) Olkoon $U \subset M$ avoin ja $f \in C^\infty(U)$. Tällöin kaikilla $p \in U$

$$Vf(p) = V_p f = \dot\theta_0^p f = \frac{d}{dt} f\big(\theta(t,p)\big)_{|t=0}.$$

Koska f ja θ ovat sileitä, on myös $p \mapsto Vf(p)$ sileä. Siis $V \in \mathcal{T}(M)$.

(d) Olkoon $p \in M$ ja $s \in I_p$. On osoitettava, että

$$\dot{\theta}^p_s = V_{\theta(s,p)}.$$

Merkitään $q = \theta(s,p)$ ja olkoon $f \in C^\infty(q)$. Silloin

$$V_q f = \dot{\theta}^q_0 f = \frac{d}{dt} f\big(\theta(t,q)\big)_{|t=0} = \frac{d}{dt} f\big(\theta(t+s,p)\big)_{|t=0} = \dot{\theta}^p_s f.$$

(e) Olkoon $p \in M$ ja $t \in I_p$. Merkitään $q = \theta^p_t$ ja osoitetaan

$$\theta_{t*} V_p = V_q.$$

Olkoon $f \in C^\infty(q)$. Silloin

$$\begin{aligned}\big(\theta_{t*} V_p\big) f &= V_p(f \circ \theta_t) = \frac{d}{ds}\big(f \circ \theta_t \circ \theta^p_s\big)(s)_{|s=0}\\ &= \frac{d}{ds} f\big(\theta_t(\theta^p_s)\big)_{|s=0} = \frac{d}{ds} f\big(\theta(t+s,p)\big)_{|s=0}\\ &= \dot{\theta}^p_t f = V_q f.\end{aligned}$$

□

Lemma 3.33. *Olkoon $\theta\colon \mathcal{D} \to M$ virtaus, V sen synnyttäjä ja $p \in M$. Jos $V_p = 0$, niin θ^p on vakiopolku $\theta^p_t \equiv p$. Jos $V_p \neq 0$, niin $\theta^p\colon I_p \to M$ on immersio.*

Todistus. Merkitään $\gamma = \theta^p$. Olkoon $t \in I_p$ ja merkitään $q = \gamma(t)$. Nyt $\gamma_{*t}\colon T_t\mathbb{R} \to T_qM$ on nollakuvaus (ts. $\gamma_{*t} v = 0\ \forall v \in T_t\mathbb{R}$) $\iff$ $\dot{\theta}^p_t = \gamma_{*t}\big(\frac{\partial}{\partial t}\big) = 0$. Lauseen 3.32 (a)- ja (e)-kohtien mukaan $V_q = \theta^p_{t*} V_p$ ja $V_p = \theta^q_{-t*} V_q$. Siten $\gamma'(t) = V_q = 0 \iff \gamma'(0) = V_p = 0$. Toisin sanoen, jos $\gamma'(t) = 0$ jollakin $t \in I_p$, niin silloin $\gamma'(t) = 0\ \forall t \in I_p$. Jos siis $V_p = 0$, niin $\gamma\colon I_p \to M$ on sileä kuvaus, jolle $\gamma_* \equiv 0$, joten γ on vakiopolku (I_p yhtenäinen (ks. HT 5/2)). Toisaalta, jos $V_p \neq 0$, niin $\gamma_{*t} \neq 0\ \forall t$, joten γ on immersio. □

Example 3.34. Olkoon $\mathcal{D} = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2$ ja $\theta\colon \mathcal{D} \to \mathbb{R}^2$,

$$\theta\big(t,(x,y)\big) = (x\cos t + y\sin t, -x\sin t + y\cos t).$$

Tällöin θ on virtaus, sillä θ on selvästi sileä ja

(a) $\theta\big(0,(x,y)\big) = (x\cos 0 + y\sin 0, -x\sin 0 + y\cos 0) = (x,y)$,

(b)

$$\begin{aligned}&\theta\big(t,\theta\big(s,(x,y)\big)\big)\\ &= \big((x\cos s + y\sin s)\cos t + (-x\sin s + y\cos s)\sin t,\\ &\qquad - (x\cos s + y\sin s)\sin t + (-x\sin s + y\cos s)\cos t\big)\\ &= \big(x(\cos s\cos t - \sin s\sin t) + y(\sin s\cos t + \cos s\sin t),\\ &\qquad - x(\cos s\sin t + \sin s\cos t) + y(\cos s\cos t - \sin s\sin t)\big)\\ &= \big(x\cos(s+t) + y\sin(s+t), -x\sin(s+t) + y\cos(s+t)\big)\\ &= \theta\big(s+t,(x,y)\big).\end{aligned}$$

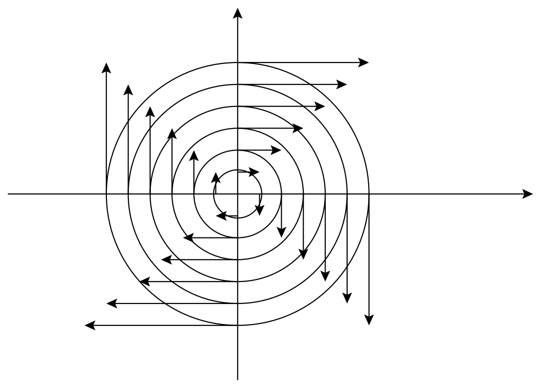
Sen synnyttäjä on

$$\begin{aligned} V_{(x,y)} &= \frac{d}{dt}\theta\big(t,(x,y)\big)_{|t=0} = (-x\sin 0 + y\cos 0, -x\cos 0 - y\sin 0) \\ &= (y,-x), \end{aligned}$$

eli koordinaattivektorikenttiä käyttäen

$$V_{(x,y)} = y\frac{\partial}{\partial x} - x\frac{\partial}{\partial y}.$$

[Kuvassa V:n arvoja (vektoreita) ja joitain integraalikäyriä.]



3.35 Vektorikenttien virtaukset

Sanomme, että virtaus $\theta\colon \mathcal{D} \to M$ on *maksimaalinen*, jos virtausalue $\mathcal{D}$ on suurin mahdollinen. Toisin sanoen, jos $\tilde{\theta}\colon \tilde{\mathcal{D}} \to M$ on virtaus siten, että $\mathcal{D} \subset \tilde{\mathcal{D}}$ ja $\theta = \tilde{\theta}|\mathcal{D}$, niin $\tilde{\mathcal{D}} = \mathcal{D}$.

Theorem 3.36. *Olkoon M sileä monisto ja $V \in \mathcal{T}(M)$. Tällöin on olemassa yksikäsitteinen maksimaalinen virtaus $\theta\colon \mathcal{D} \to M$, jonka synnyttäjä V on. Lisäksi θ:lla on seuraavat ominaisuudet:*

(a) Jokaisella $p \in M$, polku $\theta^p\colon I_p \to M$ on yksikäsitteinen maksimaalinen V:n integraalikäyrä alkaen pisteestä p.

(b) Jos $s \in I_p$, niin $I_{\theta(s,p)}$ on väli $I_p - s = \{t - s\colon t \in I_p\}$.

Lauseen 3.36 todistus perustuu seuraavaan tavallisia differentiaaliyhtälöitä koskevaan perustulokseen, josta osan todistamme myöhemmin.

Theorem 3.37 (Olemassaolo-, yksikäsitteisyys- ja sileyslause)**.** *Olkoon $U \subset \mathbb{R}^n$ avoin ja $V = (V^1,\dots,V^n)\colon U \to \mathbb{R}^n$ sileä. Olkoot $t_0 \in \mathbb{R}$ ja $x \in U$. Tarkastellaan alkuarvotehtävää*

$$\begin{cases} (\gamma^i)'(t) &= V^i\big(\gamma(t)\big), \\ \gamma^i(t_0) &= x^i, \end{cases} \tag{3.38}$$

missä $\gamma = (\gamma^1,\dots,\gamma^n)\colon J \to U,\ t_0 \in J$, on sileä polku.

(a) Olemassaolo: *Jokaista $(t_0,x_0) \in \mathbb{R}\times U$ kohti on olemassa avoin väli $J_0 \ni t_0$ ja x_0:n ympäristö $U_0 \subset U$ siten, että jokaisella $x \in U_0$ on olemassa C^∞-polku $\gamma\colon J_0 \to U$, joka on (3.38):n ratkaisu.*

(b) Yksikäsitteisyys: *Jos* $\gamma\colon J_0 \to U$ *ja* $\tilde{\gamma}\colon \tilde{J}_0 \to U$ *ovat (3.38):n ratkaisuja, niin* $\gamma = \tilde{\gamma}$ *välillä* $J_0 \cap \tilde{J}_0$.

(c) Sileys: *Olkoot* t_0, x_0, J_0 *ja* U_0 *kuten (a)-kohdassa ja määritellään kuvaus* $\theta\colon J_0 \times U_0 \to U$,

$$\theta(t,x) = \gamma(t),$$

missä $\gamma\colon J_0 \to U$ *on (3.38):n yksikäsitteinen ratkaisu alkuarvolla* x. *Tällöin* θ *on sileä.*

Pilkomme Lauseen 3.36 todistuksen useaan osaan.

Theorem 3.39. *Olkoon* $V \in \mathcal{T}(M)$. *Silloin jokaisella* $p \in M$ *on olemassa yksikäsitteinen maksimaalinen* V*:n integraalikäyrä alkaen pisteestä* p.

Todistus. Lauseen 3.37 nojalla jokaista $p \in M$ kohti on olemassa V:n integraalikäyrä alkaen pisteestä p (vrt. (3.29)). Olkoot $\gamma\colon I \to M$ ja $\tilde{\gamma}\colon I \to M$ V:n integraalikäyriä s.e. $\gamma(t_0) = \tilde{\gamma}(t_0)$ jollakin $t_0 \in I$. Merkitään

$$J = \{t \in I\colon \gamma(t) = \tilde{\gamma}(t)\}.$$

Osoitetaan, että $J \neq \emptyset$ on sekä avoin että suljettu I:ssä, jolloin $J = I$ (koska I yhtenäinen).
Koska $t_0 \in J$, on $J \neq \emptyset$.
Olkoon $t_i \in J,\ t_i \to t \in I$. Koska γ ja $\tilde{\gamma}$ ovat jatkuvia, saadaan

$$\tilde{\gamma}(t) = \lim_{i\to\infty} \tilde{\gamma}(t_i) = \lim_{i\to\infty} \gamma(t_i) = \gamma(t),$$

joten $t \in J$. Siis $J \subset I$ suljettu.
Olkoon $t_1 \in J$. Nyt γ ja $\tilde{\gamma}$ ovat saman differentiaaliyhtälösysteemin ratkaisuja samalla alkuarvolla $\gamma(t_1) = \tilde{\gamma}(t_1)$, joten Lauseen 3.37 nojalla $\gamma \equiv \tilde{\gamma}$ välillä $]t_1 - \varepsilon, t_1 + \varepsilon[$. Siis $]t_1 - \varepsilon, t_1 + \varepsilon[\subset J$, joten $J \subset I$ on avoin. Olemme todistaneet, että $J = I$.
Merkitään

$$\begin{aligned} \Gamma &= \{\gamma_\alpha \mid \gamma_\alpha\colon J_\alpha \to M\ V\text{:n integraalikäyrä alkaen pisteestä } p\},\\ I_p &= \bigcup_{\gamma_\alpha \in \Gamma} J_\alpha \end{aligned}$$

($\alpha \in \mathcal{A}$, $\mathcal{A}$ jokin indeksijoukko) ja määritellään

$$\gamma\colon I_p \to M,\ \gamma(t) = \gamma_\alpha(t),$$

jollakin $\gamma_\alpha \in \Gamma$, jolle $t \in J_\alpha$. Toisin sanoen, $\gamma | J_\alpha = \gamma_\alpha$. Alkuosan mukaan γ on hyvin määritelty ja siten V:n maksimaalinen integraalikäyrä. □

Merkitsemme jatkossa θ^p:llä V:n maksimaalista integraalikäyrää alkaen pisteestä p.

Olkoon $V \in \mathcal{T}(M),\ p \in M$ ja $\theta^p\colon I_p \to M$ V:n maksimaalinen integraalikäyrä alkaen pisteestä p. Määritellään

$$\mathcal{D}(V) = \{(t,p) \in \mathbb{R} \times M\colon t \in I_p\}, \tag{3.40}$$

$$\mathcal{D}_t(V) = \{p \in M\colon (t,p) \in \mathcal{D}(V)\}, \tag{3.41}$$

$$\theta\colon \mathcal{D}(V) \to M,\ \theta(t,p) = \theta^p(t). \tag{3.42}$$

Käytämme jälleen myös merkintöjä

$$\theta^p(t) = \theta_t(p) = \theta_t^p.$$

Lemma 3.43. *Olkoon $\theta\colon \mathcal{D}(V)\to M$ kuten yllä. Tällöin*

(a) $\theta(0,p)=p \quad \forall p\in M$,

(b) $\theta\big(t,\theta(s,p)\big)=\theta(t+s,p) \quad \forall s\in I_p,\ t+s\in I_p$.

Todistus. (a)-kohta on selvä.
Kiinnitetään $p\in M,\ s\in I_p$ ja merkitään $q=\theta^p_s$. Jos $\gamma\colon I_p-s\to M$ on polku

$$\gamma(t)=\theta^p(t+s),$$

niin $\gamma(0)=q$ ja γ on V:n integraalikäyrä alkaen pisteestä q (Lemma 3.30). Lauseen 3.37 (b)-kohdan ("Yksikäsitteisyys") mukaan $\gamma=\theta^q$ joukossa, jossa molemmat ovat määriteltyjä. Koska θ^q on maksimaalinen, on se määritelty ainakin välillä I_p-s (eli $I_p-s\subset I_q$). Siis kaikilla $t\in I_p-s$

$$\theta(t+s,p)=\gamma(t)=\theta^q(t)=\theta(t,q)=\theta\big(t,\theta(s,p)\big). \quad \square$$

Remark 3.44. Yllä havaittiin, että $I_p-s\subset I_{\theta(s,p)}$ kaikilla $s\in I_p$. Koska $0\in I_p$, niin $-s\in I_{\theta(s,p)}$, jolloin $\theta\big(-s,\theta(s,p)\big)=p$. Polku $\gamma\colon I_{\theta(s,p)}+s\to M$,

$$\gamma(t)=\theta\big(t-s,\theta(s,p)\big),$$

on V:n integraalikäyrä ja $\gamma(0)=\theta\big(-s,\theta(s,p)\big)=p$. Kuten edellä päätellään, että $\gamma=\theta^p$ joukossa $I_{\theta(s,p)}+s$, sillä θ^p on maksimaalinen. Siis $I_{\theta(s,p)}+s\subset I_p$ eli $I_{\theta(s,p)}\subset I_p-s$. Saatiin $I_p-s=I_{\theta(s,p)}$ kaikilla $s\in I_p$. (vrt. Lause 3.36 (b).)

Lemma 3.45. *Olkoon $\theta\colon \mathcal{D}(V)\to M$ kuten (3.40)–(3.42):ssa. Silloin $\mathcal{D}(V)\subset\mathbb{R}\times M$ on avoin ja θ on sileä.*

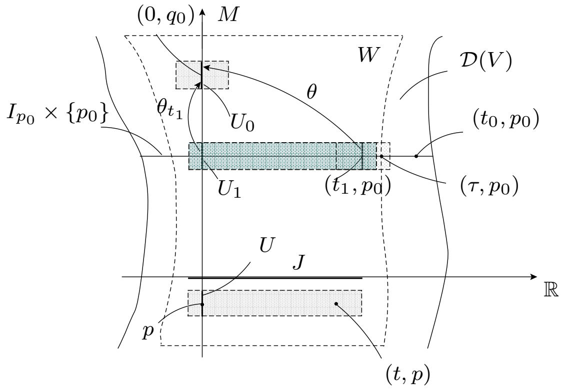
Todistus. Määritellään $W\subset\mathcal{D}(V)$ kaikkien niiden pisteiden $(t,p)\in\mathcal{D}(V)$ joukkona, joilla on olemassa ympäristö $J\times U\subset\mathcal{D}(V)$, jossa θ on määritelty ja sileä, ja lisäksi $U\subset M$ on p:n ympäristö ja $J\subset\mathbb{R}$ on avoin väli sisältäen 0:n ja t:n. Selvästi W on avoin $\mathbb{R}\times M$:ssä ja $\theta|W$ on sileä. Näytetään vielä, että $W=\mathcal{D}(V)$. Jos näin ei ole, on olemassa $(t_0,p_0)\in\mathcal{D}(V)\setminus W$. Oletetaan $t_0\ge 0$ (tapaus $t_0<0$ samoin). Lauseesta 3.37 seuraa (käyttämällä karttaa pisteessä p_0), että θ on määritelty ja sileä jossain pisteen $(0,p_0)$ tuloympäristössä. Olkoon

$$\tau=\sup\{t\in\mathbb{R}\colon (t,p_0)\in W\},$$

jolloin $\tau>0$. Koska $\tau\le t_0$ ja I_{p_0} on avoin väli, joka sisältää 0:n ja t_0:n, niin $\tau\in I_{p_0}$. Olkoon $q_0=\theta^{p_0}(\tau)$. Lauseen 3.37 nojalla on olemassa $(0,q_0)$:n tuloympäristö $]-\varepsilon,\varepsilon[\times U_0$, jossa θ on määritelty ja sileä. Käytetään Lemmaa 3.43 osoittamaan, että θ on sileä jossain (τ,p_0):n tuloympäristössä. Olkoon $t_1<\tau$ s.e. $t_1+\varepsilon>\tau$ ja $\theta^{p_0}(t_1)\in U_0$. Koska $t_1<\tau$, niin $(t_1,p_0)\in W$, joten $\exists$ pisteen (t_1,p_0) tuloympäristö $]-\delta,t_1+\delta[\times U_1$, jossa θ on määritelty ja sileä. Koska $\theta(t_1,p_0)\in U_0$, voidaan U_1 valita niin pieneksi, että $\theta(t_1,p)\in U_0\ \forall p\in U_1$. Lemman 3.43 nojalla

$$\theta_t(p)=\theta_{t-t_1}\circ\theta_{t_1}(p),$$

jos $t_1\in I_p$ ja $t-t_1\in I_{\theta(t_1,p)}$. Pisteen t_1 valinnasta seuraa, että $\theta(t_1,p)$ on määritelty $\forall p\in U_1$ ja on sileä p:n suhteen. Lisäksi $]-\varepsilon,\varepsilon[\subset I_{\theta(t_1,p)}\ \forall p\in U_1$, sillä $\theta(t_1,p)\in U_0\ \forall p\in U_1$ ja θ on määritelty ja sileä $]-\varepsilon,\varepsilon[\times U_0$:ssa. Tästä seuraa, että $\theta_t(p)=\theta_{t-t_1}\circ\theta_{t_1}(p)$ on määritelty ja on sileä (t,p):n suhteen, jos $p\in U_1$ ja $|t-t_1|<\varepsilon$. Näin ollen θ voidaan jatkaa sileästi joukkoon $]-\delta,t_1+\varepsilon[\times U_1$, joka on ristiriita τ:n määritelmän kanssa, sillä $t_1+\varepsilon>\tau$. Näin ollen vastaväite on väärä, joten $W=\mathcal{D}(V)$. $\square$



Kerrataan vielä todistuksen pääkohdat:

1. Vastaoletus ja τ:n määritelmä.
2. $q_0 = \theta(\tau, p_0)$.
3. Lause 3.37 $\Rightarrow$ $(0, q_0)$:lle tuloympäristö $]-\varepsilon, \varepsilon[\times U_0$, jossa θ sileä.
4. Valitaan $t_1 \in]\tau - \varepsilon, \tau[$.
5. Ryhmäominaisuudella "siirretään" θ:n käytös $(0, q_0)$:n ympäristöstä (t_1, p_0):n tuloympäristöön $]t_1 - \varepsilon, t_1 + \varepsilon[\times U_1$.
6. Saatiin jatkettua θ sileästi (τ, p_0):n ympäristöön, joka johtaa ristiriitaan.

Lauseen 3.36 todistus. Olkoon $\theta \colon \mathcal{D}(V) \to M$ kuten (3.40)–(3.42):ssa. Silloin:

1. Lemmat 3.43 ja 3.45 $\Rightarrow$ θ on virtaus.
2. Lause 3.39 ja virtausten yleiset ominaisuudet (Lause 3.32) $\Rightarrow$ yksikäsitteisyys.
3. (a)-kohta seuraa suoraan konstruktiosta.
4. (b)-kohta todistettu Huomautuksessa 3.44 Lemman 3.43 jälkeen. $\square$

Definition 3.46. Olkoon $V \in \mathcal{T}(M)$ ja $\theta \colon \mathcal{D}(V) \to M$ maksimaalinen virtaus, jonka synnyttäjä V on. Tällöin sanomme, että θ on *V:n virtaus*.

Lemma 3.47 (Pakolemma)**.** *Olkoon $V \in \mathcal{T}(M)$. Jos γ on sellainen V:n integraalikäyrä, jonka maksimaalinen määrittelyväli I ei ole koko $\mathbb{R}$, niin γ:n jälki $\gamma(I)$ ei voi sisältyä mihinkään M:n kompaktiin osajoukkoon.*

Todistus. Olkoon $I =]a, b[$, $-\infty \le a < 0 < b \le +\infty$, ja olkoon θ V:n virtaus. Tällöin $\gamma = \theta^p$ (ja $I = I_p$), missä $p = \gamma(0)$. Tehdään vastaoletus: $b < \infty$ ja $\gamma(I) \subset K$ jollakin kompaktilla $K \subset M$. (Tapaus $a > -\infty$ samoin.) Valitaan jono $t_i \to b$, $t_i \in I$. Koska $\gamma(t_i) \in K$ ja K on kompakti, on olemassa $q \in K$ ja osajono, jota merkitään edelleen (t_i):llä, s.e. $\gamma(t_i) \to q$. Valitaan $(0, q)$:lle tuloympäristö $]-\varepsilon, \varepsilon[\times U$, $]-\varepsilon, \varepsilon[\subset I$, jossa θ määritelty. Kiinnitetään tarpeeksi suuri i, jolla $\gamma(t_i) = \theta(t_i, p) \in U$ ja $t_i > b - \varepsilon$. Tällöin $t \mapsto \theta\big(t - t_i, \theta(t_i, p)\big)$ on määritelty $\forall t \in]t_i - \varepsilon, t_i + \varepsilon[$ ja on siten V:n integraalikäyrä (alkaen pisteestä $\theta(t_i, p)$). Lisäksi $\theta\big(t - t_i, \theta(t_i, p)\big) = \theta(t, p) = \gamma(t)$ kun $t_i - \varepsilon < t < b$. Määritellään $\sigma \colon]a, t_i + \varepsilon[\to M$ asettamalla

$$\sigma(t) = \begin{cases} \gamma(t), & a < t < b, \\ \theta\big(t - t_i, \theta(t_i, p)\big), & t_i - \varepsilon < t < t_i + \varepsilon. \end{cases}$$

Tällöin σ on V:n integraalikäyrä alkaen pisteestä p, joten γ ei ole maksimaalinen. Tämä on ristiriita, joten lemma on todistettu. □

Sanomme, että vektorikenttä $V \in \mathcal{T}(M)$ on *täydellinen*, jos se synnyttää globaalin virtauksen, ts. $\mathcal{D}(V) = \mathbb{R} \times M$. Tällöin siis jokainen maksimaalinen integraalikäyrä on määritelty koko $\mathbb{R}$:ssä.

Pakolemmasta saadaan seuraava lause.

Theorem 3.48. *Jos M on kompakti, niin jokainen $V \in \mathcal{T}(M)$ on täydellinen.*

3.49 Olemassaolo- ja yksikäsitteisyyslauseen todistus

Olkoon $U \subset \mathbb{R}^n$ avoin. Sanomme, että $V\colon U \to \mathbb{R}^n$ Lipschitz(-jatkuva) kuvaus, jos $\exists$ vakio $L > 0$ s.e.

$$|V(x) - V(y)| \le L|x - y| \quad \forall x, y \in U. \tag{3.50}$$

Theorem 3.51 (Olemassaolo). *Olkoon $U \subset \mathbb{R}^n$ avoin ja $V\colon U \to \mathbb{R}^n$ Lipschitz. Tällöin jokaista $(t_0, x_0) \in \mathbb{R} \times U$ kohti on olemassa x_0:n ympäristö $U_0 \subset U$ ja avoin väli $J_0 \subset \mathbb{R}$, $t_0 \in J_0$, siten, että jokaista $x = (x^1, \ldots, x^n) \in U_0$ kohti on olemassa C^1-polku $\gamma\colon J_0 \to U$, jolle pätee*

$$\begin{cases} \big(\gamma^i\big)'(t) &= V^i\big(\gamma(t)\big), \ \forall t \in J_0, \\ \gamma^i(t_0) &= x^i. \end{cases} \tag{3.52}$$

Todistus. Olkoon $\gamma\colon J_0 \to U$ mikä tahansa (3.52):n ratkaisu. Yhtälön vasemmasta puolesta nähdään, että jokainen γ^i, $i = 1, \ldots, n$, on derivoituva, joten γ on jatkuva. Koska sekä V^i että γ ovat jatkuvia, on myös oikea puoli jatkuva. Siis γ on jatkuvasti differentioituva eli $\gamma \in C^1$. Integroimalla (3.52) t:n suhteen saadaan

$$\gamma^i(t) = x^i + \int_{t_0}^t V^i\big(\gamma(s)\big) ds, \quad i = 1, \ldots, n. \tag{3.53}$$

Kääntäen, jos $\gamma\colon J_0 \to U$ on polku, joka toteuttaa (3.53):n, niin

$$(\gamma^i)'(t) = \frac{d}{dt} \int_{t_0}^t V^i\big(\gamma(t)\big) ds = V^i\big(\gamma(t)\big) \quad \text{ja } \gamma^i(t_0) = x^i.$$

Jokaista polkua $\gamma\colon J_0 \to U$ kohti määritellään $S_x\gamma\colon J_0 \to \mathbb{R}^n$,

$$S_x\gamma(t) = x + \int_{t_0}^t V\big(\gamma(t)\big) ds \tag{3.54}$$

ja etsitään S_x:n kiintopisteitä (eli polkuja γ, joille $\gamma = S_x\gamma$) jossakin sopivassa metrisessä avaruudessa. Selvästi $S_x\gamma$ on jatkuva (eli polku) ja $S_x\gamma(t_0) = x$. Jokaisella $x_0 \in U$ valitaan $r > 0$ s.e. $\bar{B}(x_0, r) \subset U$. Merkitään $M = \max\{|V(x)|\colon x \in \bar{B}(x_0, r)\}$. Olkoon $t_0 \in \mathbb{R}$, $\delta \le r/2$ ja $J_0 =]t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon[$, missä

$$\varepsilon < \min\{\frac{r}{2M}, \frac{1}{L}\},$$

ja L on V:n Lipschitz-vakio (3.50):ssa. Jokaisella $x \in B(x_0, \delta)$ merkitään

$$\mathcal{M}_x = \{\gamma \mid \gamma\colon J_0 \to \bar{B}(x_0, r) \text{ polku}, \ \gamma(t_0) = x\}$$

ja määritellään $\mathcal{M}_x$:ään metriikka

$$d(\gamma, \tilde{\gamma}) = \sup\{|\gamma(t) - \tilde{\gamma}(t)|\colon t \in J_0\}.$$

Jos (γ_i) on Cauchy-jono $\mathcal{M}_x$:ssä, niin (Cauchyn ehdon nojalla) se on tasaisesti suppeneva, joten rajakuvaus $\gamma = \lim_i \gamma_i$ on jatkuva kuvaus $J_0 \to \bar{B}(x_0, r)$ eli γ on polku. Selvästi $\gamma(t_0) = x$, joten $\gamma \in \mathcal{M}_x$. Siis $(\mathcal{M}_x, d)$ on täydellinen. Osoitetaan seuraavaksi, että kaava (3.54) määrittelee kontraktion $S_x \colon \mathcal{M}_x \to \mathcal{M}_x$. Jos $\gamma \in \mathcal{M}_x$ ja $t \in J_0$, niin

$$|S_x\gamma(t) - x_0| \le |\int_{t_0}^t V\big(\gamma(t)\big)ds + x - x_0| \le M|t - t_0| + |x - x_0| < M\varepsilon + \delta \le r,$$

joten $S_x\gamma$ on polku $J_0 \to \bar{B}(x_0, r)$ ja siten $S_x\gamma \in \mathcal{M}_x$. Lisäksi S_x on kontraktio, sillä kaikilla $\gamma, \tilde{\gamma} \in \mathcal{M}_x$

$$\begin{aligned} d(S_x\gamma, S_x\tilde{\gamma}) &= \sup_{t \in J_0} \Big| \int_{t_0}^t V\big(\gamma(t)\big)ds - \int_{t_0}^t V\big(\gamma(t)\big)ds \Big| \le \sup_{t \in J_0} \int_{t_0}^t \big| V\big(\gamma(t)\big) - V\big(\gamma(t)\big) \big| \, ds \\ &\le \sup_{t \in J_0} \int_{t_0}^t L \underbrace{|\gamma(s) - \tilde{\gamma}(s)|}_{\le d(\gamma, \tilde{\gamma})} \le L \sup_{t \in J_0} |t - t_0| d(\gamma, \tilde{\gamma}) \le L\varepsilon d(\gamma, \tilde{\gamma}). \end{aligned}$$

Koska $L\varepsilon < 1$, niin Kontraktiokuvauslauseen 0.8 nojalla S_x:llä on kiintopiste $\gamma \in \mathcal{M}_x$, joka on yhtälön (3.52) ratkaisu. □

Theorem 3.55 (Yksikäsitteisyys)**.** *Jos $\gamma \colon J_0 \to U$ ja $\tilde{\gamma} \colon J_0 \to U$ ovat alkuarvo-ongelman (3.52) ratkaisuja (alkuarvolla $\tilde{\gamma}(t_0) = \gamma(t_0)$), niin $\gamma = \tilde{\gamma}$.*

Todistus. Oletetaan, että γ ja $\tilde{\gamma}$ ovat (3.52):n ratkaisuja (alkuarvoilla $\gamma(t_0) = x$ ja $\tilde{\gamma}(t_0) = y$). Tällöin

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}|\tilde{\gamma}(t) - \gamma(t)|^2 &= \frac{d}{dt}\Big(\big(\tilde{\gamma}(t) - \gamma(t)\big) \cdot \big(\tilde{\gamma}(t) - \gamma(t)\big)\Big) \\ &= 2\big(\tilde{\gamma}(t) - \gamma(t)\big) \cdot \frac{d}{dt}\big(\tilde{\gamma}(t) - \gamma(t)\big) \\ &= 2\big(\tilde{\gamma}(t) - \gamma(t)\big) \cdot \Big(V\big(\tilde{\gamma}(t)\big) - V\big(\gamma(t)\big)\Big) \\ &\le 2|\tilde{\gamma}(t) - \gamma(t)| \underbrace{\big|V\big(\tilde{\gamma}(t)\big) - V\big(\gamma(t)\big)\big|}_{\le L|\tilde{\gamma}(t) - \gamma(t)|} \\ &\le 2L|\tilde{\gamma}(t) - \gamma(t)|^2. \end{aligned}$$

Tästä saadaan

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\big(e^{-2Lt}|\tilde{\gamma}(t) - \gamma(t)|^2\big) &= e^{-2Lt}\frac{d}{dt}|\tilde{\gamma}(t) - \gamma(t)|^2 - 2Le^{-2Lt}|\tilde{\gamma}(t) - \gamma(t)|^2 \\ &\le e^{-2Lt}\big(2L|\tilde{\gamma}(t) - \gamma(t)|^2 - 2L|\tilde{\gamma}(t) - \gamma(t)|^2\big) = 0. \end{aligned}$$

Siten

$$e^{-2Lt}|\tilde{\gamma}(t) - \gamma(t)|^2 \le e^{-2Lt_0}|\tilde{\gamma}(t_0) - \gamma(t_0)|^2, \quad \forall t \ge t_0.$$

Toisaalta

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}|\tilde{\gamma}(t) - \gamma(t)|^2 &\ge -2|\tilde{\gamma}(t) - \gamma(t)||V\big(\tilde{\gamma}(t)\big) - V\big(\gamma(t)\big)| \\ &\ge -2L|\tilde{\gamma}(t) - \gamma(t)|^2, \end{aligned}$$

josta seuraa

$$\frac{d}{dt}\big(e^{2Lt}|\tilde{\gamma}(t) - \gamma(t)|^2\big) \ge 0,$$

joten
$$e^{2Lt}|\tilde{\gamma}(t)-\gamma(t)|^2 \le e^{2Lt_0}|\tilde{\gamma}(t_0)-\gamma(t_0)|^2, \quad \forall t \le t_0.$$
Näin ollen kaikilla $t \in J_0$ pätee

$$|\tilde{\gamma}(t)-\gamma(t)| \le e^{L|t-t_0|}|\tilde{\gamma}(t_0)-\gamma(t_0)|. \tag{3.56}$$

Jos siis $\tilde{\gamma}(t_0)=\gamma(t_0)$, niin $\tilde{\gamma}\equiv\gamma$. □

Lemma 3.57 (Jatkuvuus)**.** *Olkoon J_0 avoin väli, $t_0 \in J_0$, $U_0 \subset U$ avoin ja $\theta\colon J_0\times U_0 \to U$ mikä tahansa kuvaus s.e. jokaisella $x \in U_0$, $\gamma\colon J_0 \to U$, $\gamma(t)=\theta(t,x)$, on (3.52):n ratkaisu alkuarvolla $\gamma(t_0)=x$. Tällöin θ on jatkuva.*

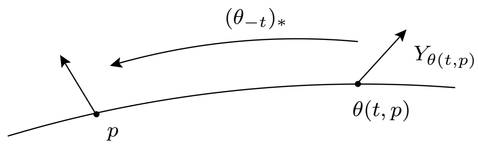
Olkoon $(t,x)\in J_0\times U_0$ ja osoitetaan, että θ on jatkuva pisteessä (t,x). Koska jatkuvuus on lokaali ominaisuus, voidaan olettaa, että $\bar{J}_0=[a,b]\subset\mathbb{R}$. Arvion (3.56) todistuksesta seuraa, että
$$|\theta(t,\tilde{x})-\theta(t,x)| \le e^{LT}|\tilde{x}-x|,$$
missä $T=b-a$. Siten θ on x:n suhteen Lipschitz-jatkuva vakiolla e^{LT}. Olkoon $(\tilde{t},\tilde{x})\in J_0\times U_0$. Koska jokainen (3.52):n ratkaisu toteuttaa (integraali)yhtälön (3.53), saadaan
$$\theta(\tilde{t},\tilde{x})=\tilde{x}+\int_{t_0}^{\tilde{t}} V\big(\theta(s,\tilde{x})\big)ds$$
ja samoin pisteelle (t,x). Siten
$$\begin{aligned}|\theta(\tilde{t},\tilde{x})-\theta(t,x)| &\le |\tilde{x}-x| + \Big|\int_{t_0}^{\tilde{t}} V\big(\theta(s,\tilde{x})\big)ds - \int_{t_0}^{t} V\big(\theta(s,x)\big)ds\Big| \\ &\le |\tilde{x}-x| + \Big|\int_{t_0}^{\tilde{t}} |V\big(\theta(s,\tilde{x})\big)-V\big(\theta(s,x)\big)|ds\Big| + \Big|\int_{\tilde{t}}^{t} |V\big(\theta(s,x)\big)|ds\Big|.\end{aligned}$$
Koska $s\mapsto\theta(s,x)$ on jatkuva, niin on olemassa $\delta_x>0$ siten, että
$$M_x=\max\{\big|V\big(\theta(s,x)\big)\big|\colon s\in[t-\delta_x,t+\delta_x]\}<\infty.$$
Kun $\tilde{t}\in[t-\delta_x,t+\delta_x]$, saadaan
$$\begin{aligned}|\theta(\tilde{t},\tilde{x})-\theta(t,x)| &\le |\tilde{x}-x| + \Big|L\int_{t_0}^{\tilde{t}} |\theta(s,\tilde{x})-\theta(s,x)|ds\Big| + \Big|\int_{\tilde{t}}^{t} M_x ds\Big| \\ &\le |\tilde{x}-x| + LTe^{LT}|\tilde{x}-x| + M_x|\tilde{t}-t|.\end{aligned}$$
Näin ollen θ on jatkuva pisteessä (t,x). □

Theorem 3.58 (Sileys)**.** *Olkoon $U\subset\mathbb{R}^n$ avoin ja $V\colon U\to\mathbb{R}^n$ Lipschitz. Oletetaan, että $U_0\subset U$ on avoin, $J_0\subset\mathbb{R}$ on avoin väli, $t_0\in J_0$ ja $\theta\colon J_0\times U_0\to U$ on mikä tahansa kuvaus s.e. jokaisella $x\in U_0$, $\gamma\colon J_0\to U$, $\gamma(t)=\theta(t,x)$, on (3.52):n ratkaisu. Jos $V\in C^k(U)$ jollakin $k\ge1$, niin silloin myös $\theta\in C^k\big(J_0\times U_0\big)$.*

Todistus. Sivuutetaan. [Ks. esim. Lee [L2].]

3.59 Vektorikentän Lien derivaatta

Olkoot $X \in \mathcal{T}(M)$, $Y \in \mathcal{T}(M)$, $p \in M$ ja olkoon θ X:n virtaus. Tällöin $\theta_{-t}(\theta_t^p) = p$, kun $t \in I =]-\delta, \delta[$, missä $\delta > 0$ on riittävän pieni.



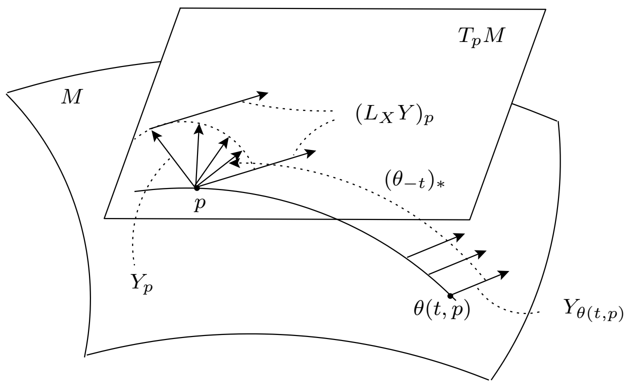
Voimme siten määritellä C^∞-polun $I \to T_pM$,

$$t \mapsto (\theta_{-t})_* Y_{\theta(t,p)}.$$

Tämän polun tangenttia pisteessä $t = 0$,

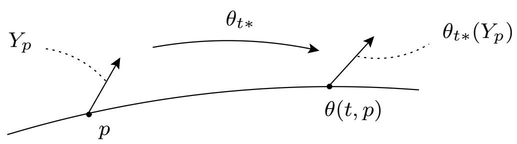
$$\lim_{t \to 0} \frac{(\theta_{-t})_* Y_{\theta(t,p)} - Y_p}{t} = \frac{d}{dt}\big((\theta_{-t})_* Y_{\theta(t,p)}\big)_{|t=0} \tag{3.60}$$

sanotaan Y:n *Lien derivaataksi* X:n suhteen ja merkitään $\big(L_X Y\big)_p$.



Toinen tapa kirjoittaa (3.60): Jokaisella t, joilla $|t|$ on tarpeeksi pieni, olkoon $\theta_{t*}Y$ vektorikenttä, joka on määritelty asettamalla

$$(\theta_{t*}Y)_{\theta(t,p)} = \theta_{t*}(Y_p).$$



Silloin

$$\begin{aligned}
\frac{(\theta_{-t})_* Y_{\theta(t,p)} - Y_p}{t} &= \frac{Y_p - (\theta_{-t})_* Y_{\theta(t,p)}}{-t} \\
&= \frac{Y_p - \big(\theta_{-t*}Y\big)_{\theta(-t,\theta(t,p))}}{-t} \\
&= \frac{Y_p - (\theta_{-t*}Y)_p}{-t} \\
&= \frac{Y_p - (\theta_{s*}Y)_p}{s}, \quad s = -t.
\end{aligned}$$

Theorem 3.61. *Olkoot $X, Y \in \mathcal{T}(M)$ ja $p \in M$. Silloin*

$$(L_X Y)_p = [X, Y]_p.$$

Todistuksessa tarvitaan:

Lemma 3.62. *Olkoon $h\colon]-\delta, \delta[\times U \to \mathbb{R}$ C^∞-funktio, jolle $h(0, q) = 0$ kaikilla $q \in U$, $U \subset M$ avoin. Silloin on olemassa C^∞-funktio $g\colon]-\delta, \delta[\times U \to \mathbb{R}$ s.e. $h(t, q) = tg(t, q)$. Erityisesti*

$$g(0, q) = D_1 h(0, q). \quad (D_1 = \frac{\partial}{\partial t})$$

Todistus. Määritellään $g(t, q) = \int_0^1 D_1 h(ts, q) ds$. □

Lauseen 3.61 todistus. Olkoon θ X:n virtaus ja olkoon $f \in C^\infty(p)$. Määritellään

$$h(t, q) = f\big(\theta(t, q)\big) - f(q) = \big(f \circ \theta_t\big)(q) - f(q).$$

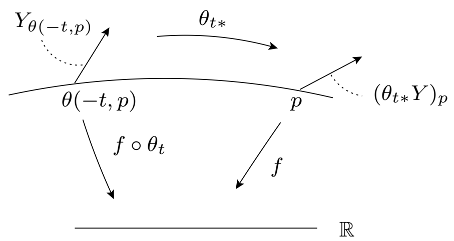
Lemmasta 3.62 saadaan $g_t(q) = g(t, q)$ s.e.

$$\big(f \circ \theta_t\big)(q) = f(q) + h(t, q) = f(q) + tg_t(q) \tag{3.63}$$

ja

$$\begin{aligned} g_0(q) &= \frac{\partial h}{\partial t}(0, q) = \lim_{t \to 0} \frac{h(t, q) - \overbrace{h(0, q)}^{=0}}{t} = \lim_{t \to 0} \frac{f\big(\theta(t, q)\big) - f(q)}{t} \\ &= \lim_{t \to 0} \frac{\big(f \circ \theta^q\big)(t) - \big(f \circ \theta^q\big)(0)}{t} = \big(f \circ \theta^q\big)'(0) \\ &= X_q f. \end{aligned}$$

Lasketaan raja-arvo $\lim_{t \to 0} \frac{1}{t}\big(Y - (\theta_{t*} Y)\big)_p f$.



Ensin saadaan

$$\big(\theta_{t*} Y\big)_p f = \Big(\theta_{t*} Y_{\theta(-t,p)}\Big) f = Y_{\theta(-t,p)}(f \circ \theta_t) \overset{(3.63)}{=} Y_{\theta(-t,p)} f + tY_{\theta(-t,p)} g_t.$$

Siten

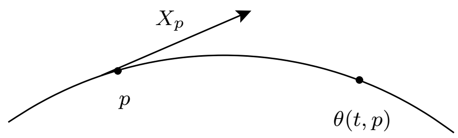
$$\begin{aligned} \lim_{t \to 0} \frac{1}{t}\big(Y - (\theta_{t*} Y)\big)_p f &= \lim_{t \to 0} \frac{1}{t}\Big(Y_p f - Y_{\theta(-t,p)} f - tY_{\theta(-t,p)} g_t\Big) \\ &= \lim_{t \to 0} \frac{1}{t}\Big(Y_p f - Y_{\theta(-t,p)} f\Big) - \lim_{t \to 0} Y_{\theta(-t,p)} g_t. \end{aligned}$$

Nyt

$$\lim_{t \to 0} Y_{\theta(-t,p)} g_t = Y_p g_0 = Y_p(Xf)$$

ja

$$\begin{aligned}\lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\Big(Y_pf - Y_{\theta(-t,p)}f\Big) &= \lim_{-s\to 0}\frac{1}{-s}\Big(Y_pf - Y_{\theta(s,p)}f\Big)\\ &= \lim_{s\to 0}\frac{1}{s}\Big(\big(Yf\big)(\theta(s,p)) - \big(Yf\big)(p)\Big)\\ &= X_p(Yf).\end{aligned}$$



Saatiin

$$\lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\big(Y-(\theta_{t*}Y)\big)_p f = X_p(Yf) - Y_p(Xf) = [X,Y]_pf. \qquad \square$$

4 Tensorit ja tensorikentät

4.1 Tensorit

Olkoot $V_1,\ldots,V_k$ ja W (reaalisia) vektoriavaruuksia. Sanomme, että kuvaus $F\colon V_1\times\cdots\times V_k\to W$ on *multilineaarinen* (tarkemmin sanottuna *k-lineaarinen*), jos se on lineaarinen jokaisen muuttujansa suhteen eli

$$F(v_1,\ldots,av_i+bv_i',\ldots,v_k) = aF(v_1,\ldots,v_i,\ldots,v_k) + bF(v_1,\ldots,v_i',\ldots,v_k)$$

kaikilla $i=1,\ldots,k$ ja $a,b\in\mathbb{R}$.

Example 4.2. 1. Jos V on sisätuloavaruus, niin sisätulo $\langle\cdot,\cdot\rangle\colon V\times V\to\mathbb{R}$ on 2-lineaarinen (eli *bilineaarinen*). Esim. pistetulo $\mathbb{R}^n$:ssä. Käyttö: Voidaan laskea (määritellä) vektorin normi ja kahden vektorin välinen kulma.

2. Ristitulo $\mathbb{R}^3$:ssa on bilineaarinen kuvaus $\cdot\times\cdot\colon\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$. Käyttö: Suunnikkaan pinta-alan laskeminen ja annettuja vektoreita vastaan kohtisuorassa olevan vektorin etsiminen.

3. Determinantti on n-lineaarinen kuvaus $\det\colon\mathbb{R}^n\times\cdots\times\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$. Tulkinta: Jos $v_1,\ldots,v_n\in\mathbb{R}^n,\ v_i=(v_i^1,\ldots,v_i^n)$, niin

$$\det(v_1,\ldots,v_n) = \det\begin{pmatrix} v_1^1 & \cdots & v_n^1\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ v_1^n & \cdots & v_n^n\end{pmatrix}.$$

Käyttö: Voidaan tutkia vektoreiden $v_1,\ldots,v_n$ lineaarista riippumattomuutta ja laskea vektoreiden $v_1,\ldots,v_n$ virittämän suuntaissärmiön tilavuus.

Olkoon V äärellisulotteinen (reaalinen) vektoriavaruus. Lineaarikuvausta $\omega\colon V\to\mathbb{R}$ sanotaan (V:n) *kovektoriksi* ja kovektoreiden muodostamaa vektoriavaruutta sanotaan V:n *duaaliksi* ja merkitään V^*.

Otetaan käyttöön merkintä

$$\langle\omega,v\rangle = \langle v,\omega\rangle = \omega(v)\in\mathbb{R},\quad \omega\in V^*,\ v\in V.$$

Lemma 4.3. *Olkoon V n-ulotteinen vektoriavaruus ja $(v_1, \ldots, v_n)$ sen kanta. Tällöin kovektorit $\omega^1, \ldots, \omega^n$, joille*

$$\omega^j(v_i) = \delta_i^j,$$

muodostavat V^*:n kannan. Erityisesti $\dim V^* = \dim V$.

Todistus. (HT)
[Huom.: Yllä δ_i^j on Kroneckerin delta, ts. $\delta_i^j = 1$, jos $i = j$, ja $\delta_i^j = 0$, jos $i \neq j$.]

Definition 4.4. 1. *k-kovariantti tensori V:llä* on k-lineaarinen kuvaus

$$V^k \to \mathbb{R}, \quad V^k = \underbrace{V \times \cdots \times V}_{k \text{ kpl}}.$$

2. *l-kontravariantti tensori V:llä* on l-lineaarinen kuvaus

$$V^{*l} \to \mathbb{R}, \quad V^{*l} = \underbrace{V^* \times \cdots \times V^*}_{l \text{ kpl}}.$$

3. *k-kovariantti, l-kontravariantti tensori V:llä* (eli lyhyemmin *(k,l)-tensori*) on $(k+l)$-lineaarinen kuvaus

$$V^k \times V^{*l} \to \mathbb{R}.$$

Merkitsemme

$$\begin{aligned} T^k(V) &= k\text{-kovarianttien tensorien joukko}, \\ T_l(V) &= l\text{-kontravarianttien tensorien joukko}, \\ T_l^k(V) &= k\text{-kovarianttien, } l\text{-kontravarianttien tensorien (eli } (k,l)\text{-tensorien) joukko.} \end{aligned}$$

Remark 4.5. 1. $T^k(V)$, $T_l(V)$ ja $T_l^k(V)$ ovat luonnollisella tavalla vektoriavaruuksia.

2. Sovitaan, että sekä 0-kovariantit että 0-kontravariantit tensorit ovat reaalilukuja, jolloin $T^0(V) = T_0(V) = \mathbb{R}$.

Example 4.6. 1. Jokainen lineaarinen kuvaus $\omega \colon V \to \mathbb{R}$ on 1-kovariantti tensori. Siten $T^1(V) = V^*$. Samoin $T_1(V) = V^{**} = V$.

2. Jos V on sisätuloavaruus, niin silloin (mikä tahansa) V:n sisätulo on 2-kovariantti tensori (bilineaarinen reaaliarvoinen kuvaus eli *bilineaarinen muoto*).

3. Determinantti on n-kovariantti tensori $\mathbb{R}^n$:llä.

Definition 4.7. Tensoreiden $F \in T_l^k(V)$ ja $G \in T_q^p(V)$ *tensoritulo* on tensori $F \otimes G \in T_{l+q}^{k+p}(V)$,

$$F \otimes G(v_1, \ldots, v_{k+p}, \omega^1, \ldots, \omega^{l+q}) = F(v_1, \ldots, v_k, \omega^1, \ldots, \omega^l) G(v_{k+1}, \ldots, v_{k+p}, \omega^{l+1}, \ldots, \omega^{l+q}).$$

Lemma 4.8. *Jos $(v_1, \ldots, v_n)$ on V:n kanta ja $(\omega^1, \ldots, \omega^n)$ vastaava V^*:n duaalikanta ($\omega^i(v_j) = \delta_j^i$), niin tensorit*

$$\omega^{i_1} \otimes \cdots \omega^{i_k} \otimes v_{j_1} \otimes \cdots \otimes v_{j_l}, \quad 1 \leq j_p, i_q \leq n,$$

muodostavat $T_l^k(V)$:n kannan. Erityisesti $\dim T_l^k(V) = n^{k+l}$.

Todistus. (HT)

Remark 4.9. Olemme jo aiemmin todenneet, että $T_1(V) = V^{**} = V$ (ts. jokainen vektori $v \in V$ on 1-kontravariantti tensori) ja $T^1(V) = V^*$ (ts. jokainen kovektori on 1-kovariantti tensori). Siten

$$\omega^{i_1} \otimes \cdots \omega^{i_k} \otimes v_{j_1} \otimes \cdots \otimes v_{j_l} \in T^k_l(V),$$

eli on (k, l)-tensori.

4.10 Kotangenttikimppu

Aiemmin määriteltiin funktion $f \in C^\infty(p)$ *differentiaali* p:ssä lineaarikuvauksena $df_p\colon T_pM \to \mathbb{R}$,

$$df_p v = vf, \quad v \in T_pM.$$

Siten $df_p \in T_pM^*$ ($= T_pM$:n duaali). Kutsumme T_pM^*:ä *M:n kotangenttiavaruudeksi p:ssä.* Jos (U, x), $x = (x^1, \ldots, x^n)$, on kartta p:ssä ja $\big((\partial_1)_p, \ldots, (\partial_n)_p\big)$ on koordinaattivektoreiden muodostama T_pM:n kanta, niin funktioiden x^i differentiaalit (p:ssä) dx^i_p, $i = 1, \ldots, n$, muodostavat T_pM^*:n duaalikannan. Siten funktion $f \in C^\infty(p)$ differentiaali p:ssä on

$$df_p = (\partial_i)_p f dx^i_p. \qquad \text{(HT) [Huom. Einsteinin summaus]}$$

Määritellään M:n *kotangenttikimppu* (merk. TM^*) pistevieraana yhdisteenä kaikista kotangenttiavaruuksista

$$TM^* = \bigsqcup_{p \in M} T_pM^*$$

sekä (luonnollinen) projektio $\pi\colon TM^* \to M$, $T_pM^* \ni \omega \mapsto p \in M$. Kutsumme TM^*:n sektioita, ts. kuvauksia $\omega\colon M \to TM^*$, joilla $\pi \circ \omega = id$, *kovektorikentiksi M:llä* tai *(differentiaali) 1-muodoiksi.* Funktion $f \in C^\infty(M)$ *differentiaali* on kovektorikenttä

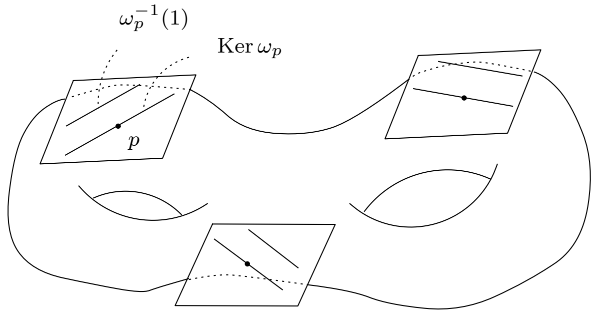
$$df\colon M \to TM^*, \quad df(p) = df_p\colon T_pM \to \mathbb{R}.$$

Vektorikentän ja kovektorikentän geometrinen visualisointi. Vektorikenttä liittää jokaiseen pisteeseen vektorin. Kovektorikenttä ω puolestaan liittää jokaiseen pisteeseen p, jossa $\omega_p \neq 0$, kodimensiota 1 olevan T_pM:n aliavaruuden (hypertason)

$$\operatorname{Ker} \omega_p = \{v \in T_pM \colon \omega_p(v) = 0\}$$

ja affiinin kodimensiota 1 olevan hypertason

$$\omega_p^{-1}(1) = \{v \in T_pM \colon \omega_p(v) = 1\}.$$



Samoin kuin tangenttikimpun tapauksessa, voidaan osoittaa, että kotangenttikimpulla on luonnollinen sileä struktuuri. Sileitten kovektorikenttien joukkoa merkitsemme $\mathcal{T}^1(M)$:llä (myös $\mathcal{T}^1_0(M)$, $\mathcal{T}^*(M), \mathcal{T}^{0,1}(M)$).

Jos (U,x), $x=(x^1,\dots,x^n)$, on kartta ja ω on kovektorikenttä U:ssa, niin on olemassa funktiot $\omega_i\colon U\to\mathbb{R}$, $i=1,\dots,n$, s.e.

$$\omega=\omega_i dx^i.$$

Funktioita ω_i kutsutaan ω:n *komponenttifunktioiksi* kartan (U,x) suhteen. Samoin kuin vektorikenttien tapauksessa saadaan:

Lemma 4.11. *Olkoon ω kovektorikenttä M:llä. Silloin seuraavat ehdot ovat yhtäpitäviä:*

(a) $\omega\in\mathcal{T}^1(M)$.

(b) ω:n komponenttifunktiot ovat sileitä kaikkien karttojen suhteen.

(c) Jos $U\subset M$ on avoin ja $V\in\mathcal{T}(U)$ on sileä vektorikenttä U:ssa, niin funktio $p\mapsto\omega_p(V_p)$ on sileä.

Todistus. HT [Vrt. Lemma 3.2] □

4.12 Tensorikimput M:llä

Olkoon M sileä monisto.

Definition 4.13. Määrittelemme tensorikimput M:llä pistevieraina yhdisteinä.

1. *k-kovariantti tensorikimppu*

$$T^kM=\bigsqcup_{p\in M}T^k(T_pM),$$

2. *l-kontravariantti tensorikimppu*

$$T_lM=\bigsqcup_{p\in M}T_l(T_pM),\quad \text{ja}$$

3. *(k,l)-tensorikimppu*

$$T^k_lM=\bigsqcup_{p\in M}T^k_l(T_pM).$$

Teemme samastukset:

$$\begin{aligned}
T^0M&=T_0M=M\times\mathbb{R},\\
T^1M&=TM^*,\\
T_1M&=TM,\\
T^k_0M&=T^kM,\\
T^0_lM&=T_lM.
\end{aligned}$$

Kaikilla tensorikimpuilla on luonnollinen C^∞-struktuuri, joten voimme puhua niiden sileistä sektioista. Sanomme, että sektio $s\colon M\to T^k_lM$ on *(k,l)-tensorikenttä* (ts. $\pi\circ s=id_M$ eli $s(p)\in T^k_l(T_pM)$). Vastaavasti sileä (k,l)-tensorikenttä on sileä sektio $M\to T^k_lM$. Samoin määritellään (sileät) *k-kovariantit tensorikentät* ja *l-kontravariantit tensorikentät*. Aiemman sopimuksen mukaan sekä 0-kovariantit että 0-kontravariantit tensorit ovat reaalilukuja, joten sekä (sileät) 0-kovariantit tensorikentät että (sileät) 0-kontravariantit tensorikentät ovat (sileitä) reaaliarvoisia funktioita. Merkitään

$$\begin{aligned} \mathcal{T}^k(M) &= \{T^kM\text{:n sileät sektiot}\} \\ &= \{\text{sileät } k\text{-kovariantit tensorikentät}\} \\ \mathcal{T}_l(M) &= \{T_lM\text{:n sileät sektiot}\} \\ &= \{\text{sileät } l\text{-kontravariantit tensorikentät}\} \\ \mathcal{T}_l^k(M) &= \{T_l^kM\text{:n sileät sektiot}\} \\ &= \{\text{sileät } (k,l)\text{-tensorikentät}\}. \end{aligned}$$

Jos (U,x), $x=(x^1,\ldots,x^n)$, on kartta ja σ on tensorikenttä U:ssa, niin voimme kirjoittaa

$$\begin{aligned} &\sigma = \sigma_{i_1\cdots i_k} dx^{i_1}\otimes\cdots\otimes dx^{i_k}, \quad \text{jos } \sigma \text{ on } k\text{-kovariantti tensorikenttä,} \\ &\sigma = \sigma^{j_1\cdots j_l}\partial_{j_1}\otimes\cdots\otimes\partial_{j_l}, \quad \text{jos } \sigma \text{ on } l\text{-kontravariantti tensorikenttä, ja} \\ &\sigma = \sigma^{j_1\cdots j_l}_{i_1\cdots i_k} dx^{i_1}\otimes\cdots\otimes dx^{i_k}\otimes\partial_{j_1}\otimes\cdots\otimes\partial_{j_l}, \quad \text{jos } \sigma \text{ on } (k,l)\text{-tensorikenttä.} \end{aligned}$$

Funktioita $\sigma_{i_1\cdots i_k}$, $\sigma^{j_1\cdots j_l}$ ja $\sigma^{j_1\cdots j_l}_{i_1\cdots i_k}$ kutsutaan σ:n *komponenttifunktioiksi* kartan (U,x) suhteen. Jälleen pätee:

Lemma 4.14. *Olkoon σ (k,l)-tensorikenttä M:llä. Silloin seuraavat ehdot ovat yhtäpitäviä:*

(a) $\sigma \in \mathcal{T}_l^k(M)$.

(b) σ:n komponenttifunktiot ovat sileitä kaikkien karttojen suhteen.

(c) Jos $U \subset M$ on avoin ja $X_1,\ldots,X_k \in \mathcal{T}(U)$ ovat sileitä vektorikenttiä U:ssa ja $\omega^1,\ldots,\omega^l \in \mathcal{T}^1(M)$ ovat sileitä kovektorikenttiä U:ssa, niin funktio

$$p \mapsto \sigma\big(X_1,\ldots,X_k,\omega^1,\ldots,\omega^l\big)_p \in \mathbb{R}$$

on sileä.

Todistus. HT [Vrt. Lemma 3.2] □

"Pullback". Olkoon $f\colon M\to N$ sileä kuvaus ja $k\in\{0,1,2,\ldots\}$. Jokaisella $p\in M$ määritellään kuvaus (*pullback*)

$$f^*\colon T^k(T_{f(p)}N)\to T^k(T_pM)$$

asettamalla

$$f^*S(v_1,\ldots,v_k) = S(f_*v_1,\ldots,f_*v_k), \quad S\in T^k(T_{f(p)}N),\ v_1,\ldots,v_k\in T_pM.$$

Tämän jälkeen määritellään "pullback"-operaatio (sileille) k-kovarianteille tensorikentille: Olkoon $f\colon M\to N$ sileä ja olkoon σ k-kovariantti tensorikenttä N:llä. Määritellään k-kovariantti tensorikenttä $f^*\sigma$ M:llä asettamalla

$$(f^*\sigma)_p = f^*(\sigma_{f(p)}), \quad p\in M.$$

Toisin sanoen, jos $p\in M$ ja $v_1,\ldots,v_k\in T_pM$, niin

$$(f^*\sigma)_p(v_1,\ldots,v_k) = \sigma_{f(p)}(f_*v_1,\ldots,f_*v_k).$$

Theorem 4.15. *Olkoot M, N, P sileitä monistoja, $f\colon M \to N$ ja $g\colon N \to P$ sileitä kuvauksia, $\sigma \in \mathcal{T}^k(N)$, $\tau \in \mathcal{T}^l(N)$ ja $h \in C^\infty(N)$. Silloin*

(a) $f^*dh = d(h \circ f)$.

(b) $f^*(h\sigma) = (h \circ f) f^*\sigma$.

(c) $f^*(\sigma \otimes \tau) = f^*\sigma \otimes f^*\tau$.

(d) $f^*\sigma \in \mathcal{T}^k(M)$.

(e) $f^*\colon \mathcal{T}^k(N) \to \mathcal{T}^k(M)$ *on lineaarinen.*

(f) $(g \circ f)^* = f^* \circ g^*$.

(g) $(id_N)^*\sigma = \sigma$.

Todistus. Todistetaan joitain kohtia.

(b) Olkoon $p \in M$ ja $v_1, \ldots, v_k \in T_pM$. Silloin

$$\begin{aligned}\big(f^*(h\sigma)\big)_p(v_1, \ldots, v_k) &= (h\sigma)_{f(p)}(f_*v_1, \ldots, f_*v_k)\\ &= h\big(f(p)\big)\sigma_{f(p)}(f_*v_1, \ldots, f_*v_k)\\ &= (h \circ f)(p)\sigma_{f(p)}(f_*v_1, \ldots, f_*v_k)\\ &= \big((h \circ f) f^*\sigma\big)_p(v_1, \ldots, v_k).\end{aligned}$$

(f) Olkoon $\beta \in \mathcal{T}^k(P)$. Tällöin $(g \circ f)^*\beta \in \mathcal{T}^k(M)$. Samoin

$$(f^* \circ g^*)\beta = f^*(\underbrace{g^*\beta}_{\in \mathcal{T}^k(N)}) \in \mathcal{T}^k(M).$$

Olkoon $p \in M$ ja $v_1, \ldots, v_k \in T_pM$. Silloin

$$\begin{aligned}\big((g \circ f)^*\beta\big)_p(v_1, \ldots, v_k) &= \beta_{g(f(p))}\big((g \circ f)_*v_1, \ldots, (g \circ f)_*v_k\big)\\ &= \beta_{g(f(p))}\big(g_*(f_*v_1), \ldots, g_*(f_*v_k)\big)\\ &= (g^*\beta)_{f(p)}(f_*v_1), \ldots, f_*v_k)\\ &= \big(f^*(g^*\beta)\big)_p(v_1, \ldots, v_k)\\ &= \big((f^* \circ g^*)\beta\big)_p(v_1, \ldots, v_k).\end{aligned}$$

Loput kohdat (HT). □

Huom.: Jos f ei ole diffeomorfismi, ei yleensä voida määritellä pullback-operaatiota l-kontravarianteille eikä (k, l)-tensorikentille.

4.16 Symmetriset tensorit ja tensorikentät

Olkoon T k-kovariantti tensori V:llä. Sanomme, että T on *symmetrinen*, jos

$$T(v_1, \ldots, \overset{i}{v_i}, \ldots, \overset{j}{v_j}, \ldots, v_k) = T(v_1, \ldots, \overset{i}{v_j}, \ldots, \overset{j}{v_i}, \ldots, v_k)$$

kaikilla $1 \le i < j \le k$. [Tässä indeksit i ja j vektoreiden päällä ilmaisevat tietenkin ko. vektorin paikan.] Merkitään

$$\Sigma^k(V) = \{T \in T^k(V) \colon T \text{ symmetrinen}\}.$$

Selvästi $\Sigma^k(V)$ on $T^k(V)$:n aliavaruus. Määritellään kuvaus, *symmetrisointi*, $\operatorname{Sym}\colon T^k(V) \to T^k(V)$,

$$\operatorname{Sym} T = \frac{1}{k!} \sum_{\sigma \in S_k} {}^{\sigma}T,$$

missä S_k on joukon $\{1, \dots, k\}$ permutaatioiden ryhmä ja ${}^{\sigma}T$ on k-kovariantti tensori

$${}^{\sigma}T(v_1, \dots, v_k) = T\big(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(k)}\big).$$

Siis

$$\operatorname{Sym} T(v_1, \dots, v_k) = \frac{1}{k!} \sum_{\sigma \in S_k} T\big(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(k)}\big).$$

Ryhmän S_k alkioiden lukumäärä on $k!$, joten $\operatorname{Sym} T$ on ${}^{\sigma}T$:den "keskiarvo" yli kaikkien permutaatioiden $\sigma \in S_k$. Lisäksi *sovitaan*, että ${}^{\tau}({}^{\sigma}T) = {}^{\tau\sigma}T$, missä $\tau\sigma(i) = \tau(\sigma(i))$.

Lemma 4.17. *1.* Sym *on lineaarinen kuvaus* $T^k(V) \to \Sigma^k(V)$.

2. $(\operatorname{Sym}) \circ (\operatorname{Sym}) = \operatorname{Sym}$.

3. $T \in \Sigma^k(V) \iff T = \operatorname{Sym} T$.

Todistus. Selvästi Sym on lineaarinen. Olkoon $T \in T^k(V)$. Jos $\tau \in S_k$ on mikä tahansa permutaatio, niin $\operatorname{Sym} T\big(v_{\tau(1)}, \dots, v_{\tau(k)}\big) = {}^{\tau}(\operatorname{Sym} T)(v_1, \dots, v_k)$ ja

$$\begin{aligned}
{}^{\tau}(\operatorname{Sym} T) &= {}^{\tau}\Big(\frac{1}{k!} \sum_{\sigma \in S_k} {}^{\sigma}T\Big) = \frac{1}{k!} \sum_{\sigma \in S_k} {}^{\tau}({}^{\sigma}T) \\
&= \frac{1}{k!} \sum_{\sigma \in S_k} {}^{\tau\sigma}T = \frac{1}{k!} \sum_{\eta \in S_k} {}^{\eta}T \\
&= \operatorname{Sym} T,
\end{aligned}$$

missä $\eta = \tau\sigma$ käy läpi kaikki S_k:n alkiot σ:n mukana. Koska $\tau \in S_k$ oli mikä tahansa, on $\operatorname{Sym} T$ symmetrinen. Toisaalta, jos $T \in \Sigma^k(V)$, niin

$$\begin{aligned}
& T(v_1, \dots, v_k) = T\big(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(k)}\big) \quad \forall \sigma \in S_k \\
\Rightarrow\ & k!T(v_1, \dots, v_k) = \sum_{\sigma \in S_k} T\big(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(k)}\big) \\
\Rightarrow\ & T(v_1, \dots, v_k) = \frac{1}{k!} \sum_{\sigma \in S_k} T\big(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(k)}\big) = \operatorname{Sym} T(v_1, \dots, v_k).
\end{aligned}$$

Siis

$$T \in \Sigma^k(V) \ \Rightarrow\ T = \operatorname{Sym} T.$$

Erityisesti

$$\operatorname{Sym}(\underbrace{\operatorname{Sym} T}_{\in \Sigma^k(V)}) = \operatorname{Sym} T.$$

Toisaalta, jos $T = \operatorname{Sym} T$, niin $T \in \Sigma^k(V)$, koska $\operatorname{Sym} T$ on symmetrinen. $\square$

Jos $S \in \Sigma^k(V)$ ja $T \in \Sigma^l(V)$ niin yleensä $S \otimes T \notin \Sigma^{k+l}(V)$. Määritellään tensoreiden $S \in \Sigma^k(V)$ ja $T \in \Sigma^l(V)$ *symmetrinen tulo* $ST = \operatorname{Sym}(S \otimes T) \in \Sigma^{k+l}(V)$,

$$ST(v_1, \ldots, v_{k+l}) = \frac{1}{(k+l)!} \sum_{\sigma \in S_{k+l}} S(v_{\sigma(1)}, \ldots, v_{\sigma(k)}) T(v_{\sigma(k+1)}, \ldots, v_{\sigma(k+l)}).$$

Symmetrinen k-kovariantti tensorikenttä M:llä on k-kovariantti tensorikenttä, jonka arvo jokaisessa pisteessä $p \in M$ on symmetrinen tensori. Vastaavalla tavalla määritellään symmetrinen l-kontravariantti tensori ja tensorikenttä.

Example 4.18. Tärkein symmetrinen tensorikenttä M:llä on ns. *Riemannin metriikka.* Se on sileä symmetrinen 2-kovariantti tensorikenttä $g \in \mathcal{T}^2(M)$, joka on positiividefiniitti jokaisessa pisteessä $p \in M$. Paria (M, g) kutsutaan *Riemannin monistoksi*. Tällöin jokaisella $p \in M$

$$g_p \colon T_pM \times T_pM \to \mathbb{R}$$

on sisätulo. Voimme siten määritellä vektorin $v \in T_pM$ normin $|v| = g_p(v, v)^{1/2}$ ja C^∞-polun $\gamma \colon [a, b] \to M$ pituuden

$$\ell(\gamma) = \int_a^b |\dot{\gamma}_t| dt.$$

Paloittain C^∞-polun pituus määritellään palojen pituuksien summana. Olkoon M yhtenäinen ja $p, q \in M$. Määritellään

$$d(p, q) = \inf_\gamma \ell(\gamma),$$

missä inf otetaan kaikkien paloittain C^∞-polkujen p:stä q:hun yli. Tällöin $d \colon M \times M \to \mathbb{R}$ on metriikka ja sen määräämä topologia on sama kuin M:n topologia. Voidaan osoittaa käyttämällä ykkösen ositusta, että jokaisella sileällä monistolla on olemassa Riemannin metriikoita.
Emme tällä kurssilla käsittele ”Riemannin geometriaa” tämän enempää. [Ks. esim. luennot [Ho]: I. Holopainen: ”Differential geometry”, Fall 1999, 2001.]

5 Differentiaalimuodot

Tässä luvussa tarkastellaan ”alternoivia” kovariantteja tensoreita ja tensorikenttiä. Alternoivan tensorin arvon merkki vaihtuu, jos kahden vektorin paikkaa vaihdetaan keskenään. Differentiaalimuodot ovat alternoivia k-kovariantteja tensorikenttiä. Ne ovat erittäin tärkeitä mm. kahdesta syystä:

1. Niitä voidaan integroida lokaalista esityksestä riippumattomalla tavalla monistojen ja alimonistojen yli.

2. Ne muodostavat yhteyden moniston ”analyysin” ja topologian välille (de Rham kohomologia).

Lisäksi klassiset differentiaalioperaattorit grad (gradientti), div (divergenssi) ja curl (roottori) sekä Greenin, Gaussin ja Stokesin lauseet voidaan esittää differentiaalimuotojen avulla.

5.1 Ulkoista algebraa, alternoivat tensorit

Sanomme, että k-kovariantti tensori $T \in T^k(V)$ on *alternoiva* (antisymmetrinen), jos

$$T(v_1, \dots, \overset{i}{v_i}, \dots, \overset{j}{v_j}, \dots, v_k) = -T(v_1, \dots, \overset{i}{v_j}, \dots, \overset{j}{v_i}, \dots, v_k)$$

kaikilla $1 \le i < j \le k$. Merkitään

$$\Lambda^k(V) = \{T \in T^k(V) \colon T \text{ alternoiva}\}$$

ja kutsutaan $\Lambda^k(V)$:n alkioita *k-kovektoreiksi*. Selvästi $\Lambda^k(V)$ on $T^k(V)$:n aliavaruus. [Huom.: Joissakin kirjoissa käytetään merkintää $\Lambda^k(V^*)$.]

Merkitään $(\sigma(1), \sigma(2), \dots, \sigma(k)) = \sigma(1, \dots, k)$, kun $\sigma \in S_k$. Permutaatiota $\sigma \in S_k$ kutsutaan *paikan vaihdoksi* (engl. transposition), jos se vaihtaa kahden alkion paikat keskenään, mutta jättää muut paikoilleen. Toisin sanoen,

$$\sigma(1, \dots, \overset{i}{i}, \dots, \overset{j}{j}, \dots, k) = (1, \dots, \overset{i}{j}, \dots, \overset{j}{i}, \dots, k)$$

joillakin $1 \le i < j \le k$. Sanomme, että permutaatio σ on *parillinen (pariton)*, merk. $\operatorname{sgn} = +1$ ($\operatorname{sgn} = -1$), jos se voidaan esittää parillisen (parittoman) monen paikan vaihdon yhdisteenä. Määritellään kuvaus, *alternointi*, $\operatorname{Alt} \colon T^k(V) \to T^k(V)$,

$$\operatorname{Alt} T = \frac{1}{k!} \sum_{\sigma \in S_k} (\operatorname{sgn} \sigma)({}^\sigma T), \quad \text{ts.}$$

$$\operatorname{Alt} T(v_1, \dots, v_k) = \frac{1}{k!} \sum_{\sigma \in S_k} (\operatorname{sgn} \sigma) T\big(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(k)}\big).$$

Lemma 5.2. *1.* Alt *on lineaarinen kuvaus* $T^k(V) \to \Lambda^k(V)$.

2. $(\operatorname{Alt}) \circ (\operatorname{Alt}) = \operatorname{Alt}$.

3. $T \in \Lambda^k(V) \iff T = \operatorname{Alt} T$.

Todistus. Lineaarisuus on selvä. Kiinnitetään indeksit $1 \le i < j \le k$. Olkoon $\tau \in S_k$,

$$\tau(1, \dots, \overset{i}{i}, \dots, \overset{j}{j}, \dots, k) = (1, \dots, \overset{i}{j}, \dots, \overset{j}{i}, \dots, k),$$

jolloin $\operatorname{sgn} \tau = -1$. Olkoon $T \in T^k(V)$. Tällöin

$$\operatorname{Alt} T(v_1, \dots, \overset{i}{v_j}, \dots, \overset{j}{v_i}, \dots, v_k) = {}^\tau(\operatorname{Alt} T)(v_1, \dots, \overset{i}{v_i}, \dots, \overset{j}{v_j}, \dots, v_k)$$

ja edelleen

$$\begin{aligned}
{}^\tau(\operatorname{Alt} T) &= {}^\tau\Big(\frac{1}{k!} \sum_{\sigma \in S_k} (\operatorname{sgn} \sigma)^\sigma T\Big) \\
&= -{}^\tau\Big(\frac{1}{k!} \sum_{\sigma \in S_k} (\operatorname{sgn} \tau)(\operatorname{sgn} \sigma)^\sigma T\Big) \\
&= -\frac{1}{k!} \sum_{\sigma \in S_k} (\operatorname{sgn} \tau\sigma)^{\tau\sigma} T \\
&= -\frac{1}{k!} \sum_{\eta \in S_k} (\operatorname{sgn} \eta)^\eta T \\
&= -\operatorname{Alt} T,
\end{aligned}$$

missä $\eta = \tau\sigma$ ja $\operatorname{sgn}\eta = (\operatorname{sgn}\tau)(\operatorname{sgn}\sigma)$. Siten $\operatorname{Alt} T \in \Lambda^k(V)$ $\forall T \in T^k(V)$.
Jos $T \in \Lambda^k(V)$, niin

$$T(v_1, \dots, v_k) = (\operatorname{sgn}\sigma) T\big(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(k)}\big) \quad \forall \sigma \in S_k,$$

joten

$$\begin{aligned}\operatorname{Alt} T(v_1, \dots, v_k) &= \frac{1}{k!} \sum_{\sigma \in S_k} \underbrace{(\operatorname{sgn}\sigma) T\big(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(k)}\big)}_{=T(v_1,\dots,v_k)} \\ &= T(v_1, \dots, v_k).\end{aligned}$$

Siten

$$T \in \Lambda^k(V) \;\Rightarrow\; \operatorname{Alt} T = T.$$

Erityisesti $(\operatorname{Alt}) \circ (\operatorname{Alt}) = \operatorname{Alt}$. Lopuksi, jos $\operatorname{Alt} T = T$, niin $T \in \Lambda^k(V)$. $\square$

Example 5.3. 1. $T \in T^0(V) \;\Rightarrow\; \operatorname{Alt} T = T$.

2. $T \in T^1(V) \;\Rightarrow\; \operatorname{Alt} T = T$.

3. $T \in T^2(V) \;\Rightarrow$

$$\operatorname{Alt} T(v, w) = \frac{1}{2}\big(T(v, w) - T(w, v)\big).$$

4. $T \in T^3(V) \;\Rightarrow$

$$\operatorname{Alt} T(x, y, z) = \frac{1}{6}\big(T(x, y, z) + T(y, z, x) + T(z, x, y) - T(y, x, z) - T(z, y, x) - T(x, z, y)\big).$$

Definition 5.4. Jos $\alpha \in T^k(V)$ ja $\beta \in T^l(V)$, niin niiden *ulkoinen tulo* on $\alpha \wedge \beta \in \Lambda^{k+l}(V)$,

$$\alpha \wedge \beta = \frac{(k+l)!}{k!\,l!} \operatorname{Alt}(\alpha \otimes \beta).$$

Siten

$$\alpha \wedge \beta(v_1, \dots, v_{k+l}) = \frac{1}{k!\,l!} \sum_{\sigma \in S_{k+l}} (\operatorname{sgn}\sigma) \alpha\big(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(k)}\big) \beta\big(v_{\sigma(k+1)}, \dots, v_{\sigma(k+l)}\big).$$

Permutaatiota $\sigma \in S_{k+l}$, jolle pätee

$$\sigma(1) < \sigma(2) < \dots < \sigma(k) \quad \text{ja} \quad \sigma(k+1) < \sigma(k+2) < \dots < \sigma(k+l),$$

kutsutaan (k,l)-sekoitukseksi (engl. (k,l) shuffle). Merkitään kaikkien (k,l)-sekoitusten joukkoa $Sh(k,l)$:llä.

Lemma 5.5. *Jos $\alpha \in \Lambda^k(V)$ ja $\beta \in \Lambda^l(V)$, niin*

$$\alpha \wedge \beta(v_1, \dots, v_{k+l}) = \sum_{\sigma \in Sh(k,l)} (\operatorname{sgn} \sigma) \alpha\big(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(k)}\big) \beta\big(v_{\sigma(k+1)}, \dots, v_{\sigma(k+l)}\big).$$

Todistus. Ylimääräinen HT. □

Theorem 5.6 (Ulkoisen tulon ominaisuuksia)**.** *Ulkoiselle tulolle pätee:*

(a) Bilineaarisuus:

$$(a\alpha + b\beta) \wedge \eta = a(\alpha \wedge \eta) + b(\beta \wedge \eta) \quad \forall \alpha, \beta \in T^k(V),\ \eta \in T^l(V),\ a, b \in \mathbb{R}.$$

(b)

$$\alpha \wedge \beta = (\operatorname{Alt} \alpha) \wedge \beta = \alpha \wedge (\operatorname{Alt} \beta) \quad \forall \alpha \in T^k(V),\ \beta \in T^l(V).$$

(c) Antikommutatiivisuus:

$$\alpha \wedge \beta = (-1)^{kl} \beta \wedge \alpha \quad \forall \alpha \in T^k(V),\ \beta \in T^l(V).$$

(d) Assosiatiivisuus:

$$\alpha \wedge (\beta \wedge \eta) = (\alpha \wedge \beta) \wedge \eta = \frac{(k+l+p)!}{k!l!p!} \operatorname{Alt}(\alpha \otimes \beta \otimes \eta) \quad \forall \alpha \in T^k(V),\ \beta \in T^l(V),\ \eta \in T^p(V).$$

(e) Kaikilla kovektoreilla $\omega^1, \dots, \omega^k$ ja kaikilla vektoreilla $v_1, \dots, v_k$

$$\omega^1 \wedge \dots \wedge \omega^k(v_1, \dots, v_k) = \det\big[\omega^j(v_i)\big].$$

Todistus. (a): Bilineaarisuus on selvä.
(b): Jos $\tau \in S_k$, niin

$$\begin{aligned}
\operatorname{Alt} {}^\tau T(v_1, \dots, v_k) &= \frac{1}{k!} \sum_{\sigma \in S_k} (\operatorname{sgn} \sigma) T\big(v_{\sigma\tau(1)}, \dots, v_{\sigma\tau(k)}\big) \\
&= \frac{1}{k!} \sum_{\sigma \in S_k} (\operatorname{sgn} \tau)(\operatorname{sgn}(\sigma\tau)) T\big(v_{\sigma\tau(1)}, \dots, v_{\sigma\tau(k)}\big) \\
&= (\operatorname{sgn} \tau) \operatorname{Alt} T(v_1, \dots, v_k).
\end{aligned}$$

Siis

$$\operatorname{Alt}({}^\tau \alpha) = (\operatorname{sgn} \tau) \operatorname{Alt} \alpha.$$

Saadaan

$$\begin{aligned}
\operatorname{Alt}\big((\operatorname{Alt} \alpha) \otimes \beta\big) &= \operatorname{Alt}\Big(\frac{1}{k!} \sum_{\sigma \in S_k} (\operatorname{sgn} \sigma)({}^\sigma \alpha \otimes \beta)\Big) \\
&= \frac{1}{k!} \sum_{\sigma \in S_k} (\operatorname{sgn} \sigma) \operatorname{Alt}({}^\sigma \alpha \otimes \beta) \\
&= \frac{1}{k!} \sum_{\sigma \in S_k} (\operatorname{sgn} \sigma') \operatorname{Alt} {}^{\sigma'}(\alpha \otimes \beta),
\end{aligned}$$

missä $\sigma' \in S_{k+l}$ on permutaatio s.e. $\sigma'(1,\dots,k,k+1,\dots,k+l) = (\sigma(1),\dots,\sigma(k),k+1,\dots,k+l)$, jolloin $\operatorname{sgn}\sigma' = \operatorname{sgn}\sigma$ ja ${}^{\sigma'}(\alpha\otimes\beta) = {}^{\sigma}\alpha\otimes\beta$. Koska

$$\operatorname{Alt}{}^{\sigma'}(\alpha\otimes\beta) = (\operatorname{sgn}\sigma')\operatorname{Alt}(\alpha\otimes\beta),$$

saadaan

$$\begin{aligned}\operatorname{Alt}\big((\operatorname{Alt}\alpha)\otimes\beta\big) &= \frac{1}{k!}\sum_{\sigma\in S_k}\underbrace{(\operatorname{sgn}\sigma')(\operatorname{sgn}\sigma')}_{=1}\operatorname{Alt}(\alpha\otimes\beta)\\ &= \operatorname{Alt}(\alpha\otimes\beta).\end{aligned}$$

Näin ollen

$$\begin{aligned}\alpha\wedge\beta &= \frac{(k+l)!}{k!l!}\operatorname{Alt}(\alpha\otimes\beta)\\ &= \frac{(k+l)!}{k!l!}\operatorname{Alt}\big((\operatorname{Alt}\alpha)\otimes\beta\big)\\ &= (\operatorname{Alt}\alpha)\wedge\beta.\end{aligned}$$

Samoin todistetaan toinen (b)-kohdan yhtälö.
(c): Olkoon $\tau\in S_{k+l}$,

$$\tau(1,\dots,k+l) = (k+1,\dots,k+l,1,\dots,k),$$

jolloin $\operatorname{sgn}\tau = (-1)^{kl}$. Nyt

$$(\alpha\otimes\beta)(v_1,\dots,v_{k+l}) = (\beta\otimes\alpha)\big(v_{\tau(1)},\dots,v_{\tau(k+l)}\big),$$

eli $\alpha\otimes\beta = {}^{\tau}(\beta\otimes\alpha)$. Siten

$$\operatorname{Alt}(\alpha\otimes\beta) = (\operatorname{sgn}\tau)\operatorname{Alt}(\beta\otimes\alpha) = (-1)^{kl}\operatorname{Alt}(\beta\otimes\alpha),$$

josta seuraa (c).
(d):

$$\begin{aligned}\alpha\wedge(\beta\wedge\eta) &= \frac{(k+l+p)!}{k!(l+p)!}\operatorname{Alt}\big(\alpha\otimes(\beta\wedge\eta)\big)\\ &= \frac{(k+l+p)!}{k!(l+p)!}\frac{(l+p)!}{l!p!}\operatorname{Alt}\big(\alpha\otimes\operatorname{Alt}(\beta\otimes\eta)\big)\\ &= \frac{(k+l+p)!}{k!l!p!}\operatorname{Alt}(\alpha\otimes\beta\otimes\eta),\end{aligned}$$

koska $\operatorname{Alt}\big(\alpha\otimes\operatorname{Alt}(\beta\otimes\eta)\big) = \operatorname{Alt}\big(\alpha\otimes(\beta\otimes\eta)\big) = \operatorname{Alt}(\alpha\otimes\beta\otimes\eta)$. Laskemalla samoin $(\alpha\wedge\beta)\wedge\eta$ saadaan todistettua (d).
(e): Jos $\alpha_i\in T^{d_i}(V)$, niin toistamalla (d)-kohtaa saadaan

$$\alpha_1\wedge\dots\wedge\alpha_k = \frac{(d_1+\dots+d_k)!}{d_1!\cdots d_k!}\operatorname{Alt}(\alpha_1\otimes\dots\otimes\alpha_k). \tag{5.7}$$

Erityisesti tapauksessa $d_i\equiv 1$ saadaan

$$\omega^1\wedge\dots\wedge\omega^k = k!\operatorname{Alt}(\omega^1\otimes\dots\otimes\omega^k), \tag{5.8}$$

joten

$$\begin{aligned}\omega^1 \wedge \cdots \wedge \omega^k(v_1,\dots,v_k) &= k!\frac{1}{k!}\sum_{\sigma\in S_k}(\operatorname{sgn}\sigma)(\omega^1\otimes\cdots\otimes\omega^k)\big(v_{\sigma(1)},\dots,v_{\sigma(k)}\big)\\ &= \sum_{\sigma\in S_k}(\operatorname{sgn}\sigma)\omega^1\big(v_{\sigma(1)}\big)\cdots\omega^k\big(v_{\sigma(k)}\big)\\ &= \det\big[\omega^j(v_i)\big]. \quad \square\end{aligned}$$

Theorem 5.9. *Olkoon V n-ulotteinen ja $\{\omega^1,\dots,\omega^n\}$ jokin V^*:n kanta. Silloin k-kovektoreiden joukko*

$$\mathcal{E} = \{\omega^{i_1}\wedge\cdots\wedge\omega^{i_k} \mid 1 \le i_1 < i_2 < \cdots < i_k \le n\}$$

muodostaa $\Lambda^k(V)$:n kannan. Erityisesti

$$\dim\Lambda^k(V) = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Jos $k > n$, niin $\dim\Lambda^k(V) = 0$.

Todistus. Olkoon $\omega\in\Lambda^k(V)$. Erityisesti $\omega\in T^k(V)$, joten Lemma 4.8 $\Rightarrow$

$$\omega = \omega_{i_1\cdots i_k}\omega^{i_1}\otimes\cdots\otimes\omega^{i_k}.$$

Koska $\omega\in\Lambda^k(V)$, niin

$$\begin{aligned}\omega = \operatorname{Alt}\omega &= \omega_{i_1\cdots i_k}\operatorname{Alt}\big(\omega^{i_1}\otimes\cdots\otimes\omega^{i_k}\big)\\ &\overset{(5.8)}{=} \big(\frac{\omega_{i_1\cdots i_k}}{k!}\big)\omega^{i_1}\wedge\cdots\wedge\omega^{i_k}.\end{aligned}$$

Jos yllä $i_j = i_l$ jollakin $j < l$, niin vastaava termi

$$\omega^{i_1}\wedge\cdots\wedge\omega^{i_j}\wedge\cdots\wedge\omega^{i_l}\wedge\cdots\wedge\omega^{i_k} = 0,$$

koska kyseessä on alternoiva tensori. Siten voidaan olettaa, että jokaisessa multi-indeksissä kaikki luvut $i_1,\dots,i_k$ ovat eri suuria. Lisäksi jokaista multi-indeksiä $i_1\cdots i_k$ kohti on olemassa permutaatio $\sigma\in S_k$ siten, että $\sigma(i_1) < \sigma(i_2) < \cdots < \sigma(i_k)$, jolloin

$$\omega^{i_1}\wedge\omega^{i_2}\wedge\cdots\wedge\omega^{i_k} = (\operatorname{sgn}\sigma)\omega^{\sigma(i_1)}\wedge\omega^{\sigma(i_2)}\wedge\cdots\wedge\omega^{\sigma(i_k)}.$$

Siten $\mathcal{E}$ virittää $\Lambda^k(V)$:n. Oletetaan sitten, että

$$\omega_{i_1\cdots i_k}\omega^{i_1}\wedge\cdots\wedge\omega^{i_k} = 0.$$

Olkoon $\{v_1,\dots,v_n\}$ V:n kanta s.e. $\omega^j(v_i) = \delta^j_i$. Olkoon $1\le j_1 < \cdots < j_k \le n$, jolloin

$$\omega_{i_1\cdots i_k}\omega^{i_1}\wedge\cdots\wedge\omega^{i_k}(v_{j_1},\dots,v_{j_k}) = 0. \tag{5.10}$$

Jos $i_l \notin \{j_1,\dots,j_k\}$, niin kaavan (5.8) nojalla kyseiset termit

$$\omega^{i_1}\wedge\cdots\wedge\omega^{i_l}\wedge\cdots\wedge\omega^{i_k}(v_{j_1},\dots,v_{j_k}) = 0,$$

sillä $\omega^j(v_i) = \delta^j_i$. Summaan (5.10) jää jäljelle vain yksi termi, jonka on siten myös hävittävä, ts.

$$\omega_{j_1\cdots j_k}\big(\omega^{j_1}\wedge\cdots\wedge\omega^{j_k}(v_{j_1},\dots,v_{j_k})\big) = 0.$$

Tämä on mahdollista vain, jos $\omega_{j_1\cdots j_k} = 0$, sillä

$$\omega^{j_1} \wedge \cdots \wedge \omega^{j_k}(v_{j_1}, \ldots, v_{j_k}) = \det\left[\delta^{j_l}_{j_r}\right] = \det I_k = 1.$$

[Yllä I_k on $k \times k$-yksikkömatriisi.] Siten $\mathcal{E}$:n kovektorit ovat lineaarisesti riippumattomia, joten $\mathcal{E}$ muodostaa $\Lambda^k(V)$:n kannan. Muut kohdat HT. □

Corollary 5.11. *Jos* $\dim V = n$, *niin* $\dim \Lambda^n(V) = 1$. *Jos* $(\omega^1, \ldots, \omega^n)$ *on* V^**:n kanta, niin* $\omega^1 \wedge \cdots \wedge \omega^n$ *virittää* $\Lambda^n(V)$*:n.*

5.12 Differentiaalimuodot monistoilla

Palautetaan mieliin, että $T^k M$ on k-kovarianttien tensoreiden kimppu M:llä. Alternoivien k-kovarianttien tensorien kimpulle käytämme merkintää

$$\Lambda^k M = \bigsqcup_{p \in M} \Lambda^k(T_p M).$$

[$\Lambda^k M$ on $T^k M$:n sileä alikimppu.]

Differentiaali k-muoto ω on mikä tahansa $\Lambda^k M$:n sektio $M \to \Lambda^k M$, $p \mapsto \omega_p \in \Lambda^k(T_p M)$. Aiemman sopimuksen mukaan 0-kovariantti tensori on reaaliluku, joten differentiaali 0-muoto on reaaliarvoinen funktio.

Differentiaali k-muodon α ja differentiaali l-muodon β ulkoinen tulo määritellään pisteittäin

$$(\alpha \wedge \beta)_p = \alpha_p \wedge \beta_p, \quad p \in M,$$

jolloin $\alpha \wedge \beta$ on differentiaali $(k+l)$-muoto.

Jos (U, x), $x = (x^1, \ldots, x^n)$, on kartta, niin jokainen differentiaali k-muoto ω (U:ssa) voidaan Lauseen 5.9 nojalla kirjoittaa muodossa

$$\omega = \sum_{i_1 < \cdots < i_k} \omega_{i_1\cdots i_k} dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_k}.$$

Merkitään $\Lambda^k M$:n sileiden sektioiden joukkoa $\mathcal{A}^k(M)$:llä. [Muita yleisesti käytettyjä merkintöjä ovat mm. $\Omega^k(M)$, $\mathcal{E}^k(M)$ ja $\bigwedge^k(M)$.]

Differentiaalimuotojen pull-back sileässä kuvauksessa on erikoistapaus k-kovarianttien tensorikenttien pull-backistä: Jos $f\colon M \to N$ on sileä ja ω on differentiaali k-muoto N:llä, niin $f^*\omega$ on differentiaali k-muoto M:llä,

$$(f^*\omega)_p(v_1, \ldots, v_k) = \omega_{f(p)}(f_* v_1, \ldots, f_* v_k).$$

Lemma 5.13. *Olkoon* $f\colon M \to N$ *sileä. Silloin:*

(a) $f^*\colon \mathcal{A}^k(N) \to \mathcal{A}^k(M)$ *on lineaarinen.*

(b) $f^*(\alpha \wedge \beta) = (f^*\alpha) \wedge (f^*\beta)$.

(c) Jos (U, y), $y = (y^1, \ldots, y^n)$, *on kartta* N*:ssä, niin*

$$f^*\Big(\sum_{i_1 < \cdots < i_k} \omega_{i_1\cdots i_k} dy^{i_1} \wedge \cdots \wedge dy^{i_k}\Big) = \sum_{i_1 < \cdots < i_k} \big(\omega_{i_1\cdots i_k} \circ f\big) d\big(y^{i_1} \circ f\big) \wedge \cdots \wedge d\big(y^{i_k} \circ f\big).$$

Todistus. HT □

Erikoistapauksessa $k = n = \dim M = \dim N$ saadaan (c)-kohdasta seuraava tärkeä (muuttujanvaihto)kaava.

Theorem 5.14. *Olkoot M ja N sileitä n-monistoja ja $f\colon M \to N$ sileä. Olkoon (U, x), $x = (x^1, \dots, x^n)$, kartta M:llä ja (V, y), $y = (y^1, \dots, y^n)$ kartta N:llä. Jos u on reaaliarvoinen funktio V:llä, niin joukossa $U \cap f^{-1}V$ pätee:*

$$f^*\big(u dy^1 \wedge \dots \wedge dy^n\big) = (u \circ f)(\det Df) dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n, \tag{5.15}$$

missä $Df(p)$ on f_{*p}:n matriisi kantojen $\{(\partial/\partial x^i)_p\}$ ja $\{(\partial/\partial y^i)_{f(p)}\}$ suhteen ($=$ $(y \circ f \circ x^{-1})'(x(p))$:n matriisi $\mathbb{R}^n$:n standardi kannan suhteen).

Todistus. Jokaisella $p \in U$, $dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n$ virittää $\Lambda^n(T_pM)$:n (Korollari 5.11), joten riittää näyttää, että (5.15):n molemmat puolet ovat yhtäsuuret $(\partial/\partial x^1, \dots, \partial/\partial x^n)$:ssä. Merkitään $f^j = y^j \circ f$. Lemman 5.13 (c)-kohdan mukaan

$$f^*\big(u dy^1 \wedge \dots \wedge dy^n\big) = (u \circ f) df^1 \wedge \dots \wedge df^n,$$

ja edelleen Lauseen 5.6 (e)-kohdan mukaan

$$df^1 \wedge \dots \wedge df^n(\partial/\partial x^1, \dots, \partial/\partial x^n) = \det\Big(df^j(\partial/\partial x^i)\Big) = \det\Big(\frac{\partial f^j}{\partial x^i}\Big) = \det Df.$$

Siten

$$\begin{aligned} &f^*\big(u dy^1 \wedge \dots \wedge dy^n\big)(\partial/\partial x^1, \dots, \partial/\partial x^n) = (u \circ f) \det Df \\ =&(u \circ f)(\det Df) \underbrace{(dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n)(\partial/\partial x^1, \dots, \partial/\partial x^n)}_{=1}. \end{aligned}$$

□

Example 5.16. Olkoon $\omega \in \mathcal{A}^2(\mathbb{R}^2)$, $\omega = dx \wedge dy$. Kirjoitetaan ω napakoordinaateissa

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta. \end{cases}$$

Saadaan

$$\begin{aligned} \omega &= dx \wedge dy \\ &= d(r\cos\theta) \wedge d(r\sin\theta) \\ &= (\cos\theta\, dr - r\sin\theta\, d\theta) \wedge (\sin\theta\, dr + r\cos\theta\, d\theta) \\ &= r\cos^2\theta\, dr \wedge d\theta - r\sin^2\theta\, d\theta \wedge dr \\ &= r\, dr \wedge d\theta, \end{aligned}$$

sillä alternoituvuuden takia $dr \wedge dr = d\theta \wedge d\theta = 0$ ja $d\theta \wedge dr = -dr \wedge d\theta$.

5.17 Ulkoinen derivaatta

Määrittelemme seuraavaksi differentiaalioperaattorin, ns. *ulkoisen derivaatan*, joka liittää jokaiseen sileään differentiaali k-muotoon $\alpha \in \mathcal{A}^k(M)$ sileän $(k+1)$-muodon $d\alpha \in \mathcal{A}^{k+1}(M)$. Muotoa $d\alpha$ sanotaan α:n *ulkoiseksi derivaataksi*.

Theorem 5.18. *Olkoon M sileä monisto. Jokaisella kokonaisluvulla $k \geq 0$ on olemassa yksikäsitteinen ($\mathbb{R}$-)lineaarinen kuvaus $d = d_U^k \colon \mathcal{A}^k(U) \to \mathcal{A}^{k+1}(U)$, $U \subset M$ avoin, joka toteuttaa ehdot:*

(i) d on $\wedge$-antiderivaatio: Toisin sanoen, jos $\alpha \in \mathcal{A}^k(U)$ ja $\beta \in \mathcal{A}^l(U)$, niin

$$d(\alpha \wedge \beta) = d\alpha \wedge \beta + (-1)^k \alpha \wedge d\beta.$$

(ii) Kun $k = 0$, niin d on differentiaali

$$d\colon \underbrace{C^\infty(U)}_{=\mathcal{A}^0(U)} \to \mathcal{A}^1(U), \quad f \mapsto df.$$

(iii) $d^2 = d \circ d = 0$.

(iv) d kommutoi rajoittuman kanssa: Toisin sanoen, jos $V \subset U \subset M$ ovat avoimia ja $\alpha \in \mathcal{A}^k(U)$, niin $d(\alpha|V) = (d\alpha)|V$.

Ehto (iv) merkitsee, että d on lokaali operaattori.

Todistus. Osoitetaan ensin 1-käsitteisyys:
Oletetaan, että on olemassa d, joka toteuttaa ehdot (i)–(iv). Olkoon (U, x), $x = (x^1, \ldots, x^n)$, kartta. Ehdoista (iii) ja (ii) seuraa, että koordinaattifunktion x^i differentiaalille dx^i pätee:

$$d(dx^i) = 0,$$

sillä $x^i \in \mathcal{A}^0(U) = C^\infty(U)$. Olkoon

$$\alpha = \sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq n} \alpha_{i_1 \cdots i_k} dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_k}.$$

Koska $d(dx^i) = 0$, niin ehdosta (i) seuraa, että

$$d\big(dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_k}\big) = 0.$$

Siten (i):n ja (ii):n nojalla

$$d\alpha = \sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq n} (d\alpha_{i_1 \cdots i_k}) \wedge dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_k}. \tag{5.19}$$

Näin ollen d on 1-käsitteisesti määrätty U:ssa ehtojen (i)–(iii) nojalla ja ehdon (iv) nojalla myös koko M:ssä.
Olemassaoloa varten määritellään d jokaisessa kartassa (U, x) kaavalla (5.19). Selvästi d on $\mathbb{R}$-lineaarinen ja toteuttaa ehdon (ii). Ehdon (i) todistamiseksi voidaan d:n lineaarisuuden nojalla olettaa, että

$$\alpha = f\, dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_k} \quad \text{ja} \quad \beta = g\, dx^{j_1} \wedge \cdots \wedge dx^{j_l}.$$

Silloin

$$\alpha \wedge \beta = fg\, dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_k} \wedge dx^{j_1} \wedge \cdots \wedge dx^{j_l},$$

joten (5.19):n mukaan

$$\begin{aligned}
d(\alpha \wedge \beta) &= d(fg) \wedge dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_k} \wedge dx^{j_1} \wedge \cdots \wedge dx^{j_l}\\
&= (gdf + fdg) \wedge dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_k} \wedge dx^{j_1} \wedge \cdots \wedge dx^{j_l}\\
&= \underbrace{df \wedge dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_k}}_{=d\alpha} \wedge g\, dx^{j_1} \wedge \cdots \wedge dx^{j_l} + (-1)^k f\, dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_k} \wedge \underbrace{dg \wedge dx^{j_1} \wedge \cdots \wedge dx^{j_l}}_{=d\beta}\\
&= d\alpha \wedge \beta + (-1)^k \alpha \wedge d\beta.
\end{aligned}$$

Tarkistetaan ehto (iii). Riittää osoittaa, että $d(d\alpha) = 0$, jos

$$\alpha = f\, dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_k}.$$

Jokaisella $f \in \mathcal{A}^0(U)$

$$df = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x^i} dx^i,$$

joten

$$\begin{aligned}
d(d\alpha) &= d\Big(\sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x^i} dx^i \wedge dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_k}\Big)\\
&= \sum_{i=1}^n d\Big(\frac{\partial f}{\partial x^i} dx^i \wedge dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_k}\Big)\\
&= \sum_{i=1}^n d\Big(\frac{\partial f}{\partial x^i}\Big) \wedge dx^i \wedge dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_k}\\
&= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x^j \partial x^i} dx^j \wedge dx^i \wedge dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_k}.
\end{aligned}$$

Siten

$$d(d\alpha) = 0,$$

sillä

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^j \partial x^i} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j} \quad \text{ja} \quad dx^j \wedge dx^i = -dx^i \wedge dx^j.$$

Näin ollen jokaisessa kartassa (U, x) kaava (5.19) määrittelee $d = d_U$:n joka toteuttaa ehdot (i)–(iii). Vielä on osoitettava, että nämä "lokaalit" d:t määrittelevät d:n jokaisessa avoimessa M:n osajoukossa, ja että (iv) pätee. Riittää osoittaa, että määritelmä on kartasta riippumaton. Olkoon siten $\tilde{d}$ toinen (5.19):n määrittelemä operaattori kartassa (V, y), missä $U \cap V \neq \emptyset$. Koska myös $\tilde{d}$ toteuttaa ehdot (i)–(iii), niin lokaalin yksikäsitteisyyden nojalla $d = \tilde{d}$ joukossa $U \cap V$. □

Theorem 5.20. *Olkoon $f\colon M \to N$ sileä. Tällöin kaikilla $\alpha \in \mathcal{A}^k(N)$*

$$f^*(d\alpha) = d(f^*\alpha). \tag{5.21}$$

Todistus. Lokaalisuuden ja lineaarisuuden nojalla riittää todistaa (5.21) N:n kartassa (V, y), $y = (y^1, \dots, y^n)$, differentiaali k-muodolle

$$\alpha = u\, dy^{i_1} \wedge \cdots \wedge dy^{i_k},$$

missä $u \in \mathcal{A}^0(V)$. Tällöin

$$\begin{aligned} f^*\alpha &= (u \circ f) d(y^{i_1} \circ f) \wedge \cdots \wedge d(y^{i_k} \circ f), \\ d(f^*\alpha) &= d(u \circ f) \wedge d(y^{i_1} \circ f) \wedge \cdots \wedge d(y^{i_k} \circ f), \\ d\alpha &= du \wedge dy^{i_1} \wedge \cdots \wedge dy^{i_k}, \\ f^*(d\alpha) &= f^* du \wedge f^* dy^{i_1} \wedge \cdots \wedge f^* dy^{i_k} \\ &= d(u \circ f) \wedge d(y^{i_1} \circ f) \wedge \cdots \wedge d(y^{i_k} \circ f). \quad \square \end{aligned}$$

Theorem 5.22. *Jos* $\omega \in \mathcal{A}^1(M)$ *ja* $X, Y \in \mathcal{T}(M)$, *niin*

$$d\omega(X, Y) = X\big(\omega(Y)\big) - Y\big(\omega(X)\big) - \omega\big([X, Y]\big). \tag{5.23}$$

Todistus. Lokaalisti jokainen sileä differentiaali 1-muoto voidaan esittää summana 1-muodoista $u\, dv$, missä u ja v ovat sileitä reaaliarvoisia funktioita. Siten riittää olettaa, että

$$\omega = u\, dv.$$

Olkoot X ja Y sileitä vektorikenttiä. Silloin (5.23):n vasen puoli on

$$d(u\, dv)(X, Y) = du \wedge dv(X, Y) = du(X) dv(Y) - dv(X) du(Y) = (Xu)(Yv) - (Xv)(Yu),$$

ja oikea puoli on

$$\begin{aligned} & X\big(u\, dv(Y)\big) - Y\big(u\, dv(X)\big) - u\, dv\big([X, Y]\big) \\ =& X(uYv) - Y(uXv) - u[X, Y]v \\ =& \big((Xu)(Yv) + uX(Yv)\big) - \big((Yu)(Xv) + uY(Xv)\big) - u\big(X(Yv) - Y(Xv)\big) \\ =& (Xu)(Yv) - (Xv)(Yu). \quad \square \end{aligned}$$

Lause 5.22 on erikoistapaus seuraavasta, jota voitaisiin käyttää jopa ulkoisen derivaatan määritelmänä.

Theorem 5.24. *Jos* $\omega \in \mathcal{A}^k(M)$ *ja* $X_1, \dots, X_{k+1} \in \mathcal{T}(M)$, *niin*

$$\begin{aligned} d\omega(X_1, \dots, X_{k+1}) &= \sum_{i=1}^{k+1} (-1)^{i-1} X_i\big(\omega(X_1, \dots, \hat{X}_i, \dots, X_{k+1}\big) \\ &+ \sum_{1 \le i < j \le k+1} (-1)^{i+j} \omega\big([X_i, X_j], X_1, \dots, \hat{X}_i, \dots, \hat{X}_j, \dots, X_{k+1}\big), \end{aligned}$$

missä $\hat{X}$ *tarkoittaa, ettei kyseistä vektoria huomioida.*

Todistus. Sivuutetaan (ks. esim. Lee [L2]).

Definition 5.25. Sanomme, että differentiaalimuoto $\alpha \in \mathcal{A}^k(M)$ on

suljettu, jos $d\alpha = 0$, ja

eksakti, jos $\alpha = d\beta$, jollakin $\beta \in \mathcal{A}^{k-1}(M)$.

Koska $d \circ d = 0$, on jokainen eksakti muoto suljettu. Käänteinen ei päde yleisesti. Se, milloin jokainen suljettu p-muoto M:llä on eksakti riippuu itseasiassa moniston M (globaalista) topologiasta eikä lainkaan M:n sileästä struktuurista. Tämän seikan esittelyä varten merkitään

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}^p(M) &= \operatorname{Ker}[d\colon \mathcal{A}^p(M) \to \mathcal{A}^{p+1}(M)] \\ &= \{\text{suljetut } p\text{-muodot } M\text{:llä}\}, \\ \mathcal{B}^p(M) &= \operatorname{Im}[d\colon \mathcal{A}^{p-1}(M) \to \mathcal{A}^p(M)] \\ &= \{\text{eksaktit } p\text{-muodot } M\text{:llä}\}. \end{aligned}$$

Sovitaan, että $\mathcal{A}^p(M)$ on triviaalivektoriavaruus, jos $p < 0$ tai $p > \dim M$. Vektoriavaruutta (tekijäavaruutta)

$$H^p_{dR}(M) = \frac{\mathcal{Z}^p(M)}{\mathcal{B}^p(M)}$$

sanotaan M:n p:nneksi *de Rhamin kohomologiaryhmäksi.* Sen alkioina ovat suljettujen p-muotojen ekvivalenssiluokat $[\omega]$. Suljetut muodot ω ja ω' ovat ekvivalentit (eli kuuluvat samaan ekvivalenssiluokkaan), jos $\omega - \omega'$ on eksakti. Nyt M:n jokainen suljettu p-muoto on eksakti täsmälleen silloin, kun $H^p_{dR}(M) = 0$. Yhteyden M:n topologiaan kertoo ns. de Rhamin lause: Jokaisella sileällä monistolla M ja ei-negatiivisella kokonaisluvulla p, de Rhamin kohomologiaryhmä $H^p_{dR}(M)$ on isomorfinen singulaarisen kohomologiaryhmän $H^p(M, \mathbb{R})$ kanssa (ks. esim. Leen kirja [L2] tai Bredonin kirja [Br]).

Definition 5.26 (Sisäinen kertominen)**.** Olkoon V äärellisulotteinen vektoriavaruus ja $X \in V$. Sanomme, että lineaarikuvaus $i_X : \Lambda^k(V) \to \Lambda^{k-1}(V)$,

$$i_X\omega(Y_1, \ldots, Y_{k-1}) = \omega(X, Y_1, \ldots, Y_{k-1}),$$

on *sisäinen kertominen X:llä* (myös *kontraktio X:llä*. Jos $k = 0$, niin sovitaan, että $i_X\omega = 0$. Merkitään myös

$$X \lrcorner\, \omega = i_X\omega.$$

Vastaavasti, jos $X \in \mathcal{T}(M)$ ja $\omega \in \mathcal{A}^k(M)$, niin määritellään $i_X\omega \in \mathcal{A}^{k-1}(M)$ pisteittäin asettamalla

$$(i_X\omega)_p = i_{X_p}\omega_p, \quad p \in M.$$

Theorem 5.27. *Olkoon $X \in \mathcal{T}(M)$. Silloin:*

(i) $i_X : \mathcal{A}^k(M) \to \mathcal{A}^{k-1}(M)$ on $C^\infty(M)$-lineaarinen:

$$i_X(f\alpha + g\beta) = f i_X\alpha + g i_X\beta, \quad f, g \in C^\infty(M),\ \alpha, \beta \in \mathcal{A}^k(M).$$

(ii) $i_X \circ i_X = 0$.

(iii) i_X on $\wedge$-antiderivaatio:

$$i_X(\alpha \wedge \beta) = (i_X\alpha) \wedge \beta + (-1)^k \alpha \wedge (i_X\beta), \quad \alpha \in \mathcal{A}^k(M).$$

(iv) $i_{fX}\omega = f i_X\omega$, kun $f \in C^\infty(M)$.

(v) $i_X df = Xf$, kun $f \in C^\infty(M)$.

Todistus. (iii): Olkoon $\beta \in \mathcal{A}^l(M)$. Merkitään $X_{k+l} = X$, jolloin

$$
\begin{aligned}
&i_X(\alpha \wedge \beta)(X_1, X_2, \ldots, X_{k+l-1}) = (\alpha \wedge \beta)(\underbrace{X_{k+l}}_{=X}, X_1, \ldots, X_{k+l-1}) \\
&= (-1)^{k+l-1} \alpha \wedge \beta(X_1, \ldots, X_{k+l}) \\
&= \frac{(-1)^{k+l-1}}{k!l!} \sum_{\tilde\sigma \in S_{k+l}} (\operatorname{sgn} \tilde\sigma) \alpha(X_{\tilde\sigma(1)}, \ldots, X_{\tilde\sigma(k)}) \beta(X_{\tilde\sigma(k+1)}, \ldots, X_{\tilde\sigma(k+l)}).
\end{aligned}
$$

Toisaalta

$$
\begin{aligned}
&(i_X\alpha) \wedge \beta(X_1, X_2, \ldots, X_{k+l-1}) \\
&= \frac{1}{(k-1)!l!} \sum_{\sigma \in S_{k+l-1}} (\operatorname{sgn} \sigma) i_X \alpha(X_{\tilde\sigma(1)}, \ldots, X_{\tilde\sigma(k-1)}) \beta(X_{\tilde\sigma(k)}, \ldots, X_{\tilde\sigma(k+l-1)}) \\
&= \frac{k}{k!l!} \sum_{\sigma \in S_{k+l-1}} (\operatorname{sgn} \sigma) \alpha(X_{k+l}, X_{\tilde\sigma(1)}, \ldots, X_{\tilde\sigma(k-1)}) \beta(X_{\tilde\sigma(k)}, \ldots, X_{\tilde\sigma(k+l-1)})
\end{aligned}
$$

ja

$$
\begin{aligned}
&\alpha \wedge i_X\beta(X_1, X_2, \ldots, X_{k+l-1}) \\
&= \frac{1}{k!(l-1)!} \sum_{\sigma \in S_{k+l-1}} (\operatorname{sgn} \sigma) \alpha(X_{\tilde\sigma(1)}, \ldots, X_{\tilde\sigma(k)}) i_X \beta(X_{\tilde\sigma(k+1)}, \ldots, X_{\tilde\sigma(k+l-1)}) \\
&= \frac{l}{k!l!} \sum_{\sigma \in S_{k+l-1}} (\operatorname{sgn} \sigma) \alpha(X_{\tilde\sigma(1)}, \ldots, X_{\tilde\sigma(k)}) \beta(X_{k+l}, X_{\tilde\sigma(k+1)}, \ldots, X_{\tilde\sigma(k+l-1)}).
\end{aligned}
$$

Merkitään $S^i_{k+l} = \{\tilde\sigma \in S_{k+l} \colon \tilde\sigma(i) = k+l\}$. Silloin

$$
\begin{aligned}
&i_X(\alpha \wedge \beta)(X_1, X_2, \ldots, X_{k+l-1}) \\
&= \frac{(-1)^{k+l-1}}{k!l!} \Big(\sum_{i=1}^{k} \sum_{\tilde\sigma \in S^i_{k+l}} (\operatorname{sgn} \tilde\sigma) \alpha(X_{\tilde\sigma(1)}, \ldots, \overset{i}{X_{k+l}}, \ldots, X_{\tilde\sigma(k)}) \beta(X_{\tilde\sigma(k+1)}, \ldots, X_{\tilde\sigma(k+l)}) \\
&+ \sum_{j=1}^{l} \sum_{\tilde\sigma \in S^{k+j}_{k+l}} (\operatorname{sgn} \tilde\sigma) \alpha(X_{\tilde\sigma(1)}, \ldots, X_{\tilde\sigma(k)}) \beta(X_{\tilde\sigma(k+1)}, \ldots, \overset{j}{X_{k+l}}, \ldots, X_{\tilde\sigma(k+l)}) \Big).
\end{aligned}
$$

Jokaisella $\tilde\sigma \in S^i_{k+l}$ määritellään $\sigma \in S_{k+l-1}$ asettamalla

$$
\sigma(j) = \begin{cases} \tilde\sigma(j), & 1 \le j \le i-1 \\ \tilde\sigma(j+1), & i \le j \le j+k-1. \end{cases}
$$

Kääntäen, jos $\sigma \in S_{k+l-1}$ on annettu, niin sitä vastaa yksikäsitteinen $\tilde\sigma \in S^i_{k+l}$ s.e. yllä oleva pätee. Toisaalta $\sigma \in S_{k+l-1}$ voidaan tulkita S_k:n alkioksi, joka pitää $(k+l)$:n paikoillaan. Merkki $\operatorname{sgn} \sigma$ on molemmissa tulkinnoissa sama. Jos σ ja $\tilde\sigma$ vastaavat toisiaan yo. tavalla, niin

$$
\begin{aligned}
\sigma(1, \ldots, k+l) &= (\tilde\sigma(1), \ldots, \tilde\sigma(i-1), \tilde\sigma(i+1), \ldots, \tilde\sigma(k+l), k+l) \\
&= \sigma_i(\tilde\sigma(1), \ldots, \tilde\sigma(i-1), \overset{k+l}{\tilde\sigma(i)}, \tilde\sigma(i+1), \ldots, \tilde\sigma(k+l)),
\end{aligned}
$$

missä $\sigma_i \in S_{k+l}$,

$$\sigma_i(1,\dots,k+l) = (1,\dots,i-1,i+1,\dots,k+l,i), \quad \operatorname{sgn}\sigma_i = (-1)^{k+l-i}.$$

Siis $\operatorname{sgn}\tilde{\sigma} = (-1)^{k+l-i}\operatorname{sgn}\sigma$. Saadaan

$$\begin{aligned}
&\sum_{\tilde{\sigma}\in S^i_{k+l}} (\operatorname{sgn}\tilde{\sigma})\alpha(X_{\tilde{\sigma}(1)},\dots,\overset{i}{X_{k+l}},\dots,X_{\tilde{\sigma}(k)})\beta(X_{\tilde{\sigma}(k+1)},\dots,X_{\tilde{\sigma}(k+l)})\\
&\sum_{\sigma\in S_{k+l-1}} (-1)^{k+l-i}(\operatorname{sgn}\sigma)\alpha(X_{\sigma(1)},\dots,X_{\sigma(i-1)},\overset{i}{X_{k+l}},X_{\sigma(i)},\dots,X_{\sigma(k-1)})\beta(X_{\sigma(k)},\dots,X_{\sigma(k+l-1)})\\
&= \underbrace{(-1)^{k+l-i}(-1)^{i-1}}_{=(-1)^{k+l-1}} \sum_{\sigma\in S_{k+l-1}} (\operatorname{sgn}\sigma)\alpha(X_{k+l},X_{\sigma(1)},\dots,X_{\sigma(k-1)})\beta(X_{\sigma(k)},\dots,X_{\sigma(k+l-1)}).
\end{aligned}$$

Tehdään samoin kaikilla $1 \le i \le k$, jolloin saadaan

$$\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^{k}\sum_{\tilde{\sigma}\in S^i_{k+l}} (\operatorname{sgn}\tilde{\sigma})\alpha(X_{\tilde{\sigma}(1)},\dots,\overset{i}{X_{k+l}},\dots,X_{\tilde{\sigma}(k)})\beta(X_{\tilde{\sigma}(k+1)},\dots,X_{\tilde{\sigma}(k+l)})\\
&k(-1)^{k+l-1}\sum_{\sigma\in S_{k+l-1}} (\operatorname{sgn}\sigma)\alpha(X_{k+l},X_{\sigma(1)},\dots,X_{\sigma(k-1)})\beta(X_{\sigma(k)},\dots,X_{\sigma(k+l-1)}).
\end{aligned}$$

Samoin päätellään, että

$$\begin{aligned}
&\sum_{j=1}^{l}\sum_{\tilde{\sigma}\in S^{k+j}_{k+l}} (\operatorname{sgn}\tilde{\sigma})\alpha(X_{\tilde{\sigma}(1)},\dots,X_{\tilde{\sigma}(k)})\beta(X_{\tilde{\sigma}(k+1)},\dots,\overset{j}{X_{k+l}},\dots,X_{\tilde{\sigma}(k+l)})\\
&= l(-1)^{k+l-1}\sum_{\sigma\in S_{k+l-1}} (\operatorname{sgn}\sigma)\alpha(X_{\sigma(1)},\dots,X_{\sigma(k)})\beta(X_{k+l},X_{\sigma(k+1)},\dots,X_{\sigma(k+l-1)}).
\end{aligned}$$

Näin ollen (iii) pätee.

Muut kohdat HT. □

Tensorikenttien Lien derivaatat. Käyttämällä vektorikentän X virtausta voidaan määritellä sileitten tensorikenttien Lien derivaatta X:n suhteen. Käsitellään vain k-kovariantteja tensorikenttiä.

Olkoon $\tau \in \mathcal{T}^k(M)$ sileä k-kovariantti tensorikenttä ja $X \in \mathcal{T}(M)$ ja olkoon θ X:n virtaus. Kun $p \in M$ ja $|t|$ on tarpeeksi pieni, on θ_t diffeomorfismi p:n ympäristön ja $\theta(t,p)$:n ympäristön välillä. Voimme siten määritellä τ:n *Lien derivaatan X:n suhteen* (pisteittäin) raja-arvona

$$(L_X\tau)_p = \lim_{t\to 0}\frac{(\theta_t^*\tau)_p - \tau_p}{t} = \frac{d}{dt}\,(\theta_t^*\tau)_{p|t=0}\,.$$

Osoittautuu, että raja-arvo on olemassa joka pisteessä p ja kuvaus $p \mapsto (L_X\tau)_p$ on sileä k-kovariantti tensorikenttä.

Theorem 5.28. *Olkoot $X, Y \in \mathcal{T}(M)$, $f \in C^\infty(M)$, σ ja τ sileitä kovariantteja tensorikenttiä sekä ω ja η sileitä differentiaalimuotoja. Silloin*

(a) $L_X f = Xf$.

(b) $d\big(L_X\omega\big) = L_X(d\omega)$.

(c) $L_X(f\sigma) = (L_X f)\sigma + fL_X\sigma$.

(d) $L_X(\sigma \otimes \tau) = (L_X\sigma) \otimes \tau + \sigma \otimes (L_X\tau)$.

(e) $L_X(\omega \wedge \eta) = (L_X\omega) \wedge \eta + \omega \wedge (L_X\eta)$.

(f) $L_X(i_Y\omega) = i_{(L_X Y)}\omega + i_Y(L_X\omega)$.

(g) Jos $\sigma \in \mathcal{T}^k(M)$ *ja* $Y_1, \dots, Y_k \in \mathcal{T}(M)$, *niin*

$$\begin{aligned} L_X\big(\sigma(Y_1, \dots, Y_k)\big) = \big(L_X\sigma\big)(Y_1, \dots, Y_k) + \sigma(L_X Y_1, Y_2, \dots, Y_k) + \\ \dots + \sigma(Y_1, \dots, Y_{k-1}, L_X Y_k). \end{aligned}$$

Todistus. Todistetaan joitain kohtia.
(b): Koska ulkoinen derivaatta d on lineaarinen, saadaan Lauseen 5.20 nojalla

$$\begin{aligned} d\big(L_X\omega\big) &= d\big(\lim_{t\to 0} \frac{1}{t}\big(\theta_t^*\omega - \omega\big)\big) \\ &= \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}\left(d\big(\theta_t^*\omega\big) - d\omega\right) \\ &= \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}\left(\theta_t^*(d\omega) - d\omega\right) \\ &= L_X(d\omega). \end{aligned}$$

Esimerkkinä osoitetaan vielä (c):
Olkoon $\sigma \in \mathcal{T}^k(M),\ f \in C^\infty(M), p \in M$ ja $v_1, \dots, v_k \in T_pM$. Tällöin

$$\begin{aligned} \left(L_X(f\sigma)\right)_p(v_1, \dots, v_k) &= \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}\Big(\big(\theta_t^*(f\sigma)\big)_p - (f\sigma)_p\Big)(v_1, \dots, v_k) \\ &= \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}\left((f\sigma)_{\theta(t,p)}\big(\theta^p_{t*}v_1, \dots, \theta^p_{t*}v_k\big) - (f\sigma)_p(v_1, \dots, v_k)\right) \\ &= \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}\left((f \circ \theta^p)(t)\sigma_{\theta(t,p)}\big(\theta^p_{t*}v_1, \dots, \theta^p_{t*}v_k\big) - (f \circ \theta^p)(0)\sigma_p(v_1, \dots, v_k)\right) \\ &= \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}\left(\varphi(t)\psi(t) - \varphi(0)\psi(0)\right) \\ &= \varphi(0)\psi'(0) + \varphi'(0)\psi(0), \end{aligned}$$

missä

$$\begin{aligned} &\varphi(t) = (f \circ \theta^p)(t), \quad \varphi(0) = f(p), \quad \varphi'(0) = X_pf, \\ &\psi(t) = \left(\theta_t^*\sigma\right)_p(v_1, \dots, v_k), \quad \psi(0) = \sigma_p(v_1, \dots, v_k), \text{ ja } \psi'(0) = \left(L_X\sigma\right)_p(v_1, \dots, v_k). \end{aligned}$$

Muut kohdat HT. □

Theorem 5.29 (Cartanin maaginen kaava)**.** *Olkoon* $X \in \mathcal{T}(M)$ *ja olkoon* $\omega \in \mathcal{A}^k(M)$. *Silloin*

$$L_X\omega = i_X d\omega + di_X\omega. \tag{5.30}$$

Todistus. Osoitetaan väite induktiolla k:n suhteen. Tapauksessa $k = 0$ saadaan Lauseista 5.27 (v) ja 5.28 (a), että

$$L_X f = Xf = i_X df.$$

[<u>Huom.</u> Sopimuksen mukaan $i_X f = 0$ sileille funktioille f.]
Todistetaan sitten (5.30) sileille 1-muodoille. Lineaarisuuden ja lokaalisuuden nojalla voidaan olettaa, että

$$\omega = u\,dv,$$

missä u ja v ovat sileitä funktioita. Nyt

$$L_X(u\,dv) = uL_X dv + (L_X u)dv = u\,d(L_X v) + (Xu)dv = ud(Xv) + (Xu)dv.$$

ja

$$\begin{aligned} i_X d(udv) + di_X(udv) &= i_X(du \wedge dv) + d\big(\overbrace{(i_X u)}^{=0} \wedge dv + ui_X dv\big) \\ &= (i_X du) \wedge dv - du \wedge (i_X dv) + d(uXv) \\ &= (Xu)dv - (Xv)du + ud(Xv) + (Xv)du \\ &= ud(Xv) + (Xu)dv. \end{aligned}$$

Siten (5.30) pätee, kun $k = 1$. Oletetaan, että (5.30) pätee kaikille sileille l-muodoille, missä $l < k$ ja $k > 1$. Olkoon $\omega \in \mathcal{A}^k(M)$ ja kirjoitetaan se lokaalisti muodossa

$$\omega = \sum_{i_1 < \cdots < i_k} \omega_{i_1 \cdots i_k} dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_k}.$$

Merkitään

$$\alpha_{i_1 \cdots i_k} = \omega_{i_1 \cdots i_k} dx^{i_1}$$

ja

$$\beta_{i_1 \cdots i_k} = dx^{i_2} \wedge \cdots \wedge dx^{i_k}.$$

Nyt nähdään, että ω voidaan kirjoittaa summana termeistä $\alpha \wedge \beta$, missä α on sileä 1-muoto ja β on sileä $(k-1)$-muoto. Riittää osoittaa kaava tällaiselle termille. Induktio-oletuksen ja Lauseen 5.28 (e) mukaan (5.30):n vasen puoli on

$$\begin{aligned} L_X(\alpha \wedge \beta) &= (L_X \alpha) \wedge \beta + \alpha \wedge (L_X \beta) \\ &= \big(i_X d\alpha + di_X \alpha\big) \wedge \beta + \alpha \wedge \big(i_X d\beta + di_X \beta\big). \end{aligned}$$

Lisäksi sekä d että i_X ovat $\wedge$-antiderivaatioita, joten (5.30):n oikea puoli on

$$\begin{aligned} i_X d(\alpha \wedge \beta) + di_X(\alpha \wedge \beta) &= i_X\big(d\alpha \wedge \beta - \alpha \wedge d\beta\big) + d\big((i_X \alpha) \wedge \beta - \alpha \wedge i_X \beta\big) \\ &= (i_X d\alpha) \wedge \beta + d\alpha \wedge i_X \beta - (i_X \alpha) \wedge d\beta + \alpha \wedge i_X d\beta \\ &\quad + (di_X \alpha) \wedge \beta + i_X \alpha \wedge d\beta - d\alpha \wedge i_X \beta + \alpha \wedge di_X \beta \\ &= \big(i_X d\alpha + di_X \alpha\big) \wedge \beta + \alpha \wedge \big(i_X d\beta + di_X \beta\big) \\ &= L_X(\alpha \wedge \beta). \end{aligned}$$

□

6 Differentiaalimuotojen integrointi

Olkoon $U \subset M$ avoin ja olkoon ω differentiaalimuoto U:ssa. Määritellään ω:n *kantaja*

$$\operatorname{supp}\omega = U \cap \overline{\{p \in U \colon \omega_p \neq 0\}}.$$

Olkoon sitten $U \subset \mathbb{R}^n$ avoin ja ω jatkuva kompaktikantajainen differentiaali n-muoto U:ssa, ts. $\operatorname{supp} \subset U$ on kompakti. Tällöin

$$\omega = u(x)dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n, \quad x = (x^1, \ldots, x^n) \in \mathbb{R}^n,$$

missä $u \colon U \to \mathbb{R}$ on jatkuva ja kompaktikantajainen (eli $u \in C_0(U)$). Määritellään

$$\int_U \omega = \int_{\mathbb{R}^n} \omega = \int_{\mathbb{R}^n} u(x)dx,$$

missä oikealla puolella on Riemann-integraali. [Itseasiassa riittää olettaa, että u on Lebesgue-integroituva $\mathbb{R}^n$:n yli, jolloin oikealla puolella on Lebesguen integraali.] Olkoon sitten $f \colon W \to U$ diffeomorfismi, missä $W \subset \mathbb{R}^n$ on avoin. Oletetaan U ja W yhtenäisiksi. Nyt "muuttujanvaihtokaavan" (5.15) nojalla

$$f^*\omega = (\det Df)(u \circ f)dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n.$$

Käyttämällä muuttujanvaihtoa Riemannin (Lebesguen) integraalissa saadaan edelleen

$$\int_{\mathbb{R}^n} f^*\omega = \int_W f^*\omega = \int_W (u \circ f)(x) \det Df(x)dx = \pm \int_U u(y)dy = \pm \int_{\mathbb{R}^n} \omega, \tag{6.1}$$

missä merkkinä on $\det Df$:n merkki. [Huom. $\det Df$:n merkki ei voi vaihtua U:ssa, sillä f on diffeomorfismi ($\det Df \neq 0$) ja U on yhtenäinen.]

Oletetaan sitten, että M on *suunnistettu* differentioituva n-monisto. Olkoon $\{(U_\alpha, x_\alpha)\}$ suunnistus, toisin sanoen, sileä kartasto siten, että jokaisella indeksillä α ja β, joilla $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$, kuvauksen $x_\beta \circ x_\alpha^{-1}$ Jacobin determinantti on positiivinen jokaisessa pisteessä $q \in x_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta)$:

$$\det\bigl(x_\beta \circ x_\alpha^{-1}\bigr)'(q) > 0, \quad \forall q \in x_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta).$$

Olkoon (U, φ), $\varphi \colon U \to W \subset \mathbb{R}^n$, jokin kartta M:n suunnistuksessa. Oletetaan, että ω on jatkuva differentiaali n-muoto, jonka kantaja $\operatorname{supp}\omega \subset U$ on kompakti. Silloin $(\varphi^{-1})^*\omega$ on jatkuva kompaktikantajainen differentiaali n-muoto W:ssä. Asetetaan

$$\int_M \omega = \int_{\mathbb{R}^n} (\varphi^{-1})^*\omega. \tag{6.2}$$

Olkoon (V, ψ), $\psi \colon V \to \tilde{W}$, toinen kartta M:n suunnistuksessa s.e. $\operatorname{supp}\omega \subset V$. Tällöin $\operatorname{supp}\omega \subset U \cap V$, joten voimme merkintöjen yksinkertaistamiseksi olettaa, että $U = V$. Nyt $f = \psi \circ \varphi^{-1} \colon W \to \tilde{W}$ on diffeomorfismi, jonka Jacobin determinantti on positiivinen jokaisessa W:n pisteessä. Koska $\varphi^{-1} = \psi^{-1} \circ f$, niin $(\varphi^{-1})^* = f^* \circ (\psi^{-1})^*$, joten (6.1):n mukaan

$$\int_{\mathbb{R}^n} (\varphi^{-1})^*\omega = \int_{\mathbb{R}^n} f^* \circ (\psi^{-1})^*\omega = \int_{\mathbb{R}^n} f^*\bigl((\psi^{-1})^*\omega\bigr) = \int_{\mathbb{R}^n} (\psi^{-1})^*\omega.$$

Siten määritelmä (6.2) on riippumaton kartan valinnasta.

Haluamme seuraavaksi määritellä mielivaltaisen jatkuvan kompaktikantajaisen differentiaalimuodon integraalin M:n yli. Muun muassa tätä varten tarvitaan sileää ykkösen ositusta.

6.3 Sileä ykkösen ositus

Olkoon X topologinen avaruus. Sanomme, että kokoelma $\mathcal{U} \subset \mathcal{P}(X)$ on *lokaalisti äärellinen,* jos jokaisella X:n pisteellä on ympäristö, joka leikkaa epätyhjästi korkeintaan äärellisen monta $\mathcal{U}$:n alkiota.

Definition 6.4 (Ykkösen ositus)**.** Olkoon X topologinen avaruus ja $\mathcal{F} = \{U_\alpha \colon \alpha \in \mathcal{A}\}$ X:n avoin peite. Kokoelma $\{\psi_i \colon i \in I\}$ jatkuvia funktioita $\psi_i \colon X \to \mathbb{R}$ on $\mathcal{F}$:n alistama *ykkösen ositus,* jos

(a) $0 \le \psi_i(x) \le 1$ kaikilla $i \in I$ ja $x \in X$,

(b) $\forall i \in I\ \exists \alpha \in \mathcal{A}$ s.e. $\operatorname{supp} \psi_i \subset U_\alpha$,

(c) $\{\operatorname{supp} \psi_i\}_{i \in I}$ on lokaalisti äärellinen,

(d) $\sum_{i \in I} \psi_i(x) = 1$ kaikilla $x \in X$.

Indeksijoukko I voi olla mikä tahansa eikä sen tarvitse olla numeroituva. Ehdon (c) nojalla jokaisella $y \in X$ on ympäristö, jonka pisteissä summassa (d) on vain äärellisen monta nollasta poikkeavaa termiä. Näin ollen summan suppenemisessa ei ole ongelmia. Jos M on sileä monisto, niin $\{\psi_i\}$ on sileä ykkösen ositus, jos lisäksi jokainen ψ_i on sileä.

Olkoon $\mathcal{U}$ X:n avoin peite. Sanomme, että avoin peite $\mathcal{V}$ on $\mathcal{U}$:n *hienonnus,* jos jokaista $V \in \mathcal{V}$ kohti on olemassa $U \in \mathcal{U}$ siten, että $V \subset U$. Topologinen avaruus X on *parakompakti,* jos X on Hausdorff ja jokaisella X:n avoimella peitteellä on lokaalisti äärellinen hienonnus.

Lemma 6.5. *Jokaisella topologisella monistolla on numeroituva, lokaalisti äärellinen avoin peite $\{V_j\}_{j \in \mathbb{N}}$, joka koostuu prekompakteista joukoista. Lisäksi joukot V_j voidaan valita niin, että $i \in \{j-1, j, j+1\}$, jos $V_j \cap V_i \neq \emptyset$.*

Todistus. Olkoon M topologinen monisto ja $\{B_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ numeroituva peite, jossa jokainen B_j on prekompakti (ks. Lause 0.20). Osoitetaan seuraavaksi, että M:llä on numeroituva peite $\{U_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ s.e. kaikilla $j \in \mathbb{N}$

(a) U_j on avoin ja prekompakti,

(b) $\bar{U}_j \subset U_{j+1}$,

(c) $B_j \subset U_j$.

Merkitään $U_1 = B_1$. Oletetaan, että on olemassa joukot $U_j,\ j = 1, \ldots, k$, joille pätee (a)–(c). Koska $\bar{U}_k$ on kompakti ja $\{B_j\}$ on M:n avoin peite, niin on olemassa $m_k \in \mathbb{N}$ s.e.

$$\bar{U}_k \subset B_1 \cup B_2 \cup \cdots \cup B_{m_k}.$$

Asetetaan $U_{k+1} = B_1 \cup B_2 \cup \cdots \cup B_{m_k}$, jolloin (a) ja (b) pätevät myös indeksillä $j = k+1$. Kasvattamalla m_k:ta tarvittaessa voidaan olettaa, että $m_k \ge k+1$, jolloin $B_{k+1} \subset U_{k+1}$ eli (c) pätee indeksillä $j = k+1$. Olemme todistaneet induktiolla, että on olemassa numeroituva perhe $\{U_j\}_{j \in \mathbb{N}}$, jolle pätee (a)–(c). Lisäksi ehdosta (c) seuraa, että $\{U_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ on M:n peite, sillä $\{B_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ on M:n peite. Muodostetaan lopuksi numeroituva, lokaalisti äärellinen avoin peite prekompakteja joukkoja $\{V_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ asettamalla $V_1 = U_3$ ja $V_j = U_{j+2} \setminus \bar{U}_j$, kun $j \ge 2$. Tällöin jokainen $\bar{V}_j$ on kompakti, sillä se on kompaktin joukon $\bar{U}_{j+2}$ suljettu osajoukko. Kun $p \in M$, niin olkoon k pienin positiivinen kokonaisluku, jolla $p \in U_{k+2}$. Silloin $p \in V_k$ ja V_k leikkaa vain joukkoja V_{k-1}, V_k ja V_{k+1}. Näin ollen $\{V_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ on lokaalisti äärellinen. $\square$

Theorem 6.6. *Olkoon M sileä n-monisto. Silloin jokaisella M:n avoimella peitteellä on olemassa numeroituva, lokaalisti äärellinen hienonnus $\{W_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ siten, että*

(i) on olemassa diffeomorfismit $\varphi_i\colon W_i \to B^n(0,3) \subset \mathbb{R}^n$ ja

(ii) joukot $U_i = \varphi_i^{-1}B^n(0,1)$ muodostavat M:n peitteen.

Erityisesti M on parakompakti.

Todistus. Olkoon $\mathcal{X}$ mikä tahansa M:n avoin peite ja olkoon $\{V_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ Lemman 6.5 antama numeroituva, lokaalisti äärellinen M:n avoin peite prekompakteja joukkoja. Jokaisella $p\in M$ olkoon

$$W'_p = \bigcap_{V_j \ni p} V_j.$$

Koska $\mathcal{X}$ on M:n avoin peite, niin $p\in X_p$ jollakin $X_p \in \mathcal{X}$. Merkitään $W''_p = W'_p \cap X_p$, jolloin jokainen $W''_p \subset X$ jollakin $X\in\mathcal{X}$. Olkoon (U,φ) kartta p:ssä siten, että $\varphi(p)=0$. Voidaan olettaa, että $B^n(0,3)\subset\varphi(U\cap W''_p)$. Merkitään $W_p=\varphi^{-1}B^n(0,3)$ ja $U_p=\varphi^{-1}B^n(0,1)$. Perhe $\{U_p\colon p\in\bar V_k\}$ on $\bar V_k$:n avoin peite jokaisella k. Koska $\bar V_k$ on kompakti, se voidaan peittää äärellisen monella tämän perheen joukolla $U_k^1,\dots,U_k^{m_k}$. Olkoot $(W_k^1,\varphi_k^1),\dots,(W_k^{m_k},\varphi_k^{m_k})$ vastaavat kartat. Tällöin perhe $\{W_k^i\colon k\in\mathbb{N}, i\in\{1,\dots,m_k\}\}$ on numeroituva M:n avoin peite, joka on $\mathcal{X}$:n hienonnus ja toteuttaa ehdot (i) ja (ii). Osoitetaan lopuksi, että $\{W_k^i\}_{k,i}$ on lokaalisti äärellinen. Riittää osoittaa, että jokainen W_k^i leikkaa korkeintaan äärellisen monen $W_{k'}^{i'}$:n kanssa. Tehdään vastaoletus, että on olemassa indeksit k_0 ja i_0 siten, että $W_{k_0}^{i_0}\cap W_k^i\neq\emptyset$ äärettömän monella W_k^i. Koska jokaista k kohti on olemassa vain m_k joukkoa W_k^i, on oltava äärettömän monta indeksiä k s.e. $W_{k_0}^{i_0}\cap W_k^i\neq\emptyset$. Konstruktion perusteella $W_{k_0}^{i_0}\subset V_{j_0}$ jollakin j_0 ja jokainen $W_k^i\subset V_j$ jollakin j, joten on olemassa V_j, joka sisältää joukon W_k^i äärettömän monella k. Toisaalta $W_k^i\cap V_k\neq\emptyset$, joten V_j leikkaa äärettömän monen V_k:n kanssa. Tämä johtaa ristiriitaan, sillä jokainen V_j voi leikata (itsensä lisäksi) vain joukkoja V_{j-1} ja V_{j+1}. □

Theorem 6.7. *Olkoon M sileä monisto ja $\mathcal{U}=\{U_\alpha\colon \alpha\in\mathcal{A}\}$ mikä tahansa M:n avoin peite. Silloin on olemassa $\mathcal{U}$:n alistama sileä ykkösen ositus $\{\psi_i\colon i\in\mathbb{N}\}$.*

Todistus. Olkoon $\mathcal{U}=\{U_\alpha\colon\alpha\in\mathcal{A}\}$ M:n avoin peite ja $\{W_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ sen lokaalisti äärellinen hienonnus siten, että ehdot (i) ja (ii) (Lause 6.6) pätevät. Olkoon $f_i\colon M\to\mathbb{R}$ sileä funktio siten, että $0\le f_i\le 1$, $f_i\equiv 1$ joukossa U_i ja $\operatorname{supp} f_i\subset W_i$ (ks. todistuksen loppuosa). Määritellään funktiot $\psi_i\colon M\to\mathbb{R}$,

$$\psi_i=\frac{f_i}{\sum_j f_j}.$$

Koska $\{W_i\}$ on lokaalisti äärellinen, on jokaisella M:n pisteellä ympäristö, jossa nimittäjässä olevassa summassa on vain äärellisen monta nollasta poikkeavaa termiä. Lisäksi $\sum_j f_j(x)\ge 1$ kaikilla x, sillä $\{U_i\}$ on M:n peite. Näin ollen $\psi_i\in C^\infty(M)$, $0\le\psi_i\le 1$, $\operatorname{supp}\psi_i\subset W_i$ ja $\sum_i\psi_i(x)=1$ kaikilla $x\in M$. Osoitetaan lopuksi funktioiden f_i olemassaolo. Todetaan ensin, että funktiot $f\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$,

$$f(t)=\begin{cases} e^{-1/t}, & t>0,\\ 0, & t\le 0,\end{cases}$$

ja $h\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$,

$$h(t)=\frac{f(2-t)}{f(2-t)+f(t-1)},$$

ovat sileitä (HT). Lisäksi $h(t) = 1\ \forall t \le 1$, $h(t) = 0\ \forall t \ge 2$ ja $0 \le h(t) \le 1\ \forall t \in \mathbb{R}$. Tällöin funktio $H\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $H(x) = h(|x|)$, on sileä, $0 \le H(x) \le 1\ \forall x \in \mathbb{R}^n$, $H(x) = 1\ \forall x \in \bar{B}^n(0,1)$ ja $\operatorname{supp} H \subset \bar{B}^n(0,2)$. Määritellään lopuksi funktiot $f_i\colon M \to \mathbb{R}$ asettamalla

$$f_i(p) = \begin{cases} H(\varphi_i(p)), & p \in W_i, \\ 0, & p \in M \setminus \bar{W}_i. \end{cases}$$

□

6.8 Differentiaali n-muodon integraali

Olkoon M suunnistettu ja olkoon ω mikä tahansa jatkuva kompaktikantajainen differentiaali n-muoto M:ssä. Olkoon edelleen $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}$ M:n suunnistus ja $\{f_i\colon i \in I\}$ $\mathcal{U}$:n alistama sileä ykkösen ositus.

Määritellään

$$\int_M \omega = \sum_{i \in I} \int_M f_i \omega.$$

Summassa on vain äärellinen määrä termejä, sillä $\operatorname{supp} \omega$ on kompakti ja $\{\operatorname{supp} f_i\}$ on lokaalisti äärellinen. Osoitetaan, että määritelmä on riippumaton kartaston ja sen alistaman ykkösen osituksen valinnoista, jos kartastot määräävät *saman* suunnistuksen. Olkoon $\mathcal{V} = \{V_\beta\}$ jokin toinen kartasto, joka määrää saman suunnistuksen kuin $\{U_\alpha\}$ ja olkoon $\{g_j\colon j \in J\}$ $\mathcal{V}$:n alistama sileä ykkösen ositus. Silloin

$$f_i = f_i \sum_{j \in J} g_j = \sum_j f_i g_j,$$

joten

$$\int_M f_i \omega = \sum_j \int_M f_i g_j \omega$$

ja edelleen

$$\begin{aligned} \int_M \omega = \sum_i \int_M f_i \omega &= \sum_i \sum_j \int_M f_i g_j \omega \\ &= \sum_j \sum_i \int_M f_i g_j \omega = \sum_j \int_M g_j \omega, \end{aligned}$$

niin kuin pitääkin. On tärkeää huomata, että edellä

$$\int_M f_i g_j \omega$$

liittyy kartastoon $\{U_\alpha\}$ ensimmäisellä rivillä ja kartastoon $\{V_\beta\}$ toisella rivillä esiintyessään. Kyseiset integraalit ovat samat, koska molemmat kartastot määrävät saman suunnistuksen.

Muuttujanvaihtokaava yleistyy seuraavasti: Olkoot M^n ja N^n sileitä suunnistettuja monistoja ja $f\colon M \to N$ suunnansäilyttävä diffeomorfismi. Jos ω on mikä tahansa jatkuva kompaktikantajainen differentiaali n-muoto N:llä, niin

$$\int_M f^* \omega = \int_N \omega.$$

Kaikki yllämainittu pätee mielivaltaisille Lebesguen integroituville (kompaktikantajaisille) differentiaali n-muodoille.

7 Stokesin lause

Tässä luvussa esitämme ja todistamme Stokesin lauseen. Siihen tarvitsemme reunallisen moniston käsitteen ja lisätietoja suunnistuksesta.

7.1 Suunnistuksesta

Seuraavaa karakterisaatiota käytetään usein suunnistuvuuden määritelmänä.

Theorem 7.2. *Sileä n-monisto M on suunnistuva, jos ja vain jos on olemassa sileä differentiaali n-muoto (ns. suunnistava muoto) $\omega \in \mathcal{A}^n(M)$, joka ei häviä missään M:n pisteessä (ts. jokaisella $p \in M$ on olemassa vektorit $v_1, \ldots, v_n \in T_pM$ s.e. $\omega_p(v_1, \ldots, v_n) \neq 0$).*

Todistus. Oletetaan ensin, että M on suunnistuva ja olkoon $\{(U_\alpha, x_\alpha)\}$ suunnistus. Jokaisella α määritellään U_α:ssa sileä n-muoto

$$\omega^\alpha = dx_\alpha^1 \wedge dx_\alpha^2 \wedge \cdots \wedge dx_\alpha^n.$$

Toisin sanoen, $\omega^\alpha = x_\alpha^*(dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n)$. Jos (U_β, x_β) on toinen kartta suunnistuksessa s.e. $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$, niin Lauseen 5.14 nojalla

$$\omega^\beta = \det D\big(x_\beta \circ x_\alpha^{-1}\big)\omega^\alpha. \tag{7.3}$$

Lisäksi funktio $p \mapsto \det D\big(x_\beta \circ x_\alpha^{-1}\big)(p)$ on positiivinen joukossa $U_\alpha \cap U_\beta$ suunnistuksen perusteella. Olkoon $\{\psi_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ peitteen $\{U_\alpha\}$ alistama sileä ykkösen ositus. Jokaisella $i \in \mathbb{N}$ valitaan α_i s.e. $\operatorname{supp} \psi_i \subset U_{\alpha_i}$. Määritellään sitten

$$\omega = \sum_{i \in \mathbb{N}} \psi_i \omega^{\alpha_i}.$$

Selvästi ω on sileä n-muoto. Osoitetaan, ettei se häviä missään M:n pisteessä. Kiinnitetään $p \in M$, jolloin $p \in U_{\alpha_j}$ jollakin j. Kaavan (7.3) mukaan

$$\omega_p^{\alpha_i} = a_i \omega_p^{\alpha_j},$$

missä luvut a_i ovat ei-negatiivisia ja $a_i > 0$, jos $p \in U_{\alpha_i}$. Olkoot $\partial_1, \ldots, \partial_n$ karttaa $(U_{\alpha_j}, x_{\alpha_j})$ vastaavat koordinaattivektorikentät, jolloin U_{α_j}:ssä

$$\omega^{\alpha_j}(\partial_1, \ldots, \partial_n) \equiv 1.$$

Koska $\sum_i \psi_i(p) = 1$, on olemassa $k \in \mathbb{N}$ s.e. $\psi_k(p) > 0$. Silloin $p \in \operatorname{supp} \psi_k \subset U_{\alpha_k}$, joten $a_k > 0$ ja

$$\begin{aligned}
\omega_p(\partial_1, \ldots, \partial_n) &= \sum_i \psi_i(p) \omega_p^{\alpha_i}(\partial_1, \ldots, \partial_n) \\
&= \sum_i \psi_i(p) a_i \omega_p^{\alpha_j}(\partial_1, \ldots, \partial_n) \\
&= \sum_i \psi_i(p) a_i \geq \psi_k(p) a_k > 0.
\end{aligned}$$

Oletetaan sitten, että on olemassa $\omega \in \mathcal{A}^n(M)$ s.e. $\omega_p \neq 0$ $\forall p \in M$. Olkoon $\{(U_\alpha, x_\alpha)\}$ kartasto. Voidaan oletta, että jokainen $U\alpha$ on yhtenäinen (tarvittaessa korvataan U_α komponenteillaan ja indeksöidään peite uudelleen). Tällöin

$$\omega | U_\alpha = \omega_\alpha dx_\alpha^1 \wedge \cdots \wedge dx_\alpha^n,$$

missä ω_α on sileä funktio, joka ei häviä missään U_α:n pisteessä eikä vaihda merkkiä. Vaihtamalla tarvittaessa karttakuvauksen x_α jonkin koordinaattifunktion (esim. x_α^1) merkki voidaan olettaa, että $\omega_\alpha > 0$ U_α:ssa $\forall\alpha$. Olkoot sitten (U_α, x_α) ja (U_β, x_β) karttoja siten, että $U_\alpha \cap U_\beta = W \neq \emptyset$. Tällöin

$$(x_\alpha^{-1})^*\omega = (\omega_\alpha \circ x_\alpha^{-1})dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n$$

joukossa $x_\alpha W$ ja

$$(x_\beta^{-1})^*\omega = (\omega_\beta \circ x_\beta^{-1})dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n$$

joukossa $x_\beta W$. Toisaalta $x_\alpha W$:ssä

$$(x_\alpha^{-1})^*\omega = \big(x_\beta^{-1} \circ (x_\beta \circ x_\alpha^{-1})\big)^*\omega = (x_\beta \circ x_\alpha^{-1})^*\big((x_\beta^{-1})^*\omega\big),$$

joten

$$\begin{aligned}(\omega_\alpha \circ x_\alpha^{-1})dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n &= (x_\beta \circ x_\alpha^{-1})^*\big((x_\beta^{-1})^*\omega\big)\\ &= (x_\beta \circ x_\alpha^{-1})^*\big((\omega_\beta \circ x_\beta^{-1})dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n\big)\\ &= (\omega_\beta \circ x_\beta^{-1}) \circ (x_\beta \circ x_\alpha^{-1}) \det(x_\beta \circ x_\alpha^{-1})' dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n\end{aligned}$$

Lauseen 5.14 nojalla. Tästä seuraa, että

$$\det(x_\beta \circ x_\alpha^{-1})'(q) > 0$$

kaikilla $q \in x_\alpha W$, sillä sekä $\omega_\alpha \circ x_\alpha^{-1}$ että $(\omega_\beta \circ x_\beta^{-1}) \circ (x_\beta \circ x_\alpha^{-1})$ ovat positiivisia funktioita $x_\alpha W$:ssä. □

Olkoon M sileä monisto ja $S \subset M$ sileä alimonisto. Sanomme, että kuvaus $V\colon S \to TM$ on *vektorikenttä pitkin S:ää,* jos $V_p \in T_pM$ kaikilla $p \in S$. Jos S on kodimensiota 1 oleva alimonisto (eli *hyperpinta*), niin vektoria $v \in T_pM$, $p \in S$, sanotaan *transversaaliseksi* S:n kanssa, jos v ja T_pS virittävät T_pM:n. Vastavasti vektorikenttä V pitkin S:ää on transversaalinen S:n kanssa, jos V_p on transversaalinen S:n kanssa kaikilla $p \in S$.

Theorem 7.4. *Olkoon M suunnistuva, $S \subset M$ hyperpinta ja V sileä transversaalinen vektorikenttä pitkin S:ää. Tällöin S on suunnistuva. Jos ω on suunnistava muoto M:llä, niin $(i_V\omega)|S$ on suunnistava muoto S:llä.*

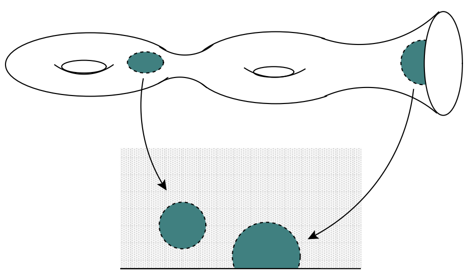
Todistus. (HT)

7.5 Reunalliset sileät monistot

Merkitään

$$\mathbb{H}^n = \{(x^1, \dots, x^n) \in \mathbb{R}^n \colon x^n > 0\} \quad \text{ja} \quad \bar{\mathbb{H}}^n = \{(x^1, \dots, x^n) \in \mathbb{R}^n \colon x^n \geq 0\}.$$

Topologinen avaruus M on *reunallinen* topologinen n-monisto, jos M on Hausdorff, N_2 ja jokaisella M:n pisteellä on ympäristö, joka on homeomorfinen jonkin $\bar{\mathbb{H}}^n$:n (relatiivitopologiassa) avoimen osajoukon kanssa.



Pistettä $p \in M$ kutsutaan M:n reunapisteeksi, jos on olemassa kartta (U, x), $x = (x^1, \ldots, x^n)\colon U \to \bar{\mathbb{H}}^n$, s.e. $x^n(p) = 0$. Reunapisteitten joukkoa merkitään ∂M:llä (tätä ei pidä sekoittaa topologisen reunan käsitteeseen).

Sileän reunallisen n-moniston määrittelemiseksi palautetaan mieliin, että kuvausta $f\colon A \to \mathbb{R}^m$, missä $A \subset \mathbb{R}^n$ on mielivaltainen, sanotaan sileäksi, jos jokaisella pisteellä $x \in A$ on ympäristö V ja sileä kuvaus $F\colon V \to \mathbb{R}^m$ s.e. $F|V \cap A = f|V \cap A$.

Olkoon $U \subset \bar{\mathbb{H}}^n$ avoin ja $f\colon U \to \mathbb{R}^m$ sileä. Oletetaan, että $U \cap \partial\mathbb{H}^n \neq \emptyset$. Määritellään seuraavaksi f:n osittaisderivaatat pisteessä $p \in U \cap \partial\mathbb{H}^n$. Olkoon V jokin p:n ympäristö ($\mathbb{R}^n$:ssä) ja $F\colon V \to \mathbb{R}^m$ sileä s.e. $F|V \cap U = f|V \cap U$. Tällöin F:llä on V:ssä jatkuvat kaikkien kertalukujen osittaisderivaatat

$$\frac{\partial^{|\alpha|} F_i}{\partial^\alpha x}, \quad i = 1, \ldots, m,$$

ja

$$\frac{\partial^{|\alpha|} F_i}{\partial^\alpha x} = \frac{\partial^{|\alpha|} f_i}{\partial^\alpha x}$$

joukossa $V \cap \operatorname{int} U$. Jatkuvuuden perusteella voimme määritellä f:n osittaisderivaatat p:ssä riippumatta F:n valinnasta asettamalla

$$\frac{\partial^{|\alpha|} f_i}{\partial^\alpha x}(p) = \frac{\partial^{|\alpha|} F_i}{\partial^\alpha x}(p).$$

Sileä reunallinen n-monisto voidaan nyt määritellä kuten ”reunattomassa” tapauksessa. Paria (U, φ) sanotaan kartaksi reunallisella n-monistolla M, jos $U \subset M$ on avoin ja $\varphi\colon U \to \varphi U \subset \bar{\mathbb{H}}^n$ on homeomorfismi (relatiivitopologiassa). Kartat (U, φ) ja (V, ψ) ovat C^∞-yhteensopivat, jos kuvaukset $\psi \circ \varphi^{-1}\colon \varphi(U \cap V) \to \psi(U \cap V)$ ja $\varphi \circ \psi^{-1}\colon \psi(U \cap V) \to \varphi(U \cap V)$ ovat sileitä. Sileä reunallinen n-monisto on pari $(M, \mathcal{A})$, missä M on reunallinen topologinen n-monisto ja $\mathcal{A}$ on M:n maksimaalinen C^∞-kartasto. Karttaa (U, φ) sanotaan *sisäkartaksi,* jos $\varphi U \subset \mathbb{H}^n$, muussa tapauksessa *reunakartaksi* (tällöin siis $\varphi U \cap \partial\mathbb{H}^n \neq \emptyset$). Kahden reunallisen (sileän) moniston välisen kuvauksen sileys määritellään lokaaleja esityksiä käyttäen. Tangenttivektorit ja tangenttiavaruus T_pM reunapisteessä $p \in \partial M$ sekä sileän kuvauksen tangenttikuvaus määritellään kuten ”reunattoman” moniston tapauksessa. Erityisesti T_pM on n-ulotteinen vektoriavaruus myös pisteille $p \in \partial M$.

Voidaan osoittaa, että ∂M on topologinen $(n-1)$-monisto, jolla on luonnollinen sileä struktuuri niin, että inkluusio $i\colon \partial M \hookrightarrow M$ on sileä upotus.

7.6 Stokesin lause

Stokesin lausetta varten tarvitsemme keinon liittää annettuun M:n suunnistukseen sopiva ∂M:n suunnistus. Olkoon M sileä reunallinen monisto ja ∂M sen reuna tulkittuna sileänä $(n-1)$-ulotteisena alimonistona. Sanomme, että vektori $v \in T_pM$, missä $p \in \partial M$, on *sisäänpäin osoittava,* jos $v \notin T_p\partial M$ ja on olemassa sileä polku $\gamma\colon [0, \varepsilon[\to M$ s.e. $\gamma(0) = p$ ja $\dot\gamma_0 = v$. Vastaavasti $v \in T_pM$ on *ulospäin osoittava,* jos $-v$ on sisäänpäin osoittava. Vektorikenttä V pitkin ∂M:ää on sisäänpäin (ulospäin) osoittava, jos V_p on sisäänpäin (ulospäin) osoittava jokaisessa pisteessä $p \in \partial M$.

Lemma 7.7. *Olkoon M sileä reunallinen monisto, $p \in \partial M$, (U, x), $x = (x^1, \ldots, x^n)\colon U \to \bar{\mathbb{H}}^n$, kartta p:ssä ja olkoot $\partial_1, \ldots, \partial_n$ vastaavat koordinaattivektorikentät U:ssa. Tällöin vektori $v = v^i(\partial_i)_p \in T_pM$ on sisäänpäin osoittava, jos ja vain jos $v^n > 0$.*

Todistus. (HT)
Ykkösen osituksella ∂M:ssä voidaan osoittaa seuraava olemassaolotulos.

Lemma 7.8. *Olkoon M sileä reunallinen monisto. Tällöin on olemassa sileä ulospäin osoittava vektorikenttä pitkin ∂M:ää.*

Todistus. Olkoon $\{(U_\alpha, x_\alpha)\}$ perhe M:n reunakarttoja s.e. $\partial M \subset \cup_\alpha U_\alpha$. Tällöin

$$V^\alpha = -\frac{\partial}{\partial x_\alpha^n}|\partial M \cap U_\alpha$$

on sileä ulospäin osoittava vektorikenttä pitkin $\partial M \cap U_\alpha$:aa jokaisella α. Olkoon $\{\psi_i\}$ $\{U_\alpha \cap \partial M\}$:n alistama sileä ykkösen ositus ∂M:llä. Jokaisella i valitaan α_i siten, että $\operatorname{supp}\psi_i \subset U_{\alpha_i} \cap \partial M$. Silloin

$$V = \sum_i \psi_i V^{\alpha_i}$$

on sileä vektorikenttä pitkin ∂M:ää. Osoitetaan vielä, että V on ulospäin osoittava. Olkoon $p \in \partial M$. Koska $\sum_i \psi_i(p) = 1$, on olemassa k s.e. $\psi_k(p) > 0$, jolloin $p \in U_{\alpha_k}$. Olkoot $\partial_1, \dots, \partial_n$ karttaa $(U_{\alpha_k}, x_{\alpha_k})$ vastaavat koordinaattivektorikentät U_{α_k}:ssa. Jokaisen vektorin $(\psi_i V^{\alpha_i})_p$ n:s komponentti kannassa $\{(\partial_1)_p, \dots, (\partial_n)_p\}$ (merk. $(\psi_i V^{\alpha_i})_p^n$) on ei-positiivinen ja lisäksi $(\psi_k V^{\alpha_k})_p^n = -\psi_k(p) < 0$. Tällöin V_p:n n:s komponentti, V_p^n, on negatiivinen:

$$V_p^n = \sum_i (\psi_i V^{\alpha_i})_p^n \le -\psi_k(p) < 0.$$

□

Oletetaan, että M on suunnistettu reunallinen n-monisto ja olkoon ω M:n suunnitukseen liittyvä suunnistava n-muoto (ks. Lause 7.2). Tarkemmin sanottuna: Olkoon $\{(U_\alpha, x_\alpha)\}$ M:n suunnistus ja ω suunnistava n-muoto s.e. jokaisessa U_α:ssa

$$\omega|U_\alpha = \omega_\alpha dx_\alpha^1 \wedge \cdots \wedge dx_\alpha^n,$$

missä ω_α on sileä *positiivinen* funktio. Olkoon edelleen V sileä ulospäin osoittava vektorikenttä pitkin ∂M:ää. Tällöin $(i_V\omega)|\partial M$ on suunnistava $(n-1)$-muoto ∂M:llä. Annetaan lopuksi ∂M:lle $(i_V\omega)|\partial M$:n määräämä suunnistus. Näin saatua ∂M:n suunnistusta sanotaan ∂M:n *indusoiduksi* (tai *Stokesin*) *suunnistukseksi*. Mikä tahansa alkuperäiseen suunnistukseen liittyvä suunnistava n-muoto ja sileä ulospäin osoittava vektorikenttä pitkin ∂M:ää tuottaa ∂M:ään saman suunnistuksen (HT).

Example 7.9. Olkoon $M = \bar{\mathbb{H}}^n$ ja olkoon

$$\omega = dx^1 \wedge dx^2 \wedge \cdots \wedge dx^n$$

$\mathbb{R}^n$:n (ja myös $\bar{\mathbb{H}}^n$:n) standardi suunnistava n-muoto. Samaistetaan $\partial\bar{\mathbb{H}}^n$ ja $\mathbb{R}^{n-1}$ samaistamalla pisteet $(x^1, \dots, x^{n-1}, 0) \in \partial\bar{\mathbb{H}}^n$ ja $(x^1, \dots, x^{n-1}) \in \mathbb{R}^{n-1}$. Vektorikenttä

$$V = -\frac{\partial}{\partial x^n}$$

rajoitettuna $\partial\bar{\mathbb{H}}^n$:ään on sileä ulospäin osoittava vektorikenttä pitkin $\partial\bar{\mathbb{H}}^n$:ää. Lasketaan $i_V\omega$ sisäisen kertomisen $\wedge$-antiderivaation (Lause 5.27 (iii)) avulla:

$$\begin{aligned}
i_V\omega &= i_V(dx^1\wedge dx^2\wedge\cdots\wedge dx^n)\\
&= (i_V dx^1)\wedge(dx^2\wedge\cdots\wedge dx^n) - dx^1\wedge i_V(dx^2\wedge\cdots\wedge dx^n)\\
&= dx^1(V)dx^2\wedge\cdots\wedge dx^n - dx^1\wedge(i_V dx^2)\wedge(dx^3\wedge\cdots\wedge dx^n) + dx^1\wedge dx^2\wedge i_V(dx^3\wedge\cdots\wedge dx^n)\\
&\ \vdots\\
&= \sum_{i=1}^n (-1)^{i-1}\underbrace{dx^i(V)}_{=-\delta^i_n} dx^1\wedge dx^2\wedge\cdots\wedge \hat{dx^i}\wedge\cdots\wedge dx^n\\
&= -(-1)^{n-1}dx^1\wedge dx^2\wedge\cdots\wedge dx^{n-1}\\
&= (-1)^n dx^1\wedge dx^2\wedge\cdots\wedge dx^{n-1}.
\end{aligned}$$

Havaitaan, että $(i_V\omega)|\partial\bar{\mathbb{H}}^n$ on $\mathbb{R}^{n-1}$:n standardi suunnistava $(n-1)$-muoto (ja siten $\partial\bar{\mathbb{H}}^n$:n indusoitu suunnistus on sama kuin $\mathbb{R}^{n-1}$:n standardi suunnistus), jos ja vain jos n on parillinen.

Theorem 7.10 (Stokesin lause)**.** *Olkoon M sileä, suunnistettu, reunallinen n-monisto ja olkoon ω sileä kompaktikantajainen $(n-1)$-muoto M:llä. Silloin*

$$\int_M d\omega = \int_{\partial M}\omega, \tag{7.11}$$

missä ∂M:llä on indusoitu suunnistus.

Todistus. (a) Todistetaan väite ensin tapauksessa $M=\bar{\mathbb{H}}^n$. Koska $\operatorname{supp}\omega$ on kompakti, on olemassa $R>0$ s.e. $\operatorname{supp}\omega\subset Q=[-R,R]\times\cdots\times[-R,R]\times[0,R]$. Voimme kirjoittaa ω:n muodossa

$$\omega=\sum_{i=1}^n \omega_i dx^1\wedge\cdots\wedge\hat{dx^i}\wedge\cdots\wedge dx^n,$$

jolloin

$$\begin{aligned}
d\omega &= \sum_{i=1}^n d\omega_i\wedge dx^1\wedge\cdots\wedge\hat{dx^i}\wedge\cdots\wedge dx^n\\
&= \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial\omega_i}{\partial x^j}\underbrace{dx^j\wedge dx^1\wedge\cdots\wedge\hat{dx^i}\wedge\cdots\wedge dx^n}_{=\delta^j_i dx^j\wedge dx^1\wedge\cdots\wedge\hat{dx^i}\wedge\cdots\wedge dx^n}\\
&= \sum_{i=1}^n \frac{\partial\omega_i}{\partial x^i}dx^i\wedge dx^1\wedge\cdots\wedge\hat{dx^i}\wedge\cdots\wedge dx^n\\
&= \sum_{i=1}^n (-1)^{i-1}\frac{\partial\omega_i}{\partial x^i}dx^1\wedge\cdots\wedge dx^n.
\end{aligned}$$

Tällöin

$$\begin{aligned}
\int_M d\omega &= \sum_{i=1}^n (-1)^{i-1}\int_Q \frac{\partial\omega_i}{\partial x^i}dx^1\wedge\cdots\wedge dx^n\\
&= \sum_{i=1}^n (-1)^{i-1}\int_Q \frac{\partial\omega_i}{\partial x^i}dm(x)\\
&= \sum_{i=1}^n (-1)^{i-1}\int_0^R\int_{-R}^R\cdots\int_{-R}^R \frac{\partial\omega_i}{\partial x^i}dx^1\cdots dx^n.
\end{aligned}$$

Vaihdetaan jokaisessa termissä integroimisjärjestystä niin, että integroidaan ensin x^i:n suhteen. Jos $i \neq n$, niin saadaan

$$\int_{-R}^{R} \frac{\partial \omega_i}{\partial x^i}(x^1, \dots, x^i, \dots, x^n) dx^i = \omega_i(x^1, \dots, R, \dots, x^n) - \omega_i(x^1, \dots, -R, \dots, x^n) = 0$$

kaikilla $(x^1, \dots, \hat{x}^i, \dots, x^n)$, sillä $\operatorname{supp} \omega_i \subset Q$. Siten

$$\sum_{i=1}^{n-1} (-1)^{i-1} \int_Q \frac{\partial \omega_i}{\partial x^i} dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n = 0$$

ja näin ollen

$$\begin{aligned}\int_M d\omega &= (-1)^{n-1} \int_Q \frac{\partial \omega_n}{\partial x^n} dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n \\ &= (-1)^{n-1} \int_{-R}^{R} \int_{-R}^{R} \cdots \int_0^R \frac{\partial \omega_n}{\partial x^n} dx^n dx^1 \cdots dx^{n-1}.\end{aligned}$$

Toisaalta

$$\int_0^R \frac{\partial \omega_n}{\partial x^n}(x^1, \dots, x^{n-1}, x^n) dx^n = -w_n(x^1, \dots, x^{n-1}, 0),$$

joten

$$\int_M d\omega = (-1)^n \int_{-R}^{R} \cdots \int_{-R}^{R} \omega_n(x^1, \dots, x^{n-1}, 0) dx^1 \cdots dx^{n-1}.$$

Integroidaan sitten ω yli $\partial \bar{\mathbb{H}}^n$:n käyttämällä $\partial \bar{\mathbb{H}}^n$:ssä $\mathbb{R}^{n-1}$:n standardia suunnistusta (ts. integroidaan ω yli $\mathbb{R}^{n-1} \times \{0\}$:n). Tällöin saadaan

$$\int_{\mathbb{R}^{n-1} \times \{0\}} \omega = \sum_{i=1}^{n} \int_{Q \cap \mathbb{R}^{n-1} \times \{0\}} \omega_i dx^1 \wedge \cdots \wedge \hat{dx}^i \wedge \cdots \wedge dx^n.$$

Nyt $dx^n | \mathbb{R}^{n-1} \times \{0\} = 0$, joten jäljelle jää vain yksi termi (kun $i = n$) eli

$$\int_{\mathbb{R}^{n-1} \times \{0\}} \omega = \int_{Q \cap \cap \mathbb{R}^{n-1} \times \{0\}} \omega_n dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^{n-1}.$$

Esimerkin 7.9 mukaan $\partial \bar{\mathbb{H}}^n$:n (eli ∂M:n) indusoitu suunnistus on sama kuin $\mathbb{R}^{n-1}$:n standardi suunnistus, jos ja vain jos n on parillinen. Siten indusoidun suunnistuksen suhteen integroituna

$$\int_{\partial M} \omega = (-1)^n \int_{Q \cap \partial M} \omega_n dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^{n-1} = \int_M d\omega,$$

kuten pitääkin.

(b) Olkoon sitten M mielivaltainen suunnistettu sileä reunallinen n-monisto. Oletetaan ensin, että ω on sileä kompaktikantajainen $(n-1)$-muoto s.e. $\operatorname{supp} \omega \subset U$ jollakin M:n suunnistukseen kuuluvalla kartalla (U, φ). Silloin

$$\int_M d\omega = \int_{\bar{\mathbb{H}}^n} (\varphi^{-1})^* d\omega = \int_{\bar{\mathbb{H}}^n} d\big((\varphi^{-1})^* \omega\big).$$

Edellä todistetun mukaan

$$\int_{\bar{\mathbb{H}}^n} d\big((\varphi^{-1})^* \omega\big) = \int_{\partial \bar{\mathbb{H}}^n} (\varphi^{-1})^* \omega,$$

kun $\partial\bar{\mathbb{H}}^n$:ssä on indusoitu suunnistus. Koska φ on suunnansäilyttävä diffeomorfismi ((U,φ) kuuluu M:n suunnistukseen) ja φ_* kuvaa $\partial M \cap U$:n ulospäin osoittavat vektorit $\partial\bar{\mathbb{H}}^n$:n ulospäin osoittaviksi vektoreiksi, on $\varphi|\partial M \cap U$ suunnansäilyttävä diffeomorfismi kuvalleen $\varphi U \cap \partial\bar{\mathbb{H}}^n$. Siten

$$\int_{\partial\bar{\mathbb{H}}^n} (\varphi^{-1})^*\omega = \int_{\partial M} \omega.$$

(c) Olkoon lopuksi ω mikä tahansa sileä kompaktikantajainen $(n-1)$-muoto M:llä. Olkoon $\{(U_\alpha, x_\alpha)\}$ M:n suunnistus ja olkoon $\{\psi_i\}$ $\{U_\alpha\}$:n alistama sileä ykkösen ositus. Käyttämällä edellä todistettua muotoihin $\psi_i\omega$ saadaan

$$\begin{aligned}
\int_{\partial M} \omega &= \sum_i \int_{\partial M} \psi_i\omega = \sum_i \int_M d(\psi_i\omega) \\
&= \sum_i \int_M \big(d\psi_i \wedge \omega + \psi_i d\omega\big) \\
&= \int_M d\big(\sum_i \psi_i\big) \wedge \omega + \int_M \big(\sum_i \psi_i\big) d\omega \\
&= \int_M d\omega,
\end{aligned}$$

sillä $\sum_i \psi_i \equiv 1$ ja siten $d\big(\sum_i \psi_i\big) \equiv 0$. □

Corollary 7.12. *Olkoon M sileä, kompakti, suunnistettu, reunaton (so. $\partial M = \emptyset$) n-monisto. Silloin jokaisen eksaktin n-muodon integraali yli M:n häviää:*

$$\int_M d\omega = 0 \quad \forall \omega \in \mathcal{A}^{n-1}(M).$$

Corollary 7.13. *Olkoon M sileä, kompakti, suunnistettu, reunallinen n-monisto. Jos $\omega \in \mathcal{A}^{n-1}(M)$ on suljettu, niin ω:n integraali yli ∂M:n häviää:*

$$\int_{\partial M} \omega = 0, \quad \textit{jos } d\omega = 0.$$

Vektorikentän X *divergenssi* suunnistavan n-muodon ω suhteen on funktio $\operatorname{Div}_\omega X \colon M \to \mathbb{R}$ s.e. $(\operatorname{Div}_\omega X)\omega = L_X\omega$.

Corollary 7.14 (Divergenssi kaava, Gaussin kaava)**.** *Olkoon M sileä, suunnistettu, reunallinen n-monisto ja olkoon ω suunnistava n-muoto M:llä (ns. tilavuusmuoto). Silloin jokaisella kompaktikantajaisella vektorikenttällä $X \in \mathcal{T}(M)$*

$$\int_M (\operatorname{Div}_\omega X)\omega = \int_{\partial M} i_X\omega.$$

Corollary 7.15 (Osittaisintegrointi)**.** *Olkoon M sileä, kompakti, suunnistettu, reunallinen n-monisto, $X \in \mathcal{T}(M)$, $\alpha \in \mathcal{A}^k(M)$ ja $\beta \in \mathcal{A}^{n-k}(M)$, $0 \le k \le n$. Silloin*

$$\int_M (L_X\alpha) \wedge \beta = \int_{\partial M} i_X(\alpha \wedge \beta) - \int_M \alpha \wedge (L_X\beta).$$

7.16 Lyhyesti de Rhamin kohomologiasta

Valitettavasti emme voi ajan puutteen takia käsitellä de Rhamin kohomologiaa kuin lyhyesti. Tässä kappaleessa esitellään joitain asiaan liittyviä tuloksia pääosin ilman todistuksia.

Palautetaan mieliin määritelmät:

$$\begin{aligned}\mathcal{Z}^p(M) &= \operatorname{Ker}[d\colon \mathcal{A}^p(M) \to \mathcal{A}^{p+1}(M)] \\ &= \{\text{suljetut } p\text{-muodot } M\text{:llä}\}, \\ \mathcal{B}^p(M) &= \operatorname{Im}[d\colon \mathcal{A}^{p-1}(M) \to \mathcal{A}^p(M)] \\ &= \{\text{eksaktit } p\text{-muodot } M\text{:llä}\}.\end{aligned}$$

Vektoriavaruutta (tekijäavaruutta)

$$H^p_{dR}(M) = \frac{\mathcal{Z}^p(M)}{\mathcal{B}^p(M)}$$

sanotaan M:n p:nneksi *de Rhamin kohomologiaryhmäksi.* Sen alkioina ovat suljettujen p-muotojen ekvivalenssiluokat $[\omega]$. (Suljettu muoto $\omega' \in [\omega]$, jos $\omega' - \omega$ on eksakti.)

Koska sopimuksemme mukaan $\mathcal{A}^p(M) = 0$ (= triviaalivektoriavaruus), jos $p < 0$ tai $p > \dim M$, niin $H^p_{dR}(M) = 0$ näillä p:n arvoilla.

Theorem 7.17. *Olkoon M yhtenäinen sileä monisto. Silloin* $H^0_{dR}(M) = \mathcal{Z}^0(M) = \{f\colon M \to \mathbb{R} \mid f \text{ vakio}\}$. *Erityisesti* $\dim H^0_{dR}(M) = 1$.

Todistus. Koska $\mathcal{B}^0(M) = 0$, on $H^0_{dR}(M) = \mathcal{Z}^0(M) = \{f\colon M \to \mathbb{R} \mid df = 0\}$. Koska M on yhtenäinen, on edelleen $\{f\colon M \to \mathbb{R} \mid df = 0\} = \{f\colon M \to \mathbb{R} \mid f \text{ vakio}\}$. □

Olkoon $f^*\colon \mathcal{A}^p(N) \to \mathcal{A}^p(M)$ sileän kuvauksen $f\colon M \to N$ pull-back. Koska f^* ja d kommutoivat (L. 5.20), niin

$$f^*\mathcal{Z}^p(N) \subset \mathcal{Z}^p(M) \quad \text{ja} \quad f^*\mathcal{B}^p(N) \subset \mathcal{B}^p(M).$$

Voimme siten määritellä lineaarikuvauksen (*indusoidun kohomologiakuvauksen*)

$$f^*\colon H^p_{dR}(N) \to H^p_{dR}(M)$$

asettamalla

$$f^*[\omega] = [f^*\omega], \quad [\omega] \in H^p_{dR}(N).$$

Määritelmä ei riipu edustajan valinnasta (HT). Jos edelleen $g\colon N \to P$ on sileä, niin $(g \circ f)^* = f^* \circ g^*\colon H^p_{dR}(P) \to H^p_{dR}(M)$. Erityisesti identtisen kuvauksen $id\colon M \to M$ indusoima kohomologiakuvaus on identtinen kuvaus $(id)^*\colon H^p_{dR}(M) \to H^p_{dR}(M)$. Näin ollen diffeomorfisilla sileillä monistoilla on isomorfiset de Rhamin kohomologiaryhmät.

Itse asiassa de Rhamin kohomologiaryhmät ovat topologisia invariantteja: Jos M ja N ovat homeomorfisia sileitä monistoja, niin niiden de Rhamin kohomologiaryhmät ovat isomorfiset. Todistamme tämän (osittain) seuraavaksi.

Homotopia invarianssi. Olkoot X ja Y topologisia avaruuksia ja $f_0, f_1\colon X \to Y$ jatkuvia. Sanomme, että f_0 ja f_1 ovat *homotooppiset* (merk. $f_0 \simeq f_1$), jos on olemassa jatkuva kuvaus (homotopia f_0:sta f_1:een) $H\colon X \times I \to Y$, $I = [0,1]$, s.e. $\forall x \in X$

$$\begin{aligned}H(x,0) &= f_0(x), \\ H(x,1) &= f_1(x).\end{aligned}$$

Jos lisäksi $H(x,t) = f_0(x) = f_1(x)$ $\forall t \in I$ ja $\forall x \in A \subset X$, niin sanomme, että f_0 ja f_1 ovat homotooppiset A:n suhteen, merk. $f_0 \simeq f_1 \operatorname{rel} A$.

Jatkuvaa kuvausta $f\colon X \to Y$ sanotaan *homotopiaekvivalenssiksi* (ja X:ää ja Y:tä *homotopiaekvivalenteiksi*), jos on olemassa jatkuva kuvaus $g\colon Y \to X$ s.e. $f \circ g \simeq id_Y$ ja $g \circ f \simeq id_X$.

Jos $f, g\colon M \to N$ ovat sileitä, niin kokoelmaa lineaarikuvauksia $h\,(= h^p)\colon \mathcal{A}^p(N) \to \mathcal{A}^{p-1}(M)$ s.e.

$$\underbrace{d(h\omega) + h(d\omega)}_{=d(h^p\omega)+h^{p+1}(d\omega)} = g^*\omega - f^*\omega \quad \forall \omega \in \mathcal{A}^p(N) \tag{7.18}$$

sanotaan *homotopiaoperaattoriksi* f^*:n ja g^*:n välillä.

Lemma 7.19. *Olkoon M sileä monisto, $I = [0,1]$ ja $i_t\colon M \to M \times I$, $t \in [0,1]$, upotus*

$$i_t(x) = (x, t).$$

Silloin on olemassa homotopiaoperaattori i_0^*:n ja i_1^*:n välillä.

Todistus. Kun $\omega \in \mathcal{A}^p(M \times I)$, niin asetetaan

$$h\omega = \int_0^1 \left(i_{\partial/\partial t}\omega\right)\, dt \in \mathcal{A}^{p-1}(M),$$

missä t on I:n (standardi)koordinaatti ja $\partial/\partial t$ vastaava koordinaattitangenttivektori. Toisin sanoen

$$\begin{aligned}(h\omega)_q(v_1, \ldots, v_{p-1}) &= \int_0^1 \left(i_{\partial/\partial t}\omega\right)_{(q,t)} (v_1, \ldots, v_{p-1})\, dt \\ &= \int_0^1 \omega_{(q,t)}(\partial/\partial t, v_1, \ldots, v_{p-1})\, dt.\end{aligned}$$

Olkoon $x = (x^1, \ldots, x^n)$ kartta q:ssa. Riittää osoittaa, että (7.18) pätee muodoille

(i) $\omega = f(x,t)dt \wedge dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_{p-1}}$ ja

(ii) $\omega = f(x,t)dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_p}$.

Oletetaan ensin, että

$$\omega = f(x,t)dt \wedge dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_{p-1}}.$$

Silloin

$$\begin{aligned}d(h\omega) &= d\left(\left(\int_0^1 f(x,t)\, dt\right) dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_{p-1}}\right) \\ &= \frac{\partial}{\partial x^j}\left(\int_0^1 f(x,t)\, dt\right) dx^j \wedge dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_{p-1}} \\ &= \left(\int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x^j}(x,t)\, dt\right) dx^j \wedge dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_{p-1}}.\end{aligned}$$

Toisaalta

$$d\omega = \frac{\partial f}{\partial x^j}\, dx^j \wedge dt \wedge dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_{p-1}},$$

sillä $dt \wedge dt = 0$. Siten

$$\begin{aligned} h(d\omega) &= h\left(\frac{\partial f}{\partial x^j}\, dx^j \wedge dt \wedge dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_{p-1}}\right) \\ &= \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x^j}(x,t) i_{\partial/\partial t}\left(dx^j \wedge dt \wedge dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_{p-1}}\right)\, dt \\ &= -\left(\int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x^j}(x,t)\, dt\right) dx^j \wedge dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_{p-1}} \\ &= -d(h\omega) \end{aligned}$$

ja näin ollen

$$d(h\omega) + h(d\omega) = 0.$$

Koska $t \circ i_0 \equiv 0$ ja $t \circ i_1 \equiv 1$, on $i_0^* dt = i_1^* dt = 0$, joten $i_0^*\omega = i_1^*\omega = 0$ eli kaava (7.18) pätee. Oletetaan sitten, että

$$\omega = f(x,t) dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_p}.$$

Nyt $i_{\partial/\partial t}\omega = 0$, joten $d(h\omega) = 0$. Lisäksi

$$\begin{aligned} h(d\omega) &= h\left(\frac{\partial f}{\partial t} dt \wedge dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_p} + \alpha\right) \\ &= \left(\int_0^1 \frac{\partial f}{\partial t}(x,t)\, dt\right) dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_p} \\ &= \left(f(x,1) - f(x,0)\right) dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_p} \\ &= i_1^*\omega - i_0^*\omega, \end{aligned}$$

missä α on summa termeistä, joissa ei esiinny dt:tä. □

Theorem 7.20. *Olkoot $f, g \colon M \to N$ homotooppisia sileitä kuvauksia. Silloin indusoidut homologia kuvaukset $f^*, g^* \colon H^p_{dR}(N) \to H^p_{dR}(M)$ ovat samat kaikilla p.*

Todistus. Todistuksessa tarvitaan *sileää* homotopiaa $H \colon M \times I \to N$ f:stä g:hen (ks. Huomautus 7.23). Silloin $H \circ i_0 = f$ ja $H \circ i_1 = g$, missä i_t on kuten Lemmassa 7.19. Olkoon

$$\tilde{h} = h \circ H^* \colon \mathcal{A}^p(N) \to \mathcal{A}^{p-1}(M),$$

missä h on Lemmassa 7.19 konstruoitu homotopiaoperaattori. Jos $\omega \in \mathcal{A}^p(N)$, niin

$$\begin{aligned} \tilde{h}(d\omega) + d(\tilde{h}\omega) &= h(H^* d\omega) + d(hH^*\omega) \\ &= hd(H^*\omega) + d(hH^*\omega) \\ &= i_1^* H^*\omega - i_0^* H^*\omega \\ &= (H \circ i_1)^*\omega - (H \circ i_0)^*\omega \\ &= g^*\omega - f^*\omega. \end{aligned}$$

Siten suljetun muodon $\omega \in \mathcal{A}^p(N)$ ekvivalenssiluokalle $[\omega] \in H^p_{dR}(N)$ pätee

$$g^*[\omega] - f^*[\omega] = [g^*\omega - f^*\omega] = \left[\tilde{h}(d\omega) + d(\tilde{h}\omega)\right] = \left[d(\tilde{h}\omega)\right] = 0,$$

sillä $d\omega = 0$ ja $[\alpha] = 0$ eksakteilla muodoilla α. □

Theorem 7.21. *Jos M ja N ovat homotopiaekvivalentteja sileitä monistoja, niin $H^p_{dR}(M)$ ja $H^p_{dR}(N)$ ovat isomorfiset kaikilla p. Isomorfismina on minkä tahansa sileän homotopiaekvivalenssin $f\colon M \to N$ indusoima kohomologiakuvaus.*

Todistus. Olkoot $f\colon M \to N$ ja $g\colon N \to M$ jatkuvia s.e. $f \circ g \simeq id_N$ ja $g \circ f \simeq id_M$. Silloin on olemassa *sileät* kuvaukset $\tilde{f}\colon M \to N,\ \tilde{f} \simeq f$, ja $\tilde{g}\colon N \to M,\ \tilde{g} \simeq g$ (ks. Huomautus 7.23). Tällöin $\tilde{f} \circ \tilde{g} \simeq id_N$ ja $\tilde{g} \circ \tilde{f} \simeq id_M$. Lauseen 7.20 nojalla

$$\tilde{f}^* \circ \tilde{g}^* = (\tilde{g} \circ \tilde{f})^* = (id_M)^* = id_{H^p_{dR}(M)}.$$

Samoin $\tilde{g}^* \circ \tilde{f}^*$ on $H^p_{dR}(N)$:n identtinen kuvaus, joten $f^*\colon H^p_{dR}(N) \to H^p_{dR}(M)$ on isomorfismi. □

Koska jokainen homeomorfismi on erityisesti homotopiaekvivalenssi, saadaan seurauksena de Rhamin kohomologiaryhmien invarianttisuus homeomorfismeissa.

Corollary 7.22. *Jos sileät monistot M ja N ovat homeomorfisia, niin niiden de Rhamin kohomologiaryhmät ovat isomorfiset.*

Remark 7.23. Edellisissä todistuksissa käytetyn sileän homotopian $H\colon M \times I \to N$ f:stä g:hen sekä sileiden kuvausten $\tilde{f} \simeq f$ ja $\tilde{g} \simeq g$ olemassaoloa emme todista tällä kurssilla. Ne seuraavat ns. Whitneyn approksimointilauseesta monistoille: Olkoot M ja N sileitä monistoja ja $f\colon M \to N$ jatkuva. Silloin on olemassa sileä $\tilde{f}\colon M \to N$ s.e. $\tilde{f} \simeq f$. Jos lisäksi f on sileä suljetussa joukossa $A \subset M$, niin voidaan valita $\tilde{f} \simeq f$ rel A. Whitneyn approksimointilause monistoille puolestaan todistetaan upottamalla N ensin johonkin $\mathbb{R}^d$:hen (Whitneyn upotuslause, $d = 2n + 1$), approksimoimalla jatkuvaa kuvausta $f\colon M \to \mathbb{R}^d$ sileällä kuvauksella (riittävän tarkasti) ja yhdistämällä tämä sileä approksimointi lopuksi (N:n ympäristössä määritellyn) sileän retraktion kanssa (ks. esim. [Br], [L2]).

Theorem 7.24 (Poincarén lemma)**.** *Olkoon $U \subset \mathbb{R}^n$ tähtimäinen avoin joukko. Silloin $H^p_{dR}(U) = 0$ kaikilla $p \geq 1$.*

Todistus. Olkoon U tähtimäinen pisteen $y \in U$ suhteen. Silloin id_U on homotooppinen vakiokuvauksen $c_y\colon U \to \{y\}$ kanssa ($H(x,t) = y + t(x - y)$). Siten $H^p_{dR}(U)$ on isomorfinen $H^p_{dR}(\{y\})$ kanssa. Lisäksi $H^p_{dR}(\{y\}) = 0$, kun $p \geq 1$. □

Tähän asti päästiin s. 2004 luennoilla

JATKUU ...

Alla luettelo (eräistä) kirjoista ja luentomuistiinpanoista, joita voi käyttää lisämateriaalina.

Viitteet

[AMR] Abraham, R., Marsden, J.E., Ratiu, T. *Manifolds, tensor analysis, and applications,* Springer, 1988.

[BG] Berger, M., Gostiaux, B. *Differential geometry: manifolds, curves, and surfaces,* Springer, 1988.

[BC] Bishop, R., Crittenden, R. *Geometry of manifolds,* Academic Press, 1964.

[Bo] Boothby, W.M. *An introduction to differentiable manifolds and Riemannian geometry,* Academic Press, 1975.

[Br] Bredon, G.E. *Topology and geometry,* Springer, 1993.

[Ch] Chavel, I. *Riemannian geometry: a modern introduction,* Cambridge Univ. Press, 1993.

[CE] Cheeger, J., Ebin, D. *Comparison theorems in Riemannian geometry,* North-Holland Publishing Co., 1975.

[Ca1] do Carmo, M.P. *Differential geometry of curves and surfaces,* Prentice Hall, 1976.

[Ca2] do Carmo, M.P. *Riemannian geometry,* Birkhäuser, 1992.

[Ca3] do Carmo, M.P. *Differential forms and applications,* Springer, 1994.

[GH] Gallot, S., Hulin, D., Lafontaine, J. *Riemannian geometry,* Springer, 1987.

[Hi] Hicks, N. *Notes in differential geometry,* Van Nostrand, 1965.

[Ho] Holopainen, I. *Differential geometry,* luentomuistiinpanot, 1999 ja 2001.

[KN] Kobayashi, S., Nomizu, K. *Foundations of differential geometry, Vol. I,* Interscience Publishers, 1963.

[L1] Lee, J.M. *Riemannian manifolds, an introduction to curvature,* Springer, 1997.

[L2] Lee, J.M. *Introduction to smooth manifolds,* Springer, 2002.

[MT] Madsen, I., Tornehave, J. *From calculus to cohomology,* Cambridge University Press, 1997.

[Pe] Petersen, P. *Riemannian geometry,* Springer, 1998.

[Ru] Rudin, W. *Principles of mathematical analysis,* McGraw-Hill, 1976.

[Sp] Spivak, M. *A comprehensive introduction to differential geometry, Vol. I,II,III, IV,* Publish or Perish, 1979.

[V] Väisälä, J. *Topologia II,* Limes, 1999.

[Wa] Warner, F. *Foundations of differentiable manifolds and Lie groups,* Springer, 1983.