Kvasisäännöllisesti elliptisen moniston rajoitettu kohomologia

Susanna Heikkilä

Pro gradu -tutkielma
Matematiikan ja tilastotieteen osasto
Matemaattis-luonnontieteellinen tiedekunta
Helsingin yliopisto
Ohjaaja: Pekka Pankka

HELSINGIN YLIOPISTO — HELSINGFORS UNIVERSITET — UNIVERSITY OF HELSINKI

Tiedekunta — Fakultet — Faculty	Osasto — Institution — Department
Matemaattis-luonnontieteellinen tiedekunta	Matematiikan ja tilastotieteen osasto

Tekijä — Författare — Author

Susanna Heikkilä

Työn nimi — Arbetets titel — Title

Kvasisäännöllisesti elliptisen moniston rajoitettu kohomologia

Oppiaine — Läroämne — Subject

Matematiikka

Työn laji — Arbetets art — Level	Aika — Datum — Month and year	Sivumäärä — Sidoantal — Number of pages
Pro gradu -tutkielma	Elokuu 2020	102 s.

Tiivistelmä — Referat — Abstract

Tässä työssä esitellään ja todistetaan Prywesin lause vuodelta 2019. Prywesin lause sanoo, että kompaktin, yhtenäisen ja suunnistetun Riemannin moniston jokaisen de Rhamin kohomologian dimensio on rajoitettu, jos monisto on kvasisäännöllisesti elliptinen. Erityisesti, tällöin moniston jokaisen de Rhamin kohomologian dimensio on rajoitettu vakiolla, joka riippuu ainoastaan de Rhamin kohomologian asteesta ja moniston dimensiosta. Prywesin lause todisti Bonkin ja Heinosen konjektuurin vuodelta 2001 ja ratkaisi Gromovin avoimen ongelman vuodelta 1981.

Työssä Prywesin lause todistetaan esittelemällä ja käyttämällä kvasisäännöllisen kuvauksen kohomologisen arvojenjakautumisrajan käsitettä. Työssä osoitetaan, että kvasisäännölliselle kuvaukselle euklidiselta avaruudelta kompaktille, yhtenäiselle ja suunnistetulle Riemannin monistolle on olemassa sellainen kohomologinen arvojenjakautumisraja, että kohomologinen arvojenjakautumisraja kuvaa moniston de Rhamin kohomologian kannan differentiaalimuodoiksi, jotka ovat pisteittäin lineaarisesti riippumattomia positiivimittaisessa joukossa. Prywesin lause seuraa tästä.

Avainsanat — Nyckelord — Keywords

de Rhamin kohomologia, Riemannin geometria, kvasisäännöllinen kuvaus

Säilytyspaikka — Förvaringsställe — Where deposited

E-thesis

Muita tietoja — Övriga uppgifter — Additional information

Työ sai tukea Suomen Akatemialta Analyysin ja dynamiikan tutkimuksen huippuyksikön kautta

Sisällys

Luku 1

Johdanto

Suunnistettu Riemannin monisto on kvasisäännöllisesti elliptinen, jos on olemassa kvasisäännöllinen kuvaus, joka ei ole vakiokuvaus, euklidiselta avaruudelta monistolle. Kvasisäännölliset kuvaukset ovat jatkuvia kuvauksia, jotka ovat riittävän säännöllisiä ja joiden tangenttikuvaukset muuttavat konformigeometriaa vain rajoitetun määrän. Mielenkiintoinen tutkimuskysymys on, millaiset suunnistetut Riemannin monistot ovat kvasisäännöllisesti elliptisiä. Kvasisäännöllisesti elliptisten suunnistettujen Riemannin monistojen kontekstissa monistot ovat aina reunattomia. Työssä ei käsitellä reunallisia monistoja ollenkaan, joten jatkossa moniston reunattomuutta ei mainita erikseen.

Varopouloksen tulos [19, X.5.1 Theorem, s. 146] sanoo, että kompakti ja suunnistettu Riemannin monisto ei ole kvasisäännöllisesti elliptinen, jos moniston perusryhmä kasvaa liian nopeasti.

Vuonna 1981 Gromov esitti kysymyksen, ovatko kaikki kompaktit, yhdesti yhtenäiset ja suunnistetut Riemannin monistot kvasisäännöllisesti elliptisiä; katso [6, s. 200]. Bonk ja Heinonen osoittivat seuraavan tuloksen kompakteista, yhtenäisistä ja suunnistetuista Riemannin monistoista, jotka ovat kvasisäännöllisesti elliptisiä.

Lause 1.1. [2, Theorem 1.1, s. 219] *Olkoot $n \geq 2$ ja M kompakti, yhtenäinen ja suunnistettu n-ulotteinen Riemannin monisto. Olkoot $K \geq 1$ ja $f\colon \mathbb{R}^n \to M$ K-kvasisäännöllinen kuvaus, joka ei ole vakiokuvaus. Tällöin*

$$\dim H^*(M) \leq C(n, K).$$

Bonk ja Heinonen esittivät konjektuurin, että moniston de Rhamin kohomologiarenkaan dimensiota rajoittava vakio voitaisiin saada riippumaan ainoastaan moniston dimensiosta. Prywes todisti seuraavan lauseen, joka todisti Bonkin ja Heinosen konjektuurin ja vastasi Gromovin avoimeen kysymykseen; katso [14, Theorem 1.1, s. 863].

Lause 1.2. *Olkoot $n \geq 2$ ja M kompakti, yhtenäinen ja suunnistettu n-ulotteinen Riemannin monisto. Olkoot $K \geq 1$ ja $f\colon \mathbb{R}^n \to M$ K-kvasisäännöllinen kuvaus, joka ei ole vakiokuvaus. Tällöin*

$$\dim H^\ell(M) \leq \binom{n}{\ell}$$

jokaisella $\ell \in \{0, \dots, n\}$.

Jokaisella $n \geq 2$ n-ulotteinen torus $T^n = S^1 \times \cdots \times S^1$ on sellainen kvasisäännöllisesti elliptinen, kompakti, yhtenäinen ja suunnistettu n-ulotteinen Riemannin monisto, että $\dim H^\ell(T^n) = \binom{n}{\ell}$ jokaisella $\ell \in \{0, \dots, n\}$. Näin ollen lause 1.2 antaa parhaan mahdollisen arvion.

Lause 1.2 vastasi Gromovin kysymykseen seuraavasti. Lauseen 1.2 avulla voidaan perustella, että neljän tai useamman karteesisen tulon $S^2 \times S^2$ yhtenäinen summa, joka on kompakti, yhdesti yhtenäinen ja suunnistettu Riemannin monisto, ei ole kvasisäännöllisesti elliptinen; katso [14, Corollary 1.2, s. 864]. Esimerkki ei ole triviaali, sillä karteesinen tulo $S^2 \times S^2$ ja kahden karteesisen tulon $S^2 \times S^2$ yhtenäinen summa ovat kvasisäännöllisesti elliptisiä; katso [15, s. 183] ja [17, Theorem 1, s. 97].

Tässä työssä käsitellään tarvittavat esitiedot ja todistetaan Prywesin lause. Työssä seurataan Prywesin todistusta suurimmaksi osaksi. Kuitenkin osia Prywesin todistuksesta on muokattu ja uudelleen muotoiltu työssä. Loppu johdannosta on työssä esitetyn todistuksen alkuperäisestä poikkeavien piirteiden ja työn yleisen rakenteen kuvailua.

Yksi askel Prywesin lauseen todistuksessa on osoittaa seuraava tulos. Tulos vastaa Prywesin todistuksessa propositiota [14, Proposition 2.2, s. 869] ja työssä propositiota 8.1.

Propositio (Heikon käänteisen Hölderin epäyhtälön propositio)**.** *Olkoot $n \geq 2$ ja M kompakti, yhtenäinen ja suunnistettu n-ulotteinen Riemannin monisto. Olkoot $K \geq 1$ ja $f\colon \mathbb{R}^n \to M$ K-kvasisäännöllinen kuvaus, joka ei ole vakiokuvaus. Olkoon $1 \leq \ell \leq \frac{n}{2}$ sellainen luku, että $H^\ell(M) \neq 0$. Tällöin kuvauksen f Jacobiaani J_f toteuttaa heikon käänteisen Hölderin epäyhtälön*

$$\frac{1}{\left|\frac{1}{2}B\right|} \int_{\frac{1}{2}B} J_f \leq C(n, M, K) \left(\frac{1}{|B|} \int_B J_f^{\frac{n}{n+1}} \right)^{\frac{n+1}{n}},$$

missä $B = B^n(x, r) \subset \mathbb{R}^n$ on mielivaltainen kuula ja $\frac{1}{2}B = B^n\left(x, \frac{r}{2}\right)$.

Prywesin esittämässä heikon käänteisen Hölderin epäyhtälön proposition todistuksessa havaittiin puute. Prywes kiinnittää todistuksessa sellaiset differentiaalimuodot $\alpha \in \Omega^\ell(M)$ ja $\beta \in \Omega^{n-\ell}(M)$, että $\int_M \alpha \wedge \beta = 1$, ja implisiittisesti käyttää oletusta, että differentiaalimuotojen α ja β ulkoinen tulo $\alpha \wedge \beta$ on ei-negatiivinen. Ulkoisen tulon ei-negatiivisuuden oletus ei kuitenkaan välttämättä pidä paikkaansa kiinnitetyillä differentiaalimuodoilla. Työssä ongelma on ratkaistu käyttämällä harmonisia muotoja.

Prywesin lauseen todistuksessa tarvitaan seuraavaa tulosta. Bonk ja Heinonen todistivat kyseisen tuloksen todistaessaan lausetta 1.1; katso [2, Theorem 1.11, s. 224]. Prywes viittaa tuloksen Bonkin ja Heinosen todistukseen. Työssä tulos vastaa lausetta 8.7.

Lause (Nopean kasvun lause). *Olkoot $n \geq 2$ ja M kompakti, yhtenäinen ja suunnistettu n-ulotteinen Riemannin monisto. Olkoot $K \geq 1$ ja $f\colon \mathbb{R}^n \to M$ K-kvasisäännöllinen kuvaus, joka ei ole vakiokuvaus. Oletetaan, että $H^\ell(M) \neq 0$ jollakin $1 \leq \ell \leq \frac{n}{2}$. Tällöin on olemassa sellainen vakio $\xi > 0$, että*

$$\liminf_{r\to\infty} \frac{A_f(B^n(0,r))}{r^\xi} > 0.$$

Erityisesti pätee, että $A_f(B^n(0,r)) \to \infty$, kun $r \to \infty$.

Bonkin ja Heinosen nopean kasvun lauseen todistus perustuu de Rhamin kohomologian $H^\ell(M)$ epätriviaalin ekvivalenssiluokan $0 \neq c \in H^\ell(M)$ harmonisen edustajan $\omega_c \neq 0$ pullback-muodon $f^*\omega_c \neq 0$ korkeampaan integroituvuuteen

$$\left(\frac{1}{\left|B^n\left(0,\frac{r}{2}\right)\right|}\int_{B^n\left(0,\frac{r}{2}\right)} |f^*\omega_c|^q\right)^{\frac{1}{q}} \leq C\left(\frac{1}{|B^n(0,r)|}\int_{B^n(0,r)} |f^*\omega_c|^{\frac{n}{\ell}}\right)^{\frac{\ell}{n}}$$

jollakin $q > \frac{n}{\ell}$ jokaisella $r > 0$ ja arvioon

$$\int_{B^n(0,r)} |f^*\omega_c|^{\frac{n}{\ell}} \leq CA_f(B^n(0,r))$$

jokaisella $r > 0$. Työssä puolestaan osoitetaan, että nopean kasvun lause seuraa heikon käänteisen Hölderin epäyhtälön propositiosta. Tunnetuilla tekniikoilla [1] heikon käänteisen Hölderin epäyhtälön propositiosta seuraa Jacobiaanin J_f korkeampi integroituvuus

$$\left(\frac{1}{\left|B^n\left(0,\frac{r}{2}\right)\right|}\int_{B^n\left(0,\frac{r}{2}\right)} J_f^b\right)^{\frac{1}{b}} \leq C(n,M,K,b)\frac{1}{|B^n(0,r)|}\int_{B^n(0,r)} J_f$$

jollakin $b > 1$ jokaisella $r > 0$. Yksinkertaisella epäyhtälön manipuloinnilla tästä seuraa jokaisella $r > 0$ arvio

$$\frac{A_f(B^n(0,r))}{r^{n\left(1-\frac{1}{b}\right)}} \geq C(n,M,K,b)\left(\int_{B^n\left(0,\frac{r}{2}\right)} J_f^b\right)^{\frac{1}{b}}. \tag{1.3}$$

Koska f on kvasisäännöllinen kuvaus, joka ei ole vakiokuvaus, niin sen Jacobiaani J_f on ei-negatiivinen funktio, joka ei ole vakiokuvaus nolla. Tämä ja arvio (1.3) osoittavat nopean kasvun lauseen väitteen.

Työn alaluvussa 7.4 määritellään kvasisäännöllisen kuvauksen kohomologinen arvojen-jakautumisraja, joka on työssä kehitetty käsite. Merkittävin uudelleen muotoilu Prywesin todistukseen tehdään työssä siinä, että Prywesin lauseen todistus palautetaan seuraavaan tulokseen. Tulos vastaa työn lausetta 7.22.

Lause (Kohomologisen arvojenjakautumisrajan olemassaololause). *Olkoot $n \geq 2$ ja M kompakti, yhtenäinen ja suunnistettu n-ulotteinen Riemannin monisto. Olkoot $K \geq 1$ ja $f\colon \mathbb{R}^n \to M$ K-kvasisäännöllinen kuvaus, joka ei ole vakiokuvaus. Olkoon $1 \leq \ell \leq \frac{n}{2}$ sellainen, että $H^\ell(M) \neq 0$. Tällöin on olemassa sellainen kuvauksen f ℓ:s kohomologinen arvojenjakautumisraja*

$$L\colon H^\ell(M) \to L^{\frac{n}{\ell}}(B^n(0,1), \Lambda^\ell(\mathbb{R}^n)),$$

että

$$\left|\left\{x \in B^n(0,1)\colon \text{ jono } (Lc_1(x), \ldots, Lc_k(x)) \subset \Lambda^\ell(\mathbb{R}^n) \text{ on vapaa}\right\}\right| > 0$$

jokaisella avaruuden $H^\ell(M)$ kannalla $(c_1, \ldots, c_k)$.

Kohomologisen arvojenjakautumisrajan olemassaololause todistetaan luvussa kahdeksan. Luvuissa 2-7 käsitellään tarvittavia esitietoja. Osa esitiedoista on sellaisia, että tulosten todistuksia ei löydy perusoppikirjoista ja niiden todistukset on käsitelty täydellisyyden vuoksi. Osa esitiedoista taas on sellaisia, että tulosten todistukset on rajattu pois työstä ja viitattu muihin lähteisiin.

Yleisesti ottaen lukijan esitiedoiksi oletetaan de Rham-teorian perusteet esimerkiksi teoksesta [13] ja Sobolev-teorian perusteet esimerkiksi teoksesta [5]. Lukijaa myös suositellaan tutustumaan teoksiin [1] ja [16], joissa käsitellään kvasisäännöllisiä kuvauksia euklidisten avaruuksien välillä. Muistiinpanoissa [12] yleistetään teoria kvasisäännöllisistä kuvauksista euklidisten avaruuksien välillä teoriaksi kvasisäännöllisistä kuvauksista suunnistettujen Riemannin monistojen välillä.

Käydään seuraavaksi läpi lukujen 2-7 sisältöä.

Työn toisessa luvussa käsitellään suunnistetun Riemannin moniston Riemannin tilavuusmuotoa ja Riemannin mittaa.

Luvussa kolme esitellään de Rhamin kohomologia ja siihen liittyviä tunnettuja tuloksia, kuten Poincarén duaaliteetti ja Hodgen lause. Hodgen lause esitetään antamatta sen todistusta, mutta kiinnostunut lukija voi tutustua teokseen [20]. Luvussa myös määritellään suljettujen differentiaalimuotojen duaalijono ja johdetaan Riemannin tilavuusmuodolle esitys differentiaalimuotojen parin avulla.

Neljännessä luvussa kerrataan kuvausten Sobolev-avaruuksien määritelmiä ja upotuksia euklidisessa avaruudessa. Luku sisältää myös lyhyen johdatuksen heikkoon käänteiseen Hölderin epäyhtälöön ja korkeampaan integroituvuuteen.

Luvun viisi alussa esitellään euklidisen avaruuden differentiaalimuotojen L^p-avaruudet ja heikko suppeneminen kyseisissä avaruuksissa. Tämän jälkeen määritellään euklidisen avaruuden differentiaalimuotojen Sobolev-avaruudet ja kyseisten avaruuksien normit. Luvussa osoitetaan, että osittaisintegrointi differentiaalimuotojen Sobolev-avaruudessa vastaa Stokesin lausetta. Luvun lopuksi todistetaan Sobolev-Poincaré epäyhtälö Sobolev-avaruuden differentiaalimuodoille. Sobolev-Poincaré epäyhtälön todistus perustuu teoksessa [9] esitellyn kuulan Poincaré-operaattorin jatkuvuuteen. Kuulan Poincaré-operaattorin jatkuvuutta ei todisteta, mutta väite palautetaan singulaaristen integraalien teoriaan [4]. Singulaaristien integraalien teoriaa ei käsitellä tässä työssä sen enempää.

Kuudennessa luvussa käsitellään neljännen ja viidennen luvun käsitteitä monistolla. Luvussa esitellään muun muassa oikea säännöllisyyden luokka kuvauksille euklidiselta avaruudelta sileälle monistolle, jotta voidaan määritellä kvasisäännöllinen kuvaus euklidiselta avaruudelta suunnistetulle Riemannin monistolle seuraavassa luvussa.

Luvussa seitsemän päästään vihdoin määrittelemään kvasisäännölliset kuvaukset sekä euklidiselta avaruudelta euklidiselle avaruudelle että euklidiselta avaruudelta suunnistetulle Riemannin monistolle. Luvussa esitetään kvasisäännöllisen kuvauksen pullback-operaation tärkeitä perustuloksia ja annetaan kvasisäännöllisen kuvauksen kohomologisen arvojenjakautumisrajan määritelmä.

Luku 2

Riemannin moniston tilavuusmuoto ja mitta

Tässä luvussa käydään läpi vektoriavaruuden ulkoisen potenssin ja suunnistetun Riemannin moniston peruskäsitteitä.

2.1 Ulkoinen potenssi ja suunnistava muoto

Tässä alaluvussa tutkitaan äärellisulotteisten vektoriavaruuksien ulkoisia potensseja ja suunnistavia muotoja; katso [10, luku 9] ja [13, luku 2].

Määritelmä 2.1. Olkoon $\ell \in \mathbb{N}$. Äärellisulotteisen vektoriavaruuden V ℓ:s *ulkoinen potenssi* on vektoriavaruus

$$\Lambda^{\ell}(V) = \{f \colon V^{\ell} \to \mathbb{R} : f \text{ on alternoiva multilineaarikuvaus}\}.$$

Olkoot $\ell_1, \ell_2 \in \mathbb{N}$ ja olkoon V n-ulotteinen vektoriavaruus. Tällöin jokaisella $\omega \in \Lambda^{\ell_1}(V)$ ja jokaisella $\tau \in \Lambda^{\ell_2}(V)$ muotojen ω ja τ ulkoinen tulo $\omega \wedge \tau \in \Lambda^{\ell_1+\ell_2}(V)$ on määritelty kaavalla

$$(\omega \wedge \tau)(v_1, \ldots, v_{\ell_1+\ell_2}) = \sum_{\sigma \in S(\ell_1,\ell_2)} \operatorname{sgn}(\sigma)\omega(v_{\sigma(1)}, \ldots, v_{\sigma(\ell_1)})\tau(v_{\sigma(\ell_1+1)}, \ldots, v_{\sigma(\ell_1+\ell_2)})$$

kaikilla $v_1, \ldots, v_{\ell_1+\ell_2} \in V$, missä $S(\ell_1, \ell_2)$ on (ℓ_1, ℓ_2)-sekoitusten joukko. Permutaatio $\sigma \colon \{1, \ldots, \ell_1 + \ell_2\} \to \{1, \ldots, \ell_1 + \ell_2\}$ on (ℓ_1, ℓ_2)-sekoitus, jos

$$\sigma(1) < \cdots < \sigma(\ell_1) \quad \text{ja} \quad \sigma(\ell_1 + 1) < \cdots < \sigma(\ell_1 + \ell_2).$$

Kaikilla $\omega_1, \dots, \omega_n \in \Lambda^1(V)$ ulkoinen tulo $\omega_1 \wedge \cdots \wedge \omega_n \in \Lambda^n(V)$ yksinkertaistuu muotoon

$$(\omega_1 \wedge \cdots \wedge \omega_n)(v_1, \dots, v_n) = \det \begin{pmatrix} \omega_1(v_1) & \dots & \omega_1(v_n) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \omega_n(v_1) & \dots & \omega_n(v_n) \end{pmatrix}$$

kaikilla $v_1, \dots, v_n \in V$.

Olkoot $(e_1, \dots, e_n)$ avaruuden V kanta ja $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$ vastaava duaalikanta. Tällöin ℓ:llä ulkoisella potenssilla $\Lambda^\ell(V)$ on kanta $\{\varepsilon_{i_1} \wedge \cdots \wedge \varepsilon_{i_\ell} : i_1 < \cdots < i_\ell\}$. Koska $\dim \Lambda^\ell(V) = \binom{n}{\ell}$, niin voidaan luonnollisesti sopia, että $\Lambda^0(V) = \mathbb{R}$.

Määritelmä 2.2. Olkoon V n-ulotteinen vektoriavaruus. Muoto $\omega \in \Lambda^n(V)$ on *suunnistava muoto*, jos $\omega \neq 0$. Tällöin merkitään $\omega = \mathrm{vol}_V$.

Huomautus 2.3. Koska avaruus $\Lambda^n(V)$ on yksiulotteinen, niin suunnistava muoto on normitusta ja merkkiä vaille yksikäsitteinen.

Määritelmä 2.4. Olkoot V ja W äärellisulotteisia vektoriavaruuksia ja $T \colon V \to W$ lineaarikuvaus. Tällöin lineaarikuvaus T indusoi *pullback-kuvauksen* $T^* \colon \Lambda^\ell(W) \to \Lambda^\ell(V)$, joka on määritelty kaavalla

$$(T^*\omega)(v_1, \dots, v_\ell) = \omega(Tv_1, \dots, Tv_\ell) \tag{2.5}$$

jokaisella $\omega \in \Lambda^\ell(W)$ ja kaikilla $v_1, \dots, v_\ell \in V$.

Olkoot V ja W n-ulotteisia vektoriavaruuksia ja $T \colon V \to W$ lineaarikuvaus. Koska avaruus $\Lambda^n(V)$ on yksiulotteinen, niin on olemassa sellainen yksikäsitteinen luku $J_T \in \mathbb{R}$, että

$$T^* \mathrm{vol}_W = J_T \, \mathrm{vol}_V \,. \tag{2.6}$$

2.2 Avaruuden $\Lambda^\ell(V)$ sisätulo ja indusoitu normi

Olkoon $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle_V)$ n-ulotteinen sisätuloavaruus. Tässä alaluvussa määritellään avaruuden $\Lambda^\ell(V)$ sisätulo; katso [10, luku 9]. Tämän jälkeen tarkastellaan sisätulon indusoiman normin yhteyttä operaattorinormiin eri tapauksissa.

Olkoot $(e_1, \dots, e_n)$ avaruuden V ortonormaali kanta ja $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$ vastaava duaalikanta. Avaruudelle $\Lambda^\ell(V)$ saadaan sisätulo

$$\langle \omega, \tau \rangle_{\Lambda^\ell(V)} = \sum_{i_1 < \cdots < i_\ell} \omega_I \, \tau_I,$$

missä $\omega = \sum_{i_1<\cdots<i_\ell} \omega_I \, \varepsilon_{i_1} \wedge \cdots \wedge \varepsilon_{i_\ell}$ ja $\tau = \sum_{i_1<\cdots<i_\ell} \tau_I \, \varepsilon_{i_1} \wedge \cdots \wedge \varepsilon_{i_\ell}$.

Avaruuden $\Lambda^\ell(V)$ normi $||\cdot||_{\Lambda^\ell(V)}$ on sisätulon $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\Lambda^\ell(V)}$ indusoima normi. Koska avaruuden $\Lambda^\ell(V)$ alkiot ovat lineaarikuvauksia $V^\ell \to \mathbb{R}$, niin niille on myös määritelty operaattorinormi. Kerrataan operaattorinormin määritelmä.

Määritelmä 2.7. Olkoot $(V, ||\cdot||_V)$ ja $(W, ||\cdot||_W)$ normiavaruuksia. Tällöin lineaarikuvauksen $T\colon V \to W$ *operaattorinormi* on määritelty kaavalla

$$||T||_{\mathrm{op}} = \sup\{||Tv||_W \, : v \in V, \, ||v||_V = 1\}.$$

Olkoon $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle_V)$ äärellisulotteinen sisätuloavaruus. Tällöin ulkoinen potenssi $\Lambda^\ell(V)$ on äärellisulotteinen sisätuloavaruus. Koska äärellisulotteisten vektoriavaruuksien normit ovat ekvivalentteja, niin on olemassa sellainen vakio $C > 0$, että

$$||\omega||_{\mathrm{op}} \leq C \, ||\omega||_{\Lambda^\ell(V)}$$

jokaisella $\omega \in \Lambda^\ell(V)$. Näin saatu vakio C saattaa kuitenkin riippua avaruudesta V. Seuraavassa lemmassa osoitetaan, että vakio riippuu ainoastaan avaruuden V dimensiosta. Tämä on kätevä tulos myöhemmin, kun tarkastellaan tangenttiavaruuksia.

Lemma 2.8. *Olkoon $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle_V)$ n-ulotteinen sisätuloavaruus. Tällöin*

$$||\omega||_{\mathrm{op}} \leq n \, ||\omega||_{\Lambda^\ell(V)}$$

jokaisella $\omega \in \Lambda^\ell(V)$.

Todistus. Olkoot $(e_1, \ldots, e_n)$ avaruuden V ortonormaali kanta, $(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n)$ vastaava duaalikanta ja

$$\omega = \sum_{i_1<\cdots<i_\ell} \omega_I \, \varepsilon_{i_1} \wedge \cdots \wedge \varepsilon_{i_\ell} \in \Lambda^\ell(V).$$

Olkoot vektorit $v_1, \ldots, v_\ell \in V$ yksikkövektoreita. Tällöin on olemassa sellainen $(\ell \times n)$-matriisi $A = (a_{ij})$, että

$$v_i = \sum_{j=1}^n a_{ij} e_j \qquad \text{ja} \qquad ||v_i||_V^2 = \sum_{j=1}^n a_{ij}^2$$

jokaisella $i = 1, \dots, \ell$. Nyt

$$\begin{aligned}
\omega(v_1, \dots, v_\ell) &= \sum_{i_1 < \cdots < i_\ell} \omega_I \, \varepsilon_{i_1} \wedge \cdots \wedge \varepsilon_{i_\ell}(v_1, \dots, v_\ell) \\
&= \sum_{i_1 < \cdots < i_\ell} \omega_I \det \begin{pmatrix} \varepsilon_{i_1}(v_1) & \dots & \varepsilon_{i_1}(v_\ell) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \varepsilon_{i_\ell}(v_1) & \dots & \varepsilon_{i_\ell}(v_\ell) \end{pmatrix} \\
&= \sum_{i_1 < \cdots < i_\ell} \omega_I \det \begin{pmatrix} a_{1i_1} & \dots & a_{\ell i_1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1i_\ell} & \dots & a_{\ell i_\ell} \end{pmatrix},
\end{aligned}$$

joten Hadamardin epäyhtälön nojalla pätee epäyhtälö

$$\begin{aligned}
|\omega(v_1, \dots, v_\ell)| &\le \sum_{i_1 < \cdots < i_\ell} |\omega_I| \left| \det \begin{pmatrix} a_{1i_1} & \dots & a_{\ell i_1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1i_\ell} & \dots & a_{\ell i_\ell} \end{pmatrix} \right| \le \sum_{i_1 < \cdots < i_\ell} |\omega_I| \prod_{k=1}^{\ell} \left(\sum_{j=1}^{\ell} a_{ki_j}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\
&\le \sum_{i_1 < \cdots < i_\ell} |\omega_I| \prod_{k=1}^{\ell} \left(\sum_{m=1}^{n} a_{km}^2 \right)^{\frac{1}{2}} = \sum_{i_1 < \cdots < i_\ell} |\omega_I| \prod_{k=1}^{\ell} ||v_k||_V \\
&= \sum_{i_1 < \cdots < i_\ell} |\omega_I| \le n \left(\sum_{i_1 < \cdots < i_\ell} \omega_I^2 \right)^{\frac{1}{2}} = n \, ||\omega||_{\Lambda^\ell(V)} \, .
\end{aligned}$$

Täten väite on todistettu. □

Olkoon $\ell \in \mathbb{N}$. Koska euklidisen avaruuden $\mathbb{R}^n$ ℓ:s ulkoinen potenssi $\Lambda^\ell(\mathbb{R}^n)$ on äärellisulotteinen vektoriavaruus, niin on olemassa sellainen vakio $C > 0$, että

$$||\omega||_{\Lambda^\ell(\mathbb{R}^n)} \le C \, ||\omega||_{\mathrm{op}}$$

jokaisella $\omega \in \Lambda^\ell(\mathbb{R}^n)$. Tällöin ei ole taattua, että vakio C ei riipu luvusta ℓ. Seuraava lemma osoittaa, että tällainen vakio on olemassa.

Lemma 2.9. *Jokaisella $n \in \mathbb{N}$ on olemassa sellainen vakio $C(n) > 0$, että*

$$||\omega||_{\Lambda^\ell(\mathbb{R}^n)} \le C(n) \, ||\omega||_{\mathrm{op}}$$

jokaisella $\omega \in \Lambda^\ell(\mathbb{R}^n)$.

Todistus. Olkoot $n \in \mathbb{N}$ ja $\ell \in \mathbb{N}$. Koska $\Lambda^\ell(\mathbb{R}^n)$ on äärellisulotteinen vektoriavaruus, niin on olemassa sellainen vakio $C(\ell) > 0$, että

$$||\omega||_{\Lambda^\ell(\mathbb{R}^n)} \le C(\ell) \, ||\omega||_{\mathrm{op}}$$

jokaisella $\omega \in \Lambda^\ell(\mathbb{R}^n)$. Valitaan $C(n) = \max\{C(\ell) \colon \ell \le n\}$. □

2.3 Riemannin moniston tilavuusmuoto

Tässä alaluvussa tutustutaan Riemannin tilavuusmuodon määritelmään ja olemassaoloon. Palautetaan aluksi mieleen suunnistetun moniston ja suunnistavan muodon määritelmät.

Työssä sileän n-moniston M sileiden ℓ-muotojen avaruutta merkitään $\Omega^\ell(M)$ jokaisella $\ell = 0, \dots, n$.

Määritelmä 2.10. Sileä n-monisto M on *suunnistettu*, jos on olemassa sellainen differentiaalimuoto $\omega \in \Omega^n(M)$, että $\omega_x \neq 0$ jokaisella $x \in M$. Tällöin muotoa ω kutsutaan *suunnistavaksi muodoksi*. Sanotaan, että tangenttiavaruuden T_xM kanta $(v_1, \dots, v_n)$ on *positiivisesti suunnistettu*, jos $\omega(v_1, \dots, v_n) > 0$.

Huomautus 2.11. Moniston M suunnistava muoto $\omega\colon M \to \Lambda^n(TM)$ on pisteittäin tangenttiavaruuksien T_xM suunnistava muoto kuten määritelmässä 2.2, sillä $\omega_x \in \Lambda^n(T_xM)$ ja $\omega_x \neq 0$ jokaisella $x \in M$.

Määritelmä 2.12. Olkoon M suunnistettu n-ulotteinen Riemannin monisto. Suunnistava muoto $\omega \in \Omega^n(M)$ on moniston M *Riemannin tilavuusmuoto*, jos $\omega_x(v_1, \dots, v_n) = 1$ jokaisella $x \in M$ jokaisella tangenttiavaruuden T_xM positiivisesti suunnistetulla ortonormaalilla kannalla $(v_1, \dots, v_n)$. Tällöin merkitään $\omega = \mathrm{vol}_M$.

Euklidinen avaruus $\mathbb{R}^n$ on suunnistettu n-ulotteinen Riemannin monisto ja sen Riemannin tilavuusmuoto $\mathrm{vol}_{\mathbb{R}^n}$ on sileä differentiaalimuoto $dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n\colon \mathbb{R}^n \to \Lambda^n(\mathbb{R}^n)$. Yleisemmin jokaisella suunnistetulla Riemannin monistolla on olemassa Riemannin tilavuusmuoto, kuten seuraavassa propositiossa osoitetaan; katso [13, Proposition 9.16, s. 73].

Propositio 2.13. *Olkoon M suunnistettu n-ulotteinen Riemannin monisto. Tällöin monistolla M on olemassa Riemannin tilavuusmuoto* $\mathrm{vol}_M \in \Omega^n(M)$.

Todistus. Olkoon $\omega \in \Omega^n(M)$ suunnistava muoto. Halutaan määritellä sellainen sileä funktio $f\colon M \to]0, \infty[$, että $f(x) = \omega_x(v_1, \dots, v_n)$ jokaisella $x \in M$ jokaisella tangenttiavaruuden T_xM positiivisesti suunnistetulla ortonormaalilla kannalla $(v_1, \dots, v_n)$. Tällöin sileällä funktiolla $\frac{1}{f}$ kertominen normittaa suunnistavan muodon ω tangettiavaruuksien positiivisesti suunnistettujen ortonormaalien kantojen suhteen, joten voidaan valita $\mathrm{vol}_M = \frac{1}{f}\omega \in \Omega^n(M)$.

Osoitetaan, että funktio f on hyvin määritelty monistolla M. Olkoon $x \in M$. Tarkastellaan tangenttiavaruuden T_xM kahta positiivisesti suunnistettua ortonormaalia kantaa $(v_1, \dots, v_n)$ ja $(w_1, \dots, w_n)$. Tällöin on olemassa sellainen ortogonaalinen $(n \times n)$-matriisi $A = (a_{ij})$, että

$$w_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} v_j$$

jokaisella $i = 1, \ldots, n$. Koska matriisi A on ortogonaalinen, niin joko $\det A = 1$ tai $\det A = -1$. Toisaalta pätee

$$\omega_x(w_1, \ldots, w_n) = \det A \cdot \omega_x(v_1, \ldots, v_n),$$

missä $\omega_x(w_1, \ldots, w_n) > 0$ ja $\omega_x(v_1, \ldots, v_n) > 0$. Täten täytyy olla $\det A = 1$ ja voidaan asettaa $f(x) = \omega_x(w_1, \ldots, w_n) = \omega_x(v_1, \ldots, v_n)$.

Osoitetaan, että funktio f on sileä. Olkoon pari (V, h) kartta monistolla M, missä karttakuvaus $h = (h_1, \ldots, h_n)$ on suunnansäilyttävä. Määritellään jokaisella $i = 1, \ldots, n$ vektorikentät $X_i \in \mathcal{T}(V)$, $x \mapsto \left(\frac{\partial}{\partial h_i}\right)_x$. Koska $(X_1(x), \ldots, X_n(x))$ on tangenttiavaruuden T_xM positiivisesti suunnistettu kanta jokaisella $x \in V$, niin voidaan soveltaa Gramin-Schmidtin menetelmää. Täten on olemassa sellainen yläkolmiomatriisi $B \colon V \to \mathbb{R}^{n\times n}$, $B(x) = (b_{ij}(x))$, että $b_{ii}(x) > 0$ jokaisella $i = 1, \ldots, n$, funktio $b_{ij} \circ h^{-1} \colon h(V) \to \mathbb{R}$ on sileä jokaisella $i = 1, \ldots, n$ ja jokaisella $j = 1, \ldots, n$ ja $(\bar{X}_1(x), \ldots, \bar{X}_n(x))$ on tangenttiavaruuden T_xM positiivisesti suunnistettu ortonormaali kanta jokaisella $x \in V$, missä

$$\bar{X}_i(x) = \sum_{j=1}^{n} b_{ij}(x) X_j(x)$$

jokaisella $i = 1, \ldots, n$. Tällöin saadaan yhtäsuuruus

$$\begin{aligned}
f \circ h^{-1}(x) &= \omega_{h^{-1}(x)}(\bar{X}_1(h^{-1}(x)), \ldots, \bar{X}_n(h^{-1}(x))) \\
&= (\det B)(h^{-1}(x)) \cdot \omega_{h^{-1}(x)}(X_1(h^{-1}(x)), \ldots, X_n(h^{-1}(x))) \\
&= (\det B)(h^{-1}(x)) \cdot \left((Dh^{-1}(x))^* \omega_{h^{-1}(x)}\right)(e_1, \ldots, e_n) \\
&= (\det B)(h^{-1}(x)) \cdot ((h^{-1})^* \omega)_x(e_1, \ldots, e_n),
\end{aligned}$$

joten funktion f lokaaliesitys on sileä. Täten funktio f on sileä. $\square$

Lemma 2.14. *Olkoot M suunnistettu n-ulotteinen Riemannin monisto ja $\mathrm{vol}_M \in \Omega^n(M)$ Riemannin tilavuusmuoto. Tällöin $||(\mathrm{vol}_M)_x||_{\mathrm{op}} = 1$ jokaisella $x \in M$.*

Todistus. Olkoot $x \in M$ ja $(e_1, \ldots, e_n)$ tangenttiavaruuden T_xM positiivisesti suunnistettu ortonormaali kanta. Koska $|(\mathrm{vol}_M)_x(e_1, \ldots, e_n)| = 1$, niin $||(\mathrm{vol}_M)_x||_{\mathrm{op}} \geq 1$.

Olkoot $v_1, \ldots, v_n \in T_xM$ yksikkövektoreita. Tällöin on olemassa sellainen $(n \times n)$-matriisi $A = (a_{ij})$, että

$$v_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} e_j \qquad \text{ja} \qquad \sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2 = 1$$

jokaisella $i = 1, \ldots, n$. Nyt Hadamardin epäyhtälöstä seuraa arvio

$$|(\mathrm{vol}_M)_x(v_1, \ldots, v_n)| = |\det A|\, |(\mathrm{vol}_M)_x(e_1, \ldots, e_n)| \leq \prod_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2 \right)^{\frac{1}{2}} = 1.$$

$\square$

2.4 Bilipschitz-jatkuvan diffeomorfismin Jacobiaani ja tangenttikuvauksen operaattorinormi

Halutaan osoittaa, että bilipschitz-jatkuvan karttakuvauksen Jacobiaani ja tangenttikuvauksen operaattorinormi ovat rajoitettuja. Tässä alaluvussa todistetaan väitteestä vahvempi muoto, missä riittää, että kuvaus on bilipshitz-jatkuva diffeomorfismi. Annetaan aluksi Jacobiaanin määritelmä.

Määritelmä 2.15. Olkoot M ja N suunnistettuja n-ulotteisia Riemannin monistoja ja $f\colon M \to N$ sileä kuvaus. *Kuvauksen f Jacobiaani* on funktio $J_f\colon M \to \mathbb{R}$, joka toteuttaa yhtälön

$$J_f \operatorname{vol}_M = f^* \operatorname{vol}_N \tag{2.16}$$

jokaisella $x \in M$, missä $(f^* \operatorname{vol}_N)_x = (Df(x))^*((\operatorname{vol}_N)_{f(x)})$.

Huomautus 2.17. Jokaisella $x \in M$ pätee $J_f(x) = J_{Df(x)}$, missä luku $J_{Df(x)} \in \mathbb{R}$ saadaan yhtälöstä (2.6) lineaariselle tangenttikuvaukselle $Df(x)\colon T_xM \to T_{f(x)}N$ ja tilavuusmuodoille $(\operatorname{vol}_M)_x$ ja $(\operatorname{vol}_N)_{f(x)}$.

Lause 2.18. *Olkoot M ja N n-ulotteisia suunnistettuja Riemannin monistoja ja $f\colon M \to N$ L-bilipschitz-jatkuva diffeomorfismi. Tällöin*

$$L^{-1} \leq ||Df(x)||_{\mathrm{op}} \leq L \tag{2.19}$$

ja

$$L^{-n} \leq J_f(x) \leq L^n \tag{2.20}$$

jokaisella $x \in M$.

Muotoillaan ja todistetaan lauseen 2.18 todistusta varten seuraava lemma.

Lemma 2.21. *Olkoot M n-ulotteinen Riemannin monisto, $x \in M$ ja $\gamma\colon]-\delta, \delta[\to M$ sellainen sileä polku, että $\gamma(0) = x$. Tällöin*

$$\lim_{t \to 0} \frac{d_M(x, \gamma(t))}{|t|} = ||\dot{\gamma}_0||_{T_xM}\,.$$

Todistus. Olkoon $U \subset M$ pisteen x normaaliympäristö. Voidaan valita sellainen $\delta_0 > 0$, että $\gamma(t) \in U$ jokaisella $t \in [-\delta_0, \delta_0]$. Tällöin jokaisella $t \in [-\delta_0, \delta_0]$ on olemassa sellainen tangenttiavaruuden vektori $v_t \in T_xM$, että $\exp_x(v_t) = \gamma(t)$. Täten jokaisella $t \in [-\delta_0, \delta_0]$ voidaan kirjoittaa $d_M(x, \gamma(t)) = d_M(\gamma^{v_t}(0), \gamma^{v_t}(1)) = ||v_t||_{T_xM}$.

Olkoot $(w_1, \dots, w_n)$ tangenttiavaruuden T_xM ortonormaali kanta, $(e_1, \dots, e_n)$ euklidisen avaruuden $\mathbb{R}^n$ luonnollinen kanta ja $T\colon T_xM \to \mathbb{R}^n$ lineaarikuvaus, joka on määritelty kaavalla $\sum_{i=1}^n a_i w_i \mapsto \sum_{i=1}^n a_i e_i$. Tällöin

$$\begin{aligned} \dot\gamma_0 &= \big(D \exp_x^{-1}(x)\big)(\dot\gamma_0) = T^{-1}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\big((T \circ \exp_x^{-1} \circ \gamma)(t)\big)|_{t=0}\right) \\ &= T^{-1}\left(\lim_{t\to 0} \frac{(T \circ \exp_x^{-1} \circ \gamma)(t)}{t}\right) = \lim_{t\to 0} \frac{(\exp_x^{-1} \circ \gamma)(t)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{v_t}{t} \end{aligned}$$

ja

$$||\dot\gamma_0||_{T_xM} = \lim_{t\to 0} \left|\left|\frac{v_t}{t}\right|\right|_{T_xM} = \lim_{t\to 0} \frac{d_M(x, \gamma(t))}{|t|}.$$

□

Lauseen 2.18 todistus. Todistetaan ensin epäyhtälö (2.19). Olkoot $x \in M$ ja $v \in T_xM$ yksikkövektori. Tällöin lemman 2.21 nojalla pätee

$$\begin{aligned} ||(Df(x))(v)||_{T_{f(x)}N} &= \left|\left|(f \dot\circ \gamma^v)_0\right|\right|_{T_{f(x)}N} = \lim_{t\to 0} \frac{d_N(f(x), (f \circ \gamma^v)(t))}{|t|} \\ &\le L \lim_{t\to 0} \frac{d_M(x, \gamma^v(t))}{|t|} = L \lim_{t\to 0} \frac{||v||_{T_xM}\,|t|}{|t|} = L. \end{aligned}$$

Täten $||Df(x)||_{\mathrm{op}} \le L$ jokaisella $x \in M$. Myös käänteiskuvaukselle $f^{-1}\colon N \to M$ saadaan arvio $||Df^{-1}(x)||_{\mathrm{op}} \le L$ jokaisella $x \in N$. Nyt jokaisella $x \in M$ pätee epäyhtälö

$$1 = \left|\left|Df^{-1}(f(x)) \circ Df(x)\right|\right|_{\mathrm{op}} \le \left|\left|Df^{-1}(f(x))\right|\right|_{\mathrm{op}} ||Df(x)||_{\mathrm{op}},$$

joten

$$||Df(x)||_{\mathrm{op}} \ge \frac{1}{||Df^{-1}(f(x))||_{\mathrm{op}}} \ge \frac{1}{L}$$

jokaisella $x \in M$.

Todistetaan nyt epäyhtälö (2.20). Olkoon $x \in M$. Käyttämällä Jacobiaanin J_f määritelmää 2.15 ja lemmaa 2.14 saadaan yhtäsuuruus

$$|J_f(x)| = |J_f(x)| \cdot ||(\mathrm{vol}_M)_x||_{\mathrm{op}} = ||J_f(x)(\mathrm{vol}_M)_x||_{\mathrm{op}} = ||(f^* \mathrm{vol}_N)_x||_{\mathrm{op}}.$$

Arvioidaan termiä $||(f^* \mathrm{vol}_N)_x||_{\mathrm{op}}$ seuraavasti. Olkoot $v_1, \dots, v_n \in T_xM$ yksikkövektoreita. Nyt jokaisella $i = 1, \dots, n$ pätee $Df(x)v_i \neq 0$, sillä lineaarikuvaus $Df(x)$ on kääntyvä ja

$v_i \neq 0$. Tällöin lemman 2.14 nojalla saadaan arvio

$$\begin{aligned}
&|(f^* \operatorname{vol}_N)_x(v_1, \ldots, v_n)| \\
&\quad = \left|(\operatorname{vol}_N)_{f(x)}(Df(x)v_1, \ldots, Df(x)v_n)\right| \\
&\quad = \left(\prod_{i=1}^n ||Df(x)v_i||_{T_{f(x)}N}\right) \left|(\operatorname{vol}_N)_{f(x)}\left(\frac{Df(x)v_1}{||Df(x)v_1||_{T_{f(x)}N}}, \ldots, \frac{Df(x)v_n}{||Df(x)v_n||_{T_{f(x)}N}}\right)\right| \\
&\quad \leq \left(\prod_{i=1}^n ||Df(x)||_{\mathrm{op}}\right) \left|\left|(\operatorname{vol}_N)_{f(x)}\right|\right|_{\mathrm{op}} = ||Df(x)||_{\mathrm{op}}^n \leq L^n.
\end{aligned}$$

Täten $||(f^* \operatorname{vol}_N)_x||_{\mathrm{op}} \leq L^n$. Näin ollen on osoitettu, että $J_f(x) \leq |J_f(x)| \leq L^n$ jokaisella $x \in M$. Sama arvio pätee myös käänteiskuvakselle f^{-1}, eli $J_{f^{-1}}(x) \leq L^n$ jokaisella $x \in N$. Tällöin $J_f(x)^{-1} = J_{f^{-1}}(f(x)) \leq L^n$ jokaisella $x \in M$. □

2.5 Riemannin moniston mitta

Tässä alaluvussa määritellään suunnistetun n-ulotteisen Riemannin moniston M Riemannin mitta μ, jonka konstruktio on vastaavanlainen kuin Lebesguen mitan m konstruktio avaruudessa $\mathbb{R}^n$. Avaruudessa $\mathbb{R}^n$ Lebesguen mitan suhteen integroiminen ja tilavuusmuotoa $\operatorname{vol}_{\mathbb{R}^n}$ vasten integroiminen yhtyvät, eli

$$\int_{\mathbb{R}^n} f \operatorname{vol}_{\mathbb{R}^n} = \int_{\mathbb{R}^n} f \,\mathrm{d}m$$

jokaisella $f \in C_c(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$. Koska Riemannin monisto M on suunnistettu, niin on olemassa Riemannin tilavuusmuoto vol_M. Halutaan säilyttää kyseinen ominaisuus myös monistolla M Riemannin tilavuusmuodon vol_M suhteen, joten Riemannin mitan μ tulee toteuttaa ehto

$$\int_M f \operatorname{vol}_M = \int_M f \,\mathrm{d}\mu \tag{2.22}$$

jokaisella $f \in C_c(M, \mathbb{R})$. Käytetään mitan määrittelemisessa Rieszin esityslausetta ja sen todistusta [18, 2.14 Theorem, s. 40] lineaarikuvaukselle $T\colon C_c(M, \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$, $f \mapsto \int_M f \operatorname{vol}_M$.

Tarkistetaan ensin, että tilanne toteuttaa Rieszin esityslauseen oletukset. Tiedetään, että monisto M on lokaalisti kompakti Hausdorffin avaruus. Riittää siis osoittaa, että lineaarikuvaus T on positiivinen. Olkoon $f \in C_c(M, \mathbb{R})$ sellainen, että $f \geq 0$. Tällöin

$$Tf = \int_M f \operatorname{vol}_M = \sum_{\alpha \in I} \int_{h_\alpha(V_\alpha)} (h_\alpha^{-1})^*(\lambda_\alpha f \operatorname{vol}_M),$$

missä $\{(V_\alpha, h_\alpha)\}_{\alpha\in I}$ on positiivinen kartasto, joka on yhteensopiva tilavuusmuodon vol_M kanssa, ja $\{\lambda_\alpha\}_{\alpha\in I}$ on peitteen $\{V_\alpha\}_{\alpha\in I}$ alistama sileä ykkösenositus. Osoitetaan, että kaikilla indekseillä $\alpha \in I$ summattava termi on ei-negatiivinen. Summattava termi on muotoa

$$\int_{h_\alpha(V_\alpha)} (h_\alpha^{-1})^*(\lambda_\alpha f \,\mathrm{vol}_M) = \int_{h_\alpha(V_\alpha)} (\lambda_\alpha \circ h_\alpha^{-1})(f \circ h_\alpha^{-1})(J_{h_\alpha} \circ h_\alpha^{-1})^{-1} \mathrm{d}m,$$

missä integroitavat funktiot ovat ei-negatiivisia, joten myös integraali on ei-negatiivinen.

Konstruoidaan seuraavaksi mitta ja σ-algebra kuten Rieszin esityslauseen todistuksessa. Esitellään sitä varten joitakin merkintöjä. Käytetään jatkossa seuraavia merkintöjä sellaisille funktioille $f \in C_c(M, \mathbb{R})$, että $0 \leq f \leq 1$. Jos $K \subset M$ on sellainen kompakti osajoukko, että $f(x) = 1$ jokaisella $x \in K$, niin merkitään

$$K \prec f.$$

Jos $U \subset M$ on sellainen avoin osajoukko, että $\operatorname{supp} f \subset U$, niin merkitään

$$f \prec U.$$

Määritellään nyt joukkofunktio $\mu\colon \mathcal{P}(M) \to [0, \infty]$ seuraavasti. Avoimille osajoukoille $U \subset M$ asetetaan

$$\mu(U) = \sup\{Tf \colon f \prec U\}$$

ja kaikille osajoukoille $E \subset M$ asetetaan

$$\mu(E) = \inf\{\mu(U) \colon E \subset U, U \subset M \text{ avoin}\}.$$

Olkoon Γ_0 sellaisten osajoukkojen $E \subset M$ kokoelma, että $\mu(E) < \infty$ ja

$$\mu(E) = \sup\{\mu(K) \colon K \subset E, K \text{ on kompakti}\}.$$

Nyt voidaan muodostaa kokoelma Γ määrittelemällä

$$\Gamma = \{E \subset M \colon E \cap K \in \Gamma_0 \text{ jokaisella kompaktilla joukolla } K \subset M\}.$$

Tällöin Rieszin esityslauseen nojalla Γ on σ-algebra, joka sisältää Borel-joukot, ja kuvaus $\mu\colon \Gamma \to [0, \infty]$ on mitta, jolla on ominaisuudet (i)-(v):

(i) Kompakteilla joukoilla $K \subset M$ pätee

$$\mu(K) = \inf\{Tf \colon K \prec f\} < \infty.$$

(ii) Funktioilla $f \in C_c(M, \mathbb{R})$ pätee

$$\int_M f \operatorname{vol}_M = \int_M f \mathrm{d}\mu.$$

(iii) Avoimilla joukoilla $E \subset M$ ja sellaisilla joukoilla $E \in \Gamma$, että $\mu(E) < \infty$, pätee

$$\mu(E) = \sup\{\mu(K) \colon K \subset E,\ K \text{ on kompakti}\}.$$

(iv) Mitta μ on numeroituvasti subadditiivinen, eli jokaisella jonolla $E_1, E_2, \ldots \in \Gamma$ pätee

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\right) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu(E_i).$$

(v) Mitta μ on täydellinen.

Huomautus 2.23. Konstruoitava mitta on yksikäsitteinen. Riemannin monistolla $\mathbb{R}^n$ Riemannin mitta on tuttu Lebesguen mitta m ja siihen liittyvä σ-algebra on Leb $\mathbb{R}^n$.

2.6 Lusinin ominaisuudet

Olkoot M suunnistettu n-ulotteinen Riemannin monisto ja μ Riemannin mitta monistolla M. Tässä alaluvussa osoitetaan, että moniston M bilipschitz-jatkuvat karttakuvaukset toteuttavat Lusinin ominaisuudet (N) ja (N^{-1}).

Työssä joukon $E \subset \mathbb{R}^n$ mittaa Lebesguen mitassa merkitään $|E|$.

Lemma 2.24. *Olkoot M suunnistettu n-ulotteinen Riemannin monisto ja μ Riemannin mitta monistolla M. Olkoon pari (V, h) sellainen kartta monistolla M, että karttakuvaus h on L-bilipschitz-jatkuva. Olkoon $E \subset V$ sellainen osajoukko, että $\mu(E) = 0$. Tällöin pätee $|h(E)| = 0$.*

Todistus. Olkoon $\varepsilon > 0$. Tällöin on olemassa sellainen avoin $U \subset V$, että $E \subset U$ ja $\mu(U) < \varepsilon L^{-n}$. Nyt $h(E) \subset h(U) \subset h(V)$ ja $h(U)$ on avoin. Täten

$$|h(E)| \leq |h(U)| = \sup\left\{\int_{\mathbb{R}^n} f \,\mathrm{d}m : f \prec h(U)\right\}.$$

Olkoon $f \in C_c(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ sellainen funktio, että $f \prec h(U)$. Tällöin $f \circ h \prec U$. Koska $\mu(U) < \varepsilon L^{-n}$, niin $T(f \circ h) < \varepsilon L^{-n}$. Täten epäyhtälöstä (2.20) seuraa arvio

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n} f \,\mathrm{d}m &= \int_{h(V)} f \,\mathrm{d}m \leq L^n \int_{h(V)} f J_{h^{-1}} \,\mathrm{d}m = L^n \int_{h(V)} (h^{-1})^*(f \circ h \operatorname{vol}_M) \\ &= L^n \int_M f \circ h \operatorname{vol}_M = L^n T(f \circ h) < \varepsilon.\end{aligned}$$

Näin ollen $|h(U)| \leq \varepsilon$ ja väite on todistettu. $\square$

Lemma 2.25. *Olkoot M suunnistettu n-ulotteinen Riemannin monisto ja μ Riemannin mitta monistolla M. Olkoon pari (V, h) sellainen kartta monistolla M, että karttakuvaus h on L-bilipschitz-jatkuva. Olkoon $E \subset h(V)$ sellainen osajoukko, että $|E| = 0$. Tällöin pätee $\mu(h^{-1}(E)) = 0$.*

Todistus. Olkoon $\varepsilon > 0$. Tällöin on olemassa sellainen avoin $U \subset h(V)$, että $E \subset U$ ja $|U| < \varepsilon L^{-n}$. Nyt $h^{-1}(U)$ on sellainen avoin joukko, että $h^{-1}(E) \subset h^{-1}(U)$. Näin ollen pätee $\mu(h^{-1}(E)) \leq \mu(h^{-1}(U))$. Olkoon $f \in C_c(M, \mathbb{R})$ sellainen funktio, että $f \prec h^{-1}(U) \subset V$. Nyt epäyhtälön (2.20) nojalla saadaan arvio

$$Tf = \int_M f \operatorname{vol}_M = \int_{h(V)} (h^{-1})^*(f \operatorname{vol}_M) = \int_U (f \circ h^{-1}) J_{h^{-1}} \, \mathrm{d}m \leq L^n \, |U| < \varepsilon.$$

Täten $\mu(h^{-1}(U)) \leq \varepsilon$ ja väite seuraa. $\square$

Luku 3

De Rhamin kohomologia

Tämä luku käsittelee de Rhamin kohomologiaan ja harmonisiin muotoihin liittyviä määritelmiä ja tuloksia. Tärkeimpiä tuloksia ovat Poincarén duaaliteetti ja Hodgen lause.

3.1 Poincarén duaaliteetti

Tässä alaluvussa tarkastellaan de Rhamin kohomologiaa ja Poincarén duaaliteettia. Alaluvun tulokset oletetaan tunnetuiksi eikä niitä todisteta, mutta tarvittaessa lukija voi tutustua teokseen [13].

Määritelmä 3.1. Sileän moniston M ℓ:s *de Rhamin kohomologia* on vektoriavaruus

$$H^\ell(M) = \frac{\{\text{moniston } M \text{ suljetut } \ell-\text{muodot}\}}{\{\text{moniston } M \text{ eksaktit } \ell-\text{muodot}\}} = \frac{\{\omega \in \Omega^\ell(M) \colon d\omega = 0\}}{\{d\tau \colon \tau \in \Omega^{\ell-1}(M)\}}.$$

Olkoon M kompakti, yhtenäinen ja suunnistettu sileä n-monisto. Seuraava propositio kertoo, että sileiden suljettujen n-muotojen integroiminen yli moniston M antaa isomorfismin de Rhamin kohomologian $H^n(M)$ ja reaalilukujen välille. Erityisesti, jos $\omega \in \Omega^n(M)$ on sellainen suljettu muoto, että $\int_M \omega = 0$, niin ω on eksakti.

Propositio 3.2. [13, Corollary 10.14, s. 91] *Olkoon M kompakti, yhtenäinen ja suunnistettu sileä n-monisto. Tällöin kuvaus*

$$\int_M \colon H^n(M) \to \mathbb{R}, \quad [\omega] \mapsto \int_M \omega,$$

on isomorfismi.

Olkoon M kompakti, yhtenäinen ja suunnistettu sileä n-monisto. Seuraava lause, joka on tunnettu Poincarén duaaliteettina, antaa propositiota 3.2 yleisemmän tuloksen. Poincarén duaaliteetti antaa isomorfismin de Rhamin kohomologian $H^\ell(M)$ ja de Rhamin kohomologian $H^{n-\ell}(M)$ duaalin välille jokaisella $\ell \in \{0, \ldots, n\}$. Tässäkin isomorfismi syntyy sileiden suljettujen n-muotojen integroimisesta yli moniston M.

Lause 3.3. [13, Theorem 13.5 (Poincarén duaaliteetti), s. 131] *Olkoon M kompakti, yhtenäinen ja suunnistettu sileä n-monisto. Tällöin kuvaus*

$$D_M^\ell \colon H^\ell(M) \to H^{n-\ell}(M)^*, \quad [\omega] \mapsto \left([\tau] \mapsto \int_M \omega \wedge \tau\right),$$

on isomorfismi jokaisella $\ell \in \{0, \ldots, n\}$.

Olkoon M kompakti, yhtenäinen ja suunnistettu sileä n-monisto. Seuraavat kaksi tulosta kertovat, että moniston M de Rhamin kohomologiat ovat äärellisulotteisia, jolloin Poincarén duaaliteetista saatu avaruuksien $H^\ell(M)$ ja $H^{n-\ell}(M)^*$ välinen isomorfismi antaa isomorfismin avaruuksien $H^\ell(M)$ ja $H^{n-\ell}(M)$ välille. Tämä symmetria de Rhamin kohomologioiden välillä yksinkertaistaa lauseen 1.2 todistusta.

Propositio 3.4. [13, Corollary 9.25, s. 80] *Olkoon M kompakti sileä n-monisto. Tällöin $H^\ell(M)$ on äärellisulotteinen jokaisella $\ell \in \{0, \ldots, n\}$.*

Korollaari 3.5. *Olkoon M kompakti, yhtenäinen ja suunnistettu sileä n-monisto. Tällöin $H^\ell(M) \cong H^{n-\ell}(M)$ jokaisella $\ell \in \{0, \ldots, n\}$.*

Todistus. Lauseen 3.3 nojalla pätee $H^\ell(M) \cong H^{n-\ell}(M)^*$. Lisäksi lauseen 3.4 perusteella avaruus $H^{n-\ell}(M)$ on äärellisulotteinen, joten $H^{n-\ell}(M) \cong H^{n-\ell}(M)^*$. Täten $H^\ell(M) \cong H^{n-\ell}(M)^* \cong H^{n-\ell}(M)$. □

Olkoot $n \geq 2$ ja M kompakti, yhtenäinen ja suunnistettu n-ulotteinen Riemannin monisto. Korollaarin 3.5 nojalla lauseen 1.2 todistuksessa riittää tarkastella tapauksia $0 \leq \ell \leq \frac{n}{2}$. Lisäksi monisto M on yhtenäinen, joten $\dim H^0(M) = \dim \mathbb{R} = 1$ ja tapauksessa $\ell = 0$ saadaan haluttu yläraja kohomologian dimensiolle. Jatkossa voidaan siis olettaa, että $1 \leq \ell \leq \frac{n}{2}$. Lisäksi haluttu yläraja pätee triviaalisti, jos $H^\ell(M) = 0$, joten voidaan olettaa, että $H^\ell(M) \neq 0$.

3.2 Suljettujen differentiaalimuotojen duaalijono

Tässä alaluvussa esitellään de Rhamin kohomologian ekvivalenssiluokkien duaalijonon käsite, jolla on läheinen yhteys Poincarén duaaliteetin kanssa.

Määritelmä 3.6. Olkoot M sileä n-monisto ja $([\alpha_1], \ldots, [\alpha_k])$ avaruuden $H^\ell(M)$ jono. Avaruuden $H^{n-\ell}(M)$ jonoa $([\beta_1], \ldots, [\beta_k])$ kutsutaan jonon $([\alpha_1], \ldots, [\alpha_k])$ *duaalijonoksi*, jos

$$\int_M \alpha_i \wedge \beta_j = \delta_{ij}$$

jokaisella $i = 1, \ldots, k$ ja jokaisella $j = 1, \ldots, k$. Erikoistapauksessa $k = 1$ voidaan myös puhua duaaliparista $[\alpha]$ ja $[\beta]$.

Olkoot M kompakti, yhtenäinen ja suunnistettu sileä n-monisto, $([\alpha_1], \ldots, [\alpha_k])$ avaruuden $H^\ell(M)$ jono ja $([\beta_1], \ldots, [\beta_k])$ avaruuden $H^{n-\ell}(M)$ jono. Koska

$$\int_M \alpha_i \wedge \beta_j = \left(D_M^\ell[\alpha_i]\right)([\beta_j]),$$

niin jono $([\beta_1], \ldots, [\beta_k])$ on jonon $([\alpha_1], \ldots, [\alpha_k])$ duaalijono, jos ja vain jos

$$\left(D_M^\ell[\alpha_i]\right)([\beta_j]) = \delta_{ij}$$

jokaisella $i = 1, \ldots, k$ ja jokaisella $j = 1, \ldots, k$. Todistetaan nyt duaalijonon olemassaolo de Rhamin kohomologian kannalle käyttämällä tätä yhteyttä Poincarén duaaliteetin kanssa.

Lause 3.7. *Olkoon M kompakti, yhtenäinen ja suunnistettu sileä n-monisto. Olkoon $([\alpha_1], \ldots, [\alpha_k])$ avaruuden $H^\ell(M)$ kanta. Tällöin on olemassa jonon $([\alpha_1], \ldots, [\alpha_k])$ duaalijono $([\beta_1], \ldots, [\beta_k])$.*

Todistus. Koska $([\alpha_1], \ldots, [\alpha_k])$ on avaruuden $H^\ell(M)$ kanta ja lauseen 3.3 nojalla kuvaus $D_M^\ell \colon H^\ell(M) \to H^{n-\ell}(M)^*$ on isomorfismi, niin $(D_M^\ell[\alpha_1], \ldots, D_M^\ell[\alpha_k])$ on avaruuden $H^{n-\ell}(M)^*$ kanta. Tällöin avaruudella $H^{n-\ell}(M)^{**}$ on duaalikanta $(\gamma_1, \ldots, \gamma_k)$, missä funktio $\gamma_i \colon H^{n-\ell}(M)^* \to \mathbb{R}$ toteuttaa ehdon $\gamma_i(D_M^\ell[\alpha_j]) = \delta_{ij}$ jokaisella $i = 1, \ldots, k$ ja jokaisella $j = 1, \ldots, k$.

Kuvaus $T \colon H^{n-\ell}(M) \to H^{n-\ell}(M)^{**}$, joka on määritelty kaavalla $(T\delta)(\gamma) = \gamma(\delta)$ jokaisella $\delta \in H^{n-\ell}(M)$ ja jokaisella $\gamma \in H^{n-\ell}(M)^*$, on isomorfismi. Täten on olemassa sellaiset $[\beta_1], \ldots, [\beta_k] \in H^{n-\ell}(M)$, että $T[\beta_i] = \gamma_i$ jokaisella $i = 1, \ldots, k$. Nyt

$$\int_M \alpha_i \wedge \beta_j = \left(D_M^\ell[\alpha_i]\right)([\beta_j]) = (T[\beta_j])\,(D_M^\ell[\alpha_i]) = \gamma_j(D_M^\ell[\alpha_i]) = \delta_{ij}$$

jokaisella $i = 1, \ldots, k$ ja jokaisella $j = 1, \ldots, k$. $\square$

3.3 Harmoninen muoto

Tässä alaluvussa käsitellään harmonisia muotoja ja niihin liittyviä käsitteitä; katso [20, luku 6].

Olkoon M kompakti ja suunnistettu n-ulotteinen Riemannin monisto ja $x \in M$. Koska avaruus $\Lambda^\ell(T_xM)$ on äärellisulotteinen sisätuloavaruus, niin jokaisella $\omega \in \Lambda^\ell(T_xM)$ on olemassa yksikäsitteinen avaruuden $\Lambda^{n-\ell}(T_xM)$ alkio $*\omega$, joka toteuttaa ehdon

$$\omega \wedge \tau = \langle *\omega, \tau \rangle_{\Lambda^\ell(T_xM)} (\mathrm{vol}_M)_x \tag{3.8}$$

jokaisella $\tau \in \Lambda^\ell(T_xM)$. *Hodgen tähtioperaattori* on lineaarikuvaus

$$*\colon \Lambda^\ell(T_xM) \to \Lambda^{n-\ell}(T_xM), \quad \omega \mapsto *\omega.$$

Seuraava lemma osoittaa, että Hodgen tähtioperaattori kuvaa ortonormaalit kannat yksinkertaisella kaavalla ortonormaaleille kannoille.

Lemma 3.9. *Olkoot M kompakti ja suunnistettu n-ulotteinen Riemannin monisto ja $x \in M$. Olkoon $(e_1, \dots, e_n)$ avaruuden T_xM positiivisesti suunnistettu ortonormaali kanta ja $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$ sitä vastaava duaalikanta. Tällöin*

$$*(\varepsilon_{\sigma(1)} \wedge \cdots \wedge \varepsilon_{\sigma(\ell)}) = \mathrm{sgn}(\sigma)\, \varepsilon_{\sigma(\ell+1)} \wedge \cdots \wedge \varepsilon_{\sigma(n)} \tag{3.10}$$

jokaisella $\sigma \in S(\ell, n-\ell)$. Lisäksi Hodgen tähtioperaattori $*\colon \Lambda^\ell(T_xM) \to \Lambda^{n-\ell}(T_xM)$ on isometria.

Todistus. Olkoon $\sigma \in S(\ell, n-\ell)$. Koska $\varepsilon_1 \wedge \cdots \wedge \varepsilon_n \in \Lambda^n(T_xM)$ ja avaruus $\Lambda^n(T_xM)$ on yksiulotteinen, niin on olemassa sellainen vakio C, että $\varepsilon_1 \wedge \cdots \wedge \varepsilon_n = C(\mathrm{vol}_M)_x$. Jono $(e_1, \dots, e_n)$ on avaruuden T_xM positiivisesti suunnistettu ortonormaali kanta ja vol_M on Riemannin tilavuusmuoto, joten

$$1 = \varepsilon_1 \wedge \cdots \wedge \varepsilon_n(e_1, \dots, e_n) = C(\mathrm{vol}_M)_x(e_1, \dots, e_n) = C.$$

Täten $\varepsilon_1 \wedge \cdots \wedge \varepsilon_n = (\mathrm{vol}_M)_x$ ja

$$\begin{aligned}
&\varepsilon_{\sigma(1)} \wedge \cdots \wedge \varepsilon_{\sigma(\ell)} \wedge \varepsilon_{\sigma(\ell+1)} \wedge \cdots \wedge \varepsilon_{\sigma(n)} \\
&\quad = \mathrm{sgn}(\sigma)\, \varepsilon_1 \wedge \cdots \wedge \varepsilon_n = \mathrm{sgn}(\sigma)\, (\mathrm{vol}_M)_x \\
&\quad = \mathrm{sgn}(\sigma)\, \big\langle \varepsilon_{\sigma(\ell+1)} \wedge \cdots \wedge \varepsilon_{\sigma(n)}, \varepsilon_{\sigma(\ell+1)} \wedge \cdots \wedge \varepsilon_{\sigma(n)} \big\rangle_{\Lambda^{n-\ell}(T_xM)} (\mathrm{vol}_M)_x \\
&\quad = \big\langle \mathrm{sgn}(\sigma)\, \varepsilon_{\sigma(\ell+1)} \wedge \cdots \wedge \varepsilon_{\sigma(n)}, \varepsilon_{\sigma(\ell+1)} \wedge \cdots \wedge \varepsilon_{\sigma(n)} \big\rangle_{\Lambda^{n-\ell}(T_xM)} (\mathrm{vol}_M)_x.
\end{aligned}$$

Tämä osoittaa yhtälön 3.10. Yhtälö 3.10 taas osoittaa, että Hodgen tähtioperaattori $*\colon \Lambda^\ell(T_xM) \to \Lambda^{n-\ell}(T_xM)$ kuvaa avaruuden $\Lambda^\ell(T_xM)$ ortonormaalin kannan avaruuden $\Lambda^{n-\ell}(T_xM)$ ortonormaaliksi kannaksi. Näin ollen Hodgen tähtioperaattori on isometria. □

Koska Hodgen tähtioperaattori on isometria, niin se toteuttaa myös seuraavan vaihtoehtoisen muotoilun yhtälöstä (3.8).

Lemma 3.11. *Olkoot M kompakti ja suunnistettu n-ulotteinen Riemannin monisto ja $x \in M$. Tällöin*

$$\omega \wedge *\tau = \langle \omega, \tau \rangle_{\Lambda^\ell(T_xM)} (\mathrm{vol}_M)_x \tag{3.12}$$

jokaisella $\omega \in \Lambda^\ell(T_xM)$ ja jokaisella $\tau \in \Lambda^\ell(T_xM)$.

Todistus. Olkoot $\omega, \tau \in \Lambda^\ell(T_xM)$. Käyttämällä yhtälöä (3.8) ja lemmaa 3.9 saadaan yhtäsuuruus

$$\omega \wedge *\tau = \langle *\omega, *\tau \rangle_{\Lambda^\ell(T_xM)} (\mathrm{vol}_M)_x = \langle \omega, \tau \rangle_{\Lambda^\ell(T_xM)} (\mathrm{vol}_M)_x.$$

□

Osoitetaan seuraavassa lemmassa, että yhdistetty Hodgen tähtioperaattori yksinkertaistuu mahdolliseksi merkinvaihdoksi.

Lemma 3.13. *Olkoot M kompakti ja suunnistettu n-ulotteinen Riemannin monisto ja $x \in M$. Yhdistetty Hodgen tähtioperaattori $**\colon \Lambda^\ell(T_xM) \to \Lambda^\ell(T_xM)$ toteuttaa yhtälön $** = (-1)^{\ell(n-\ell)}$.*

Todistus. Olkoon $\omega \in \Lambda^\ell(T_xM)$. Osoitetaan, että jokaisella $\tau \in \Lambda^\ell(T_xM)$ pätee

$$\langle **\omega, \tau \rangle_{\Lambda^\ell(T_xM)} (\mathrm{vol}_M)_x = \left\langle (-1)^{\ell(n-\ell)}\omega, \tau \right\rangle_{\Lambda^\ell(T_xM)} (\mathrm{vol}_M)_x.$$

Koska $(\mathrm{vol}_M)_x \neq 0$, niin tämä todistaa väitteen.

Olkoon $\tau \in \Lambda^\ell(T_xM)$. Tällöin yhtälön (3.8) ja lemman 3.9 nojalla saadaan, että pätee

$$\begin{aligned}
\langle **\omega, \tau \rangle_{\Lambda^\ell(T_xM)} (\mathrm{vol}_M)_x &= *\omega \wedge \tau = (-1)^{\ell(n-\ell)}(\tau \wedge *\omega) \\
&= (-1)^{\ell(n-\ell)} \langle *\tau, *\omega \rangle_{\Lambda^{n-\ell}(T_xM)} (\mathrm{vol}_M)_x \\
&= (-1)^{\ell(n-\ell)} \langle \tau, \omega \rangle_{\Lambda^\ell(T_xM)} (\mathrm{vol}_M)_x \\
&= \left\langle (-1)^{\ell(n-\ell)}\omega, \tau \right\rangle_{\Lambda^\ell(T_xM)} (\mathrm{vol}_M)_x.
\end{aligned}$$

□

Olkoon M kompakti ja suunnistettu n-ulotteinen Riemannin monisto. Hodgen tähtioperaattoriksi kutsutaan myös lineaarikuvausta $*\colon \Omega^\ell(M) \to \Omega^{n-\ell}(M)$, joka on määritelty pisteittäin Hodgen tähtioperaattorilla $*\colon \Lambda^\ell(T_xM) \to \Lambda^{n-\ell}(T_xM)$.

Käyttämällä Hodgen tähtioperaattoria ja ulkoista derivaattaa voidaan määritellä seuraavat operaattorit. *Kodifferentiaalioperaattori* on lineaarikuvaus $\delta\colon \Omega^\ell(M) \to \Omega^{\ell-1}(M)$, joka on määritelty kaavalla $\delta = (-1)^{n(\ell+1)+1} * d *$. *Laplacen operaattori* on lineaarikuvaus $\Delta\colon \Omega^\ell(M) \to \Omega^\ell(M)$, joka on määritelty kaavalla $\Delta = \delta d + d\delta$.

Lemma 3.14. *Olkoon M kompakti ja suunnistettu n-ulotteinen Riemannin monisto. Laplacen operaattori ja Hodgen tähtioperaattori kommutoivat.*

Todistus. Halutaan osoittaa, että kuvaukset $*\Delta\colon \Omega^\ell(M) \to \Omega^{n-\ell}(M)$ ja $\Delta*\colon \Omega^\ell(M) \to \Omega^{n-\ell}(M)$ ovat sama kuvaus. Tutkitaan ensin kuvausta $*\Delta$. Lemman 3.13 nojalla pätee, että

$$\begin{aligned} *\Delta &= *(\delta d + d\delta) = *\delta d + *d\delta = *((-1)^{n(\ell+2)+1} * d*)d + *d((-1)^{n(\ell+1)+1} * d*) \\ &= (-1)^{n(\ell+2)+1} * * d * d + (-1)^{n(\ell+1)+1} * d * d * \\ &= (-1)^{n(\ell+2)+1}(-1)^{\ell(n-\ell)} d * d + (-1)^{n(\ell+1)+1} * d * d * . \end{aligned}$$

Koska

$$\Delta* = (\delta d + d\delta)* = \delta d * + d\delta*,$$

niin riittää osoittaa, että

$$(-1)^{n(\ell+2)+1}(-1)^{\ell(n-\ell)} d * d = d\delta* \tag{3.15}$$

ja

$$(-1)^{n(\ell+1)+1} * d * d* = \delta d * . \tag{3.16}$$

Käyttämällä lemmaa 3.13 uudestaan saadaan, että pätee

$$d\delta* = d((-1)^{n(n-\ell+1)+1} * d*)* = (-1)^{n(n-\ell+1)+1} d * d * * = (-1)^{n(n-\ell+1)+1}(-1)^{\ell(n-\ell)} d * d.$$

Täten yhtäsuuruus $(-1)^{n(\ell+2)+1} = (-1)^{n(n-\ell+1)+1}$ osoittaa yhtälön (3.15). Koska

$$\delta d* = ((-1)^{n(n-\ell+2)+1} * d*)d* = (-1)^{n(n-\ell+2)+1} * d * d*$$

ja $(-1)^{n(n-\ell+2)+1} = (-1)^{n(\ell+1)+1}$, niin on osoitettu myös yhtälö (3.16). Näin ollen väite on todistettu. □

Määritelmä 3.17. Olkoon M kompakti ja suunnistettu n-ulotteinen Riemannin monisto. Differentiaalimuoto $\omega \in \Omega^\ell(M)$ on *harmoninen muoto*, jos $\Delta\omega = 0$.

Seuraava propositio antaa luonnehdinnan harmonisille muodoille kodifferentiaalioperaattorin ja ulkoisen derivaatan suhteen; katso [20, 6.3 Proposition, s. 221].

Propositio 3.18. *Olkoot M kompakti ja suunnistettu n-ulotteinen Riemannin monisto ja δ kodifferentiaalioperaattori. Tällöin differentiaalimuoto $\omega \in \Omega^\ell(M)$ on harmoninen muoto, jos ja vain jos sekä $d\omega = 0$ että $\delta\omega = 0$.*

Todistetaan proposition 3.18 todistusta varten seuraava lemma; katso [20, 6.2 Proposition, s. 221].

Lemma 3.19. *Olkoot M kompakti ja suunnistettu n-ulotteinen Riemannin monisto ja δ kodifferentiaalioperaattori. Tällöin*

$$\int_M d\omega \wedge *\tau = \int_M \omega \wedge *\delta\tau \tag{3.20}$$

jokaisella $\omega \in \Omega^\ell(M)$ ja jokaisella $\tau \in \Omega^{\ell+1}(M)$.

Todistus. Olkoot $\omega \in \Omega^\ell(M)$ ja $\tau \in \Omega^{\ell+1}(M)$. Lemman 3.13 perusteella pätee

$$*\delta\tau = *((-1)^{n(\ell+2)+1} * d*)\tau = (-1)^{n(\ell+2)+1}(-1)^{\ell(n-\ell)} d * \tau = (-1)^{\ell+1} d * \tau.$$

Täten

$$d(\omega \wedge *\tau) = d\omega \wedge *\tau + (-1)^\ell \omega \wedge d * \tau = d\omega \wedge *\tau - \omega \wedge *\delta\tau$$

ja väite seuraa Stokesin lauseesta [13, Theorem 10.8 (Stokesin lause), s. 88]. □

Proposition 3.18 todistus. Olkoon $\omega \in \Omega^\ell(M)$. Oletetaan, että $d\omega = 0$ ja $\delta\omega = 0$. Tällöin $\Delta\omega = (\delta d + d\delta)\omega = \delta d\omega + d\delta\omega = 0$, joten ω on harmoninen muoto. Tämä todistaa väitteen yhden suunnan.

Todistetaan nyt väitteen toinen suunta. Oletetaan, että ω on harmoninen muoto. Tällöin voidaan kirjoittaa

$$0 = \int_M \Delta\omega \wedge *\omega = \int_M (\delta d + d\delta)\omega \wedge *\omega = \int_M \delta d\omega \wedge *\omega + \int_M d\delta\omega \wedge *\omega$$

ja tutkia erikseen summan termejä.

Käyttämällä yhtälöitä (3.19) ja (3.12) summan toiseen termiin saadaan yhtäsuuruus

$$\int_M d\delta\omega \wedge *\omega = \int_M \delta\omega \wedge *\delta\omega = \int_M \langle \delta\omega, \delta\omega \rangle \operatorname{vol}_M,$$

missä funktio $\langle \delta\omega, \delta\omega \rangle$ on pisteittäin sisätulo $\langle (\delta\omega)_x, (\delta\omega)_x \rangle_{\Lambda^{\ell-1}(T_xM)}$.

Vastaavasti summan ensimmäiselle termille saadaan yhtälöiden (3.19) ja (3.12) nojalla yhtäsuuruus

$$\begin{aligned} \int_M \delta d\omega \wedge *\omega &= \int_M \langle \delta d\omega, \omega \rangle \operatorname{vol}_M = \int_M \langle \omega, \delta d\omega \rangle \operatorname{vol}_M = \int_M \omega \wedge *\delta d\omega \\ &= \int_M d\omega \wedge *d\omega = \int_M \langle d\omega, d\omega \rangle \operatorname{vol}_M, \end{aligned}$$

missä funktio $\langle d\omega, d\omega \rangle$ on pisteittäin sisätulo $\langle (d\omega)_x, (d\omega)_x \rangle_{\Lambda^{\ell+1}(T_xM)}$.

Näin ollen

$$0 = \int_M \langle \delta\omega, \delta\omega \rangle \operatorname{vol}_M + \int_M \langle d\omega, d\omega \rangle \operatorname{vol}_M,$$

joten $\delta\omega = 0$ ja $d\omega = 0$. Täten on todistettu myös väitteen toinen suunta. □

3.4 Hodgen lause

Tässä alaluvussa lausutaan todistamatta harmonisten muotojen tärkeä tulos, että kompaktin ja suunnistetun Riemannin moniston jokaisella de Rhamin kohomologian ekvivalenssiluokalla on yksikäsitteinen harmoninen edustaja. Lause tunnetaan Hodgen lauseena.

Lause 3.21. [20, 6.11 Theorem, s. 225] *Olkoot M kompakti, yhtenäinen ja suunnistettu n-ulotteinen Riemannin monisto ja $c \in H^\ell(M)$. Tällöin ekvivalenssiluokalla c on yksikäsitteinen harmoninen edustaja ω_c.*

Muotoillaan lauseesta 3.21 käytännöllinen korollaari, jota tarvitaan työssä.

Korollaari 3.22. *Olkoon M kompakti, yhtenäinen ja suunnistettu n-ulotteinen Riemannin monisto. Oletetaan, että $H^\ell(M) \neq 0$. Tällöin on olemassa sellaiset suljetut differentiaalimuodot $\alpha \in \Omega^\ell(M)$ ja $\beta \in \Omega^{n-\ell}(M)$, että $\alpha \wedge \beta = f \operatorname{vol}_M$, missä $f \in C^\infty(M, \mathbb{R})$ on ei-negatiivinen funktio, joka ei ole vakiofunktio nolla.*

Todistus. Koska $H^\ell(M) \neq 0$, niin on olemassa sellainen ekvivalenssiluokka $c \in H^\ell(M)$, että $c \neq 0$. Lauseen 3.21 nojalla ekvivalenssiluokalla c on yksikäsitteinen harmoninen edustaja ω_c. Osoitetaan, että voidaan valita $\alpha = \omega_c$ ja $\beta = *\alpha$, missä $*\colon \Omega^\ell(M) \to \Omega^{n-\ell}(M)$ on Hodgen tähtioperaattori.

Lemman 3.14 nojalla myös differentiaalimuoto β on harmoninen muoto. Näin ollen differentiaalimuodot α ja β ovat suljettuja proposition 3.18 perusteella. Lisäksi yhtälön (3.12) nojalla pätee yhtälö

$$\alpha \wedge \beta = \langle \alpha, \alpha \rangle \operatorname{vol}_M,$$

missä sileä ja ei-negatiivinen funktio $\langle \alpha, \alpha \rangle$ on pisteittäin sisätulo $\langle \alpha_x, \alpha_x \rangle_{\Lambda^\ell(T_x M)}$. Koska $\alpha \in c \neq 0$, niin funktio $\langle \alpha, \alpha \rangle$ ei ole vakiofunktio nolla. Tämä todistaa väitteen. $\square$

3.5 Riemannin tilavuusmuodon esitys

Olkoon M kompakti, yhtenäinen ja suunnistettu n-ulotteinen Riemannin monisto. Olkoot $\omega \in \Omega^\ell(M)$ ja $\tau \in \Omega^{n-\ell}(M)$ sellaisia differentiaalimuotoja, että $\omega \wedge \tau = g \operatorname{vol}_M$, missä $g \in C^\infty(M, \mathbb{R})$ on positiivinen funktio. Tällöin Riemannin tilavuusmuoto vol_M voidaan kirjoittaa differentiaalimuotojen ω ja τ avulla muodossa $\operatorname{vol}_M = \frac{1}{g}\, \omega \wedge \tau$.

Olkoot $\alpha \in \Omega^\ell(M)$ ja $\beta \in \Omega^{n-\ell}(M)$ sellaisia differentiaalimuotoja, että $\alpha \wedge \beta = f \operatorname{vol}_M$, missä funktio $f \in C^\infty(M, \mathbb{R})$ on ei-negatiivinen funktio, joka ei ole vakiofunktio nolla. Tällaisia differentiaalimuotoja esiintyy korollaarin 3.22 seurauksena. Koska funktio f voi saada myös arvon nolla, niin Riemannin esitysmuodolle vol_M ei saada esitystä differentiaalimuotojen α ja β avulla yhtä suoraviivaisesti kuin differentiaalimuotojen ω ja τ avulla.

Tässä alaluvussa etsitään Riemannin tilavuusmuodolle esitys differentiaalimuotojen α ja β avulla käyttämällä hyväksi tietoa, että funktio f ei ole vakiofunktio nolla; katso [14, Lemma 2.3, s. 870].

Lemma 3.23. *Olkoon M kompakti, yhtenäinen ja suunnistettu n-ulotteinen Riemannin monisto. Olkoot $\alpha \in \Omega^\ell(M)$ ja $\beta \in \Omega^{n-\ell}(M)$ sellaisia differentiaalimuotoja, että $\alpha \wedge \beta = f \operatorname{vol}_M$, missä $f \in C^\infty(M, \mathbb{R})$ on ei-negatiivinen funktio, joka ei ole vakiofunktio nolla. Tällöin on olemassa sellainen sileä ykkösenositus $\{\lambda_\nu\}_{\nu=1}^k$ monistolla M, että*

$$\operatorname{vol}_M = c \sum_{\nu=1}^{k} \lambda_\nu \Phi_\nu^*(\alpha \wedge \beta), \tag{3.24}$$

missä $c \in C^\infty(M, \mathbb{R})$ on positiivinen funktio ja kuvaus $\Phi_\nu \colon M \to M$ on suunnansäilyttävä diffeomorfismi jokaisella $\nu = 1, \ldots, k$.

Todistetaan lemman 3.23 todistusta varten seuraava lemma; katso [7, Isotopy Lemma, s. 142].

Lemma 3.25. *Olkoot M yhtenäinen sileä n-monisto, $a \in M$ ja $x \in M$. Tällöin on olemassa sellainen suunnansäilyttävä diffeomorfismi $\Phi \colon M \to M$, että $\Phi(x) = a$.*

Todistus. Määritellään moniston M relaatio $\sim$ ehdolla $y \sim z$, jos on olemassa sellainen suunnanasäilyttävä diffeomorfismi $\Psi \colon M \to M$, että $\Psi(y) = z$. Tällöin määritelty relaatio $\sim$ on ekvivalenssirelaatio, joten voidaan tutkia ekvivalenssiluokkia. Osoitetaan, että ekvivalenssiluokat ovat avoimia joukkoja, jolloin monisto M on on yhdiste erillisistä avoimista joukoista. Koska monisto M on yhtenäinen, niin tämän nojalla on olemassa vain yksi ekvivalenssiluokka, eli $x \sim a$ ja väite on todistettu.

Alustetaan ensin tilannetta euklidisessa avaruudessa $\mathbb{R}^n$ ja palautetaan sitten yleinen tapaus euklidiseen avaruuteen kartoilla. Olkoot $\rho \in C_c^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ ja $\sigma \in C_c^\infty(\mathbb{R}^{n-1}, \mathbb{R})$ sellaisia funktioita, että $\operatorname{supp} \rho \subset]-\varepsilon, \varepsilon[$, $\rho(0) = 1$, $\operatorname{supp} \sigma \subset B^{n-1}(0, \delta)$ ja $\sigma(0) = 1$. Tällöin on olemassa sellaiset vakiot $C_0, C_1 \in \mathbb{R}$, että $|\rho'(t)| \leq C_0$ jokaisella $t \in \mathbb{R}$ ja $|\sigma(p)| \leq C_1$ jokaisella $p \in \mathbb{R}^{n-1}$.

Määritellään jokaisella $s \in]-\frac{1}{C_0}, \frac{1}{C_0}[$ sileä funktio $f_s \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $t \mapsto t + \rho(t)s$. Tällöin $f_s(t) = t$ jokaisella $t \notin]-\varepsilon, \varepsilon[$, $f_s(0) = s$ ja $f_s'(t) = 1 + \rho'(t)s > 0$ jokaisella $t \in \mathbb{R}$. Koska $f_s \in C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ ja $f_s' > 0$, niin käänteiskuvauslauseen nojalla funktio f_s on suunnansäilyttävä diffeomorfismi.

Kirjoitetaan $\mathbb{R}^n = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{n-1}$ ja määritellään jokaisella $s \in]-\frac{1}{C_0 C_1}, \frac{1}{C_0 C_1}[$ sileä funktio $g_s \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $(t, v) \mapsto (t + \sigma(v)\rho(t)s, v)$. Tällöin $g_s(t, v) = (t, v)$ jokaisella $t \notin]-\varepsilon, \varepsilon[$ ja jokaisella $v \notin B^{n-1}(0,\delta)$. Lisäksi $g_s(0) = (s,0)$ ja

$$Dg_s(t,v) = \begin{pmatrix} 1+\sigma(v)\rho'(t)s & \rho(t)s\frac{\partial\sigma}{\partial v_1}(v) & \dots & \rho(t)s\frac{\partial\sigma}{\partial v_{n-1}}(v) \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

jokaisella $(t,v) \in \mathbb{R}^n$. On saatu, että $g_s \in C^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ ja $\det Dg_s = 1 + \sigma(z)\rho'(t)s > 0$, joten käänteiskuvauslauseen nojalla kuvaus g_s on suunnansäilyttävä diffeomorfismi.

Olkoon $y \in M$. Tällöin voidaan valita sellainen moniston M kartta (V,h), että $y \in V$ ja $h(y) = 0$. Voidaan edelleen valita sellainen pisteen y ympäristö $U \subset V$, että $|h(z)| < \min\{\frac{1}{C_0}, \frac{1}{C_0C_1}\}$ jokaisella $z \in U$.

Määritellään nyt jokaisella $z \in U$ sellainen suunnansäilyttävä diffeomorfismi $h_z\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, että $h_z(0) = h(z)$. Tämän jälkeen käyttämällä kuvausta h_z voidaan määritellä sellainen suunnansäilyttävä diffeomorfismi $\Psi_z\colon M \to M$, että $\Psi_z(y) = z$.

Tapauksessa $n = 1$ voidaan valita $h_z = f_{h(z)}$. Kun $n > 1$ voidaan kiertää avaruuden $\mathbb{R}^n$ kahta ensimmäistä akselia suunnansäilyttävällä diffeomorfismilla $A\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$,

$$A(w) = \begin{pmatrix} \cos\zeta & \sin\zeta & 0 \\ -\sin\zeta & \cos\zeta & 0 \\ 0 & 0 & I \end{pmatrix} w.$$

Valitaan sellainen kulma $\zeta \in [0, 2\pi[$, että $A(h(z)) = (s,0)$ jollakin $s \in \mathbb{R}$. Koska $|s| = |h(z)|$, niin kuvaus g_s on määritelty, ja voidaan asettaa $h_z = A^{-1} \circ g_s \circ A$.

Valitsemalla ε ja δ riittävän pieniksi voidaan valita sellainen pisteen y ympäristö W, että $\overline{W} \subset V$, $h^{-1} \circ h_z \circ h = \mathrm{id}$ joukossa $V \setminus W$ ja $h_z \circ h(W) \subset h(V)$. Täten kuvaus $\Psi_z\colon M \to M$,

$$\Psi_z = \begin{cases} h^{-1} \circ h_z \circ h, & \text{joukossa } V, \\ \mathrm{id}, & \text{muulloin}, \end{cases}$$

on hyvin määritelty suunnansäilyttävä diffeomorfismi, ja

$$\Psi_z(y) = h^{-1} \circ h_z \circ h(y) = h^{-1} \circ h_z(0) = h^{-1}(h(z)) = z.$$

□

Lemman 3.23 todistus. Olkoon $a \in M$ jokin sellainen piste, että $f(a) > 0$. Tällöin pisteellä a on olemassa sellainen ympäristö U, että funktio f on positiivinen joukossa U. Olkoon jokaisella $x \in M$ kuvaus $\Phi_x\colon M \to M$ sellainen suunnansäilyttävä diffeomorfismi, että $\Phi_x(x) = a$. Lemman 3.25 perusteella tällainen suunnansäilyttävä diffeomorfismi on olemassa jokaisella $x \in M$. Nyt kokoelma $\{\Phi_x^{-1}(U)\}_{x \in M}$ on kompaktin moniston M

avoin peite, joten voidaan valita äärellinen osapeite $\{\Phi_{x_\nu}^{-1}(U)\}_{\nu=1}^k$. Olkoon $\{\lambda_\nu\}_{\nu=1}^k$ avoimen peitteen $\{\Phi_{x_\nu}^{-1}(U)\}_{\nu=1}^k$ alistama sileä ykkösenositus monistolla M.

Olkoot

$$\omega = \sum_{\nu=1}^{k} \lambda_\nu \Phi_{x_\nu}^*(\alpha \wedge \beta) \in \Omega^n(M)$$

ja

$$\tilde{c} = \sum_{\nu=1}^{k} \lambda_\nu (f \circ \Phi_{x_\nu}) J_{\Phi_{x_\nu}} \in C^\infty(M, \mathbb{R}).$$

Riittää osoittaa, että $\omega = \tilde{c}\,\mathrm{vol}_M$, missä funktio $\tilde{c}$ on positiivinen.

Olkoon $x \in M$. Tällöin

$$\begin{aligned}\left(\Phi_{x_\nu}^*(\alpha \wedge \beta)\right)_x &= \left(\Phi_{x_\nu}^*(f\,\mathrm{vol}_M)\right)_x = (f \circ \Phi_{x_\nu})(x)\left(\Phi_{x_\nu}^*(\mathrm{vol}_M)\right)_x \\ &= (f \circ \Phi_{x_\nu})(x) J_{\Phi_{x_\nu}}(x)(\mathrm{vol}_M)_x\end{aligned}$$

jokaisella $\nu = 1, \ldots, k$ ja

$$\omega_x = \left(\sum_{\nu=1}^{k} \lambda_\nu(x)(f \circ \Phi_{x_\nu})(x) J_{\Phi_{x_\nu}}(x)\right)(\mathrm{vol}_M)_x = \tilde{c}(x)(\mathrm{vol}_M)_x.$$

Koska kuvaukset Φ_{x_ν} ovat suunnansäilyttäviä, niin $J_{\Phi_{x_\nu}}(x) > 0$ jokaisella $\nu = 1, \ldots, k$. Jos $x \in \Phi_{x_\nu}^{-1}(U)$, niin $(f \circ \Phi_{x_\nu})(x) > 0$. Jos taas $x \notin \Phi_{x_\nu}^{-1}(U)$, niin $\lambda_\nu(x) = 0$. Näin ollen $\lambda_\nu(x)(f \circ \Phi_{x_\nu})(x) \geq 0$ jokaisella $\nu = 1, \ldots, k$. Koska $\{\lambda_\nu\}_{\nu=1}^k$ on ykkösenositus, niin on olemassa sellainen ν_0, että $x \in \Phi_{x_{\nu_0}}^{-1}(U)$ ja $\lambda_{\nu_0}(x) > 0$. Täten

$$\tilde{c}(x) = \sum_{\nu=1}^{k} \lambda_\nu(x)(f \circ \Phi_{x_\nu})(x) J_{\Phi_{x_\nu}}(x) > 0.$$

$\square$

Luku 4

Kuvausten Sobolev-avaruudet euklidisessa avaruudessa

Tämä luku käsittelee kuvausten Sobolev-avaruuksia euklidisessa avaruudessa ja niihin liittyviä tunnettuja tuloksia.

4.1 Kuvausten Sobolev-avaruudet

Olkoot $D \subset \mathbb{R}^n$ alue ja $1 \leq p < \infty$. Kerrataan Sobolev-avaruuksien $W^{1,p}(D, \mathbb{R})$ ja $W^{1,p}(D, \mathbb{R}^n)$ määritelmät.

Määritelmä 4.1. Olkoot $D \subset \mathbb{R}^n$ alue ja $1 \leq p \leq \infty$. Funktio $f\colon D \to \mathbb{R}$ *kuuluu avaruuteen* $W^{1,p}(D, \mathbb{R})$, jos $f \in L^p(D)$ ja on olemassa sellaiset funktiot $v_1, \ldots, v_n \in L^p(D)$, että jokaisella $\varphi \in C_c^\infty(D, \mathbb{R})$ pätee

$$\int_D v_i \varphi \, \mathrm{d}x = -\int_D f \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \, \mathrm{d}x.$$

Funktioita $v_1, \ldots, v_n$ kutsutaan funktion f *heikoiksi derivaatoiksi* ja merkitään $v_i = \frac{\partial f}{\partial x_i}$. Määritellään mitallinen kuvaus $\nabla f\colon D \to \mathbb{R}^n$ kaavalla

$$x \mapsto \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x), \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(x) \right)$$

melkein jokaisella $x \in D$.

Määritelmä 4.2. Olkoot $D \subset \mathbb{R}^n$ alue ja $1 \leq p \leq \infty$. Kuvaus $f\colon D \to \mathbb{R}^n$ *kuuluu avaruuteen* $W^{1,p}(D, \mathbb{R}^n)$, jos jokainen koordinaattifunktio $f_i\colon D \to \mathbb{R}$ kuuluu avaruuteen

$W^{1,p}(D,\mathbb{R})$. Määritellään mitallinen kuvaus $Df\colon D \to \mathbb{R}^{n\times n}$ kaavalla

$$x \mapsto \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(x) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1}(x) & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n}(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \nabla f_1(x) \\ \vdots \\ \nabla f_n(x) \end{pmatrix}$$

melkein jokaisella $x \in D$ ja asetetaan $J_f(x) = \det Df(x)$ melkein jokaisella $x \in D$.

Olkoon $D \subset \mathbb{R}^n$ alue. Seuraava lemma kertoo, että Sobolev-avaruuden $W^{1,n}_{\mathrm{loc}}(D,\mathbb{R}^n)$ kuvauksen eteen voidaan yhdistää diffeomorfismi ja jälkeen voidaan yhdistää Lipschitz-jatkuva diffeomorfismi ja yhdistetty kuvaus on edelleen yhtä säännöllinen. Lisäksi yhdistetyn kuvauksen heikkojen derivaattojen matriisi saadaan tutulla ketjusäännöllä melkein kaikkialla määrittelyjoukossa.

Lemma 4.3. *[12, Corollary 3.12, s. 13] Olkoot $D_0, D_1, D_2, D_3 \subset \mathbb{R}^n$ alueita, $g\colon D_0 \to D_1$ diffeomorfismi ja $h\colon D_2 \to D_3$ Lipschitz-jatkuva diffeomorfismi. Olkoon $f\colon D_1 \to D_2$ sellainen kuvaus, että $f \in W^{1,n}_{\mathrm{loc}}(D_1,\mathbb{R}^n)$. Tällöin $h \circ f \circ g \in W^{1,n}_{\mathrm{loc}}(D_0,\mathbb{R}^n)$ ja*

$$D(h \circ f \circ g)(x) = Dh(f(g(x))) \circ Df(g(x)) \circ Dg(x)$$

melkein jokaisella $x \in D_0$.

4.2 Heikko käänteinen Hölderin epäyhtälö

Olkoot $1 < p < \infty$ ja $f \in L^p_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$. Olkoon $B = B^n(x,r) \subset \mathbb{R}^n$ kuula. Hölderin epäyhtälön nojalla pätee epäyhtälö

$$\frac{1}{|B|}\int_B |f| \le \left(\frac{1}{|B|}\int_B |f|^p\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Näin ollen epäyhtälöä

$$\left(\frac{1}{|B|}\int_B |f|^p\right)^{\frac{1}{p}} \le \frac{C(p)}{|B|}\int_B |f|$$

on luonnollista kutsua *käänteiseksi Hölderin epäyhtälöksi*. Käänteisen Hölderin epäyhtälön heikompaa muotoa olevaa epäyhtälöä

$$\left(\frac{1}{|\frac{1}{2}B|}\int_{\frac{1}{2}B} |f|^p\right)^{\frac{1}{p}} \le \frac{C(p)}{|B|}\int_B |f|, \tag{4.4}$$

missä $\frac{1}{2}B = B^n\left(x, \frac{r}{2}\right)$, kutsutaan *heikoksi käänteiseksi Hölderin epäyhtälöksi*.

Jos funktio f toteuttaa heikon käänteisen Hölderin epäyhtälön (4.4) jokaisella kuulalla $B \subset \mathbb{R}^n$, niin heikkoa käänteistä Hölderin epäyhtälöä voidaan parantaa.

Lause 4.5. [1, Theorem 4.2, s. 283] *Olkoot* $1 < p < \infty$ *ja* $f \in L^p_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$. *Oletetaan, että funktio* f *toteuttaa heikon käänteisen Hölderin epäyhtälön* (4.4) *jokaisella kuulalla* $B \subset \mathbb{R}^n$. *Tällöin on olemassa sellainen* $q > p$, *että*

$$\left(\frac{1}{|\frac{1}{2}B|} \int_{\frac{1}{2}B} |f|^q \right)^{\frac{1}{q}} \leq C(q) \left(\frac{1}{|B|} \int_B |f|^p \right)^{\frac{1}{p}}, \tag{4.6}$$

missä $B \subset \mathbb{R}^n$ *on mielivaltainen kuula.*

4.3 Sobolev-upotuksia

Tässä alaluvussa esitetään Sobolev-upotuksia; katso [5].

Lause 4.7. [5, Theorem 2 (Arvio Sobolev-avaruudelle $W^{1,p}$, kun $1 \leq p < n$), s. 265] *Olkoot* $D \subset \mathbb{R}^n$ *sellainen rajoitettu alue, että reuna* ∂D *on* C^1, *ja* $1 \leq p < n$. *Tällöin on olemassa sellainen vakio* $C(n,p,D) > 0$, *että*

$$||f||_{p^*,D} \leq C(n,p,D) \Big(||f||_{p,D} + ||\nabla f||_{p,D} \Big)$$

jokaisella $f \in W^{1,p}(D, \mathbb{R})$, *missä* $p^* = \frac{np}{n-p}$.

Korollaari 4.8. *Olkoot* $B = B^n(x,r) \subset \mathbb{R}^n$ *kuula ja* $1 \leq p < n$. *Tällöin on olemassa sellainen vakio* $C(n,p) > 0$, *että*

$$||f||_{p^*,B} \leq C(n,p) \left(\frac{1}{\operatorname{diam} B} ||f||_{p,B} + ||\nabla f||_{p,B} \right)$$

jokaisella $f \in W^{1,p}(B, \mathbb{R})$, *missä* $p^* = \frac{np}{n-p}$.

Todistus. Olkoon $f \in W^{1,p}(B, \mathbb{R})$. Määritellään kuvaus $g\colon B^n(0,1) \to \mathbb{R}$ kaavalla $y \mapsto f(ry+x)$. Tällöin pätee $g \in W^{1,p}(B^n(0,1), \mathbb{R})$ ja $\nabla g(y) = r\nabla f(ry+x)$ melkein jokaisella $y \in B^n(0,1)$. Olkoon

$$C(n,p) = 2C(n,p,B^n(0,1)),$$

missä vakio $C(n,p,B^n(0,1))$ on kuten lauseessa 4.7. Käyttämällä muuttujanvaihtoa saadaan arvio

$$\begin{aligned}
||f||_{p^*,B} &= (r^n)^{\frac{1}{p^*}} ||g||_{p^*,B^n(0,1)} \leq C(n,p,B^n(0,1)) r^{\frac{n-p}{p}} \left(||g||_{p,B^n(0,1)} + ||\nabla g||_{p,B^n(0,1)} \right) \\
&= C(n,p,B^n(0,1)) r^{\frac{n-p}{p}} \left(\left(r^{-n}\right)^{\frac{1}{p}} ||f||_{p,B} + \left(r^{p-n}\right)^{\frac{1}{p}} ||\nabla f||_{p,B} \right) \\
&= C(n,p,B^n(0,1)) \left(\frac{1}{r} ||f||_{p,B} + ||\nabla f||_{p,B} \right) \\
&\leq C(n,p,B^n(0,1)) \left(\frac{1}{r} ||f||_{p,B} + 2 ||\nabla f||_{p,B} \right) \\
&= 2C(n,p,B^n(0,1)) \left(\frac{1}{\operatorname{diam} B} ||f||_{p,B} + ||\nabla f||_{p,B} \right) \\
&= C(n,p) \left(\frac{1}{\operatorname{diam} B} ||f||_{p,B} + ||\nabla f||_{p,B} \right).
\end{aligned}$$

□

Työssä Banachin avaruuden X kompaktia upotusta Banachin avaruuteen Y merkitään $X \Subset Y$.

Lause 4.9. *[5, Theorem 1 (Rellich-Kondrachovin kompaktisuuslause), s. 272] Olkoot $B \subset \mathbb{R}^n$ kuula ja $1 \leq p < n$. Tällöin*

$$W^{1,p}(B,\mathbb{R}) \Subset L^q(B)$$

jokaisella $1 \leq q < \frac{np}{n-p}$.

Korollaari 4.10. *Olkoon $B \subset \mathbb{R}^n$ kuula. Tällöin*

$$W^{1,n}(B,\mathbb{R}) \Subset L^n(B).$$

Todistus. Olkoon $1 \leq p < n$ sellainen, että $\frac{np}{n-p} > n$. Tällöin lauseen 4.9 nojalla

$$W^{1,p}(B,\mathbb{R}) \Subset L^n(B).$$

Koska kuula B on rajoitettu ja $p < n$, niin on olemassa jatkuva upotus $W^{1,n}(B,\mathbb{R}) \hookrightarrow W^{1,p}(B,\mathbb{R})$. Täten

$$W^{1,n}(B,\mathbb{R}) \Subset L^n(B).$$

□

Luku 5

Differentiaalimuotojen L^p-avaruudet ja Sobolev-avaruudet euklidisessa avaruudessa

Tässä luvussa yleistetään kuvausten L^p-avaruuksien ja Sobolev-avaruuksien määritelmiä ja tuloksia differentiaalimuodoille euklidisessa avaruudessa.

5.1 Avaruus $L^p(D, \Lambda^\ell(\mathbb{R}^n))$

Olkoot $D \subset \mathbb{R}^n$ alue ja $1 \leq p \leq \infty$. Tässä alaluvussa tutustutaan differentiaalimuotojen L^p-avaruuteen $L^p(D, \Lambda^\ell(\mathbb{R}^n))$.

Määritelmä 5.1. Olkoon $D \subset \mathbb{R}^n$ alue. Differentiaalimuodon $\omega \colon D \to \Lambda^\ell(\mathbb{R}^n)$ *pisteittäinen normi* on funktio $|\omega| : D \to \mathbb{R}$, joka on määritelty kaavalla $x \mapsto ||\omega_x||_{\Lambda^\ell(\mathbb{R}^n)}$. Merkitään $|\omega|(x) = |\omega(x)|$ jokaisella $x \in D$.

Määritelmä 5.2. Olkoot $D \subset \mathbb{R}^n$ alue ja $1 \leq p \leq \infty$. Differentiaalimuoto $\omega \colon D \to \Lambda^\ell(\mathbb{R}^n)$ *kuuluu avaruuteen* $L^p(D, \Lambda^\ell(\mathbb{R}^n))$, jos kuvaus $\omega \colon D \to \Lambda^\ell(\mathbb{R}^n)$ on mitallinen ja pisteittäiselle normille $|\omega| : D \to \mathbb{R}$ pätee $|\omega| \in L^p(D)$, missä kuvauksen $\omega \colon D \to \Lambda^\ell(\mathbb{R}^n)$ mitallisuus on määritelty tavalliseen tapaan.

Huomautus 5.3. Differentiaalimuoto

$$\omega = \sum_{i_1 < \cdots < i_\ell} \omega_I \, dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_\ell} \colon D \to \Lambda^\ell(\mathbb{R}^n)$$

kuuluu avaruuteen $L^p(D, \Lambda^\ell(\mathbb{R}^n))$, jos ja vain jos jokainen komponenttifunktio $\omega_I \colon D \to \mathbb{R}$ kuuluu avaruuteen $L^p(D)$.

Olkoot $D \subset \mathbb{R}^n$ alue ja $1 \leq p < \infty$. Avaruudessa $L^p(D, \Lambda^\ell(\mathbb{R}^n))$ on määritelty normi $||\cdot||_{p,D} : L^p(D, \Lambda^\ell(\mathbb{R}^n)) \to [0, \infty[$ kaavalla

$$\omega \mapsto \left(\int_D |\omega|^p \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Avaruudessa $L^p(D, \Lambda^\ell(\mathbb{R}^n))$ on myös määritelty normi $/\!\!\!||\cdot||_{p,D} \colon L^p(D, \Lambda^\ell(\mathbb{R}^n)) \to [0, \infty[$ kaavalla

$$\omega \mapsto \frac{1}{\operatorname{diam} D} \left(\int_D |\omega|^p \right)^{\frac{1}{p}},$$

jos alue D on rajoitettu.

Olkoot $\omega \colon D \to \Lambda^{\ell_1}(\mathbb{R}^n)$ ja $\tau \colon D \to \Lambda^{\ell_2}(\mathbb{R}^n)$ differentiaalimuotoja. Seuraavassa propositiossa osoitetaan, että jokaisella $x \in D$ pätee arvio

$$||(\omega \wedge \tau)_x||_{\Lambda^{\ell_1+\ell_2}(\mathbb{R}^n)} \leq C(n) \, ||\omega_x||_{\Lambda^{\ell_1}(\mathbb{R}^n)} \, ||\tau_x||_{\Lambda^{\ell_2}(\mathbb{R}^n)}.$$

Tällöin Hölderin epäyhtälön nojalla $\omega \wedge \tau \in L^1(D, \Lambda^{\ell_1+\ell_2}(\mathbb{R}^n))$, jos $\omega \in L^p(D, \Lambda^{\ell_1}(\mathbb{R}^n))$ ja $\tau \in L^{\frac{p}{p-1}}(D, \Lambda^{\ell_2}(\mathbb{R}^n))$.

Propositio 5.4. *Jokaisella $n \in \mathbb{N}$ on olemassa sellainen vakio $C(n) > 0$, että*

$$||\omega \wedge \tau||_{\Lambda^{\ell_1+\ell_2}(\mathbb{R}^n)} \leq C(n) \, ||\omega||_{\Lambda^{\ell_1}(\mathbb{R}^n)} \, ||\tau||_{\Lambda^{\ell_2}(\mathbb{R}^n)} \tag{5.5}$$

jokaisella $\omega \in \Lambda^{\ell_1}(\mathbb{R}^n)$ ja jokaisella $\tau \in \Lambda^{\ell_2}(\mathbb{R}^n)$.

Todistus. Olkoot $n \in \mathbb{N}$ ja $\ell_1, \ell_2 \in \mathbb{N}$. Määritellään lineaarikuvaus $T \colon \Lambda^{\ell_1}(\mathbb{R}^n) \times \Lambda^{\ell_2}(\mathbb{R}^n) \to \Lambda^{\ell_1+\ell_2}(\mathbb{R}^n)$ kaavalla $(\omega, \tau) \mapsto \omega \wedge \tau$. Koska $\Lambda^{\ell_1}(\mathbb{R}^n) \times \Lambda^{\ell_2}(\mathbb{R}^n)$ on äärellisulotteinen vektoriavaruus, niin on olemassa sellainen vakio $C(\ell_1, \ell_2) > 0$, että

$$||T(\omega, \tau)||_{\Lambda^{\ell_1+\ell_2}(\mathbb{R}^n)} \leq C(\ell_1, \ell_2) \, ||\omega||_{\Lambda^{\ell_1}(\mathbb{R}^n)} \, ||\tau||_{\Lambda^{\ell_2}(\mathbb{R}^n)}$$

jokaisella $\omega \in \Lambda^{\ell_1}(\mathbb{R}^n)$ ja jokaisella $\tau \in \Lambda^{\ell_2}(\mathbb{R}^n)$. Valitaan

$$C(n) = \max\{C(\ell_1, \ell_2) \colon \ell_1 + \ell_2 \leq n\}.$$

$\square$

5.2 Heikko suppeneminen avaruudessa $L^p(D, \Lambda^\ell(\mathbb{R}^n))$

Tässä alaluvussa tarkastellaan heikkoa suppenemista avaruudessa $L^p(D, \Lambda^\ell(\mathbb{R}^n))$. Annetaan heikon suppenemisen määritelmä ja osoitetaan, että jonon suppeneminen normissa $||\cdot||_{p,D}$ implikoi jonon heikon suppenemisen.

Määritelmä 5.6. Olkoot $D \subset \mathbb{R}^n$ alue ja $1 < p < \infty$. Jono differentiaalimuotoja $(\omega_m)_{m\in\mathbb{N}} \subset L^p(D, \Lambda^\ell(\mathbb{R}^n))$ *suppenee heikosti differentiaalimuotoon* $\omega \in L^p(D, \Lambda^\ell(\mathbb{R}^n))$ *avaruudessa* $L^p(D, \Lambda^\ell(\mathbb{R}^n))$, jos

$$\lim_{m\to\infty} \int_D \omega_m \wedge \tau = \int_D \omega \wedge \tau$$

jokaisella $\tau \in L^{\frac{p}{p-1}}(D, \Lambda^{n-\ell}(\mathbb{R}^n))$.

Lemma 5.7. *Olkoot $D \subset \mathbb{R}^n$ alue, $1 < p < \infty$ ja $\omega \in L^p(D, \Lambda^\ell(\mathbb{R}^n))$. Olkoon $(\omega_m)_{m\in\mathbb{N}} \subset L^p(D, \Lambda^\ell(\mathbb{R}^n))$ sellainen jono, että $||\omega - \omega_m||_{p,D} \to 0$, kun $m \to \infty$. Tällöin jono $(\omega_m)_{m\in\mathbb{N}}$ suppenee heikosti differentiaalimuotoon ω avaruudessa $L^p(D, \Lambda^\ell(\mathbb{R}^n))$.*

Todistus. Olkoon $\tau \in L^{\frac{p}{p-1}}(D, \Lambda^{n-\ell}(\mathbb{R}^n))$. Epäyhtälön (5.5) ja Hölderin epäyhtälön nojalla pätee, että

$$\begin{aligned} \left| \int_D \omega_m \wedge \tau - \int_D \omega \wedge \tau \right| &= \left| \int_D (\omega - \omega_m) \wedge \tau \right| \le \int_D |(\omega - \omega_m) \wedge \tau| \\ &\le C(n) \int_D |\omega - \omega_m| \, |\tau| \le C(n) \, ||\omega - \omega_m||_{p,D} \, ||\tau||_{\frac{p}{p-1},D} \to 0, \end{aligned}$$

kun $m \to 0$. □

5.3 Differentiaalimuotojen Sobolev-avaruudet

Olkoot $D \subset \mathbb{R}^n$ alue ja

$$\omega = \sum_{i_1<\cdots<i_\ell} \omega_I \, dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_\ell} \colon D \to \Lambda^\ell(\mathbb{R}^n)$$

differentiaalimuoto. On luonnollista määritellä sellainen differentiaalimuotojen Sobolev-avaruus, että differentiaalimuoto ω kuuluu Sobolev-avaruuteen, jos jokainen sen komponenttifunktio ω_I kuuluu vastaavaan funktioiden Sobolev-avaruuteen; vertaa huomautukseen 5.3.

Määritelmä 5.8. Olkoot $D \subset \mathbb{R}^n$ alue ja $1 \leq p < \infty$. Differentiaalimuoto

$$\omega = \sum_{i_1 < \cdots < i_\ell} \omega_I \, dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_\ell} \colon D \to \Lambda^\ell(\mathbb{R}^n)$$

kuuluu avaruuteen $W^{1,p}(D, \Lambda^\ell(\mathbb{R}^n))$, jos jokainen komponenttifunktio $\omega_I \colon D \to \mathbb{R}$ kuuluu avaruuteen $W^{1,p}(D, \mathbb{R})$.

Määritelmä 5.8 ei kuitenkaan ole ainoa luonnollinen määritelmä differentiaalimuotojen Sobolev-avaruudelle. Olkoot $D \subset \mathbb{R}^n$ alue ja $\omega \colon D \to \Lambda^\ell(\mathbb{R}^n)$ differentiaalimuoto. Olkoon $\tau \colon D \to \Lambda^{n-\ell-1}(\mathbb{R}^n)$ sellainen differentiaalimuoto, että joukko

$$\operatorname{supp} \tau = D \cap \overline{\{x \in D \colon \tau_x \neq 0\}}$$

on kompakti. Tällöin sanotaan, että τ on *kompaktikantajainen differentiaalimuoto.* Jos molemmat differentiaalimuodot ω ja τ ovat sileitä, niin pätee

$$\int_D \omega \wedge d\tau = (-1)^{\ell+1} \int_D d\omega \wedge \tau \tag{5.9}$$

Stokesin lauseen [13, Theorem 10.8 (Stokesin lause), s. 88] perusteella. Yhtälö (5.9) antaa tavan määritellä heikon ulkoisen derivaatan differentiaalimuodoille, joka tuottaa vaihtoehtoisen määritelmän differentiaalimuotojen Sobolev-avaruudelle.

Määritelmä 5.10. Olkoot $D \subset \mathbb{R}^n$ alue, $\omega \in L^1_{\text{loc}}(D, \Lambda^\ell(\mathbb{R}^n))$ ja $\tau \in L^1_{\text{loc}}(D, \Lambda^{\ell+1}(\mathbb{R}^n))$. Jos jokaisella $\varphi \in \Omega_c^{n-\ell-1}(D)$ pätee

$$\int_D \omega \wedge d\varphi = (-1)^{\ell+1} \int_D \tau \wedge \varphi, \tag{5.11}$$

niin sanotaan, että $d\omega = \tau$ *heikossa mielessä.*

Määritelmä 5.12. Olkoot $D \subset \mathbb{R}^n$ alue ja $1 \leq p, q < \infty$. Differentiaalimuoto $\omega \colon D \to \Lambda^\ell(\mathbb{R}^n)$ *kuuluu avaruuteen* $W^{d,p,q}(D, \Lambda^\ell(\mathbb{R}^n))$, jos $\omega \in L^p(D, \Lambda^\ell(\mathbb{R}^n))$ ja on olemassa sellainen differentiaalimuoto $\tau \in L^q(D, \Lambda^{\ell+1}(\mathbb{R}^n))$, että $d\omega = \tau$ heikossa mielessä. Erikoistapauksessa $p = q$ merkitään $W^{d,p,p}(D, \Lambda^\ell(\mathbb{R}^n)) = W^{d,p}(D, \Lambda^\ell(\mathbb{R}^n))$.

Olkoot $D \subset \mathbb{R}^n$ alue ja $1 \leq p < \infty$. Olkoon

$$\omega = \sum_{i_1 < \cdots < i_\ell} \omega_I \, dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_\ell} \in W^{d,p}(D, \Lambda^\ell(\mathbb{R}^n)).$$

Tällöin

$$d\omega = \sum_{j_1 < \cdots < j_{\ell+1}} (d\omega)_J \, dx_{j_1} \wedge \cdots \wedge dx_{j_{\ell+1}},$$

missä komponenttifunktiot $(d\omega)_J$ ovat lineaarikombinaatioita komponenttifunktioiden ω_I heikoista derivaatoista. Jos $\ell > 0$, niin jokaisella komponenttifunktiolla ω_I ei tarvitse olla jokaista heikkoa derivaattaa, jotta tällaiset lineaarikombinaatiot ovat olemassa. Näin ollen voi päteä $\omega \notin W^{1,p}(D, \Lambda^\ell(\mathbb{R}^n))$, jos $\ell > 0$. Toisin päin sisältyminen kuitenkin pätee, eli

$$W^{1,p}(D, \Lambda^\ell(\mathbb{R}^n)) \subsetneq W^{d,p}(D, \Lambda^\ell(\mathbb{R}^n)),$$

jos $\ell > 0$. Jos $\ell = 0$, niin differentiaalimuoto ω on funktio $\omega \in W^{1,p}(D, \mathbb{R})$.

Olkoot $\tau \in \Omega^\ell(D)$ ja $\psi \in C_c^\infty(D, \mathbb{R})$. Tällöin $\psi\tau \in \Omega_c^\ell(D)$ ja $d(\psi\tau) = d\psi \wedge \tau + \psi d\tau$. Osoitetaan seuraavassa lemmassa, että vastaava tulosääntö pätee myös Sobolev-avaruuden $W^{d,p}(D, \Lambda^\ell(\mathbb{R}^n))$ differentiaalimuodolle ja sileälle kompaktikantajaiselle funktiolle.

Lemma 5.13. *Olkoot $D \subset \mathbb{R}^n$ alue, $1 \leq p < \infty$, $\omega \in W^{d,p}(D, \Lambda^\ell(\mathbb{R}^n))$ ja $\psi \in C_c^\infty(D, \mathbb{R})$. Tällöin $\psi\omega \in W^{d,p}(D, \Lambda^\ell(\mathbb{R}^n))$ ja $d(\psi\omega) = d\psi \wedge \omega + \psi d\omega$ heikossa mielessä.*

Todistus. Selvästi $\psi\omega \in L^p(D, \Lambda^\ell(\mathbb{R}^n))$ ja $\psi d\omega \in L^p(D, \Lambda^{\ell+1}(\mathbb{R}^n))$, joten riittää osoittaa, että $d(\psi\omega) = d\psi \wedge \omega + \psi d\omega$ heikossa mielessä ja $d\psi \wedge \omega \in L^p(D, \Lambda^{\ell+1}(\mathbb{R}^n))$. Koska $\psi \in C_c^\infty(D, \mathbb{R})$, niin on olemassa sellainen vakio $L > 0$, että

$$|d\psi|(x) = ||(d\psi)_x||_{\Lambda^1(\mathbb{R}^n)} = |D\psi(x)| \leq L$$

jokaisella $x \in D$. Tällöin epäyhtälöstä (5.5) seuraa arvio

$$\left(\int_D |d\psi \wedge \omega|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq C(n)\left(\int_D |d\psi|^p |\omega|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq C(n)L\left(\int_D |\omega|^p\right)^{\frac{1}{p}} < \infty.$$

Olkoon $\tau \in \Omega_c^{n-\ell-1}(D)$. Tällöin yhtälöstä (5.11) saadaan yhtäsuuruus

$$\begin{aligned}
\int_D \psi\omega \wedge d\tau &= \int_D \omega \wedge \psi d\tau = \int_D \omega \wedge (d(\psi\tau) - d\psi \wedge \tau) \\
&= \int_D \omega \wedge d(\psi\tau) - \int_D \omega \wedge d\psi \wedge \tau \\
&= (-1)^{\ell+1} \int_D d\omega \wedge \psi\tau + (-1)^{\ell+1} \int_D d\psi \wedge \omega \wedge \tau \\
&= (-1)^{\ell+1} \int_D (\psi d\omega + d\psi \wedge \omega) \wedge \tau.
\end{aligned}$$

Tämä päättää todistuksen. $\square$

5.4 Differentiaalimuotojen Sobolev-avaruuden normi ja sileillä differentiaalimuodoilla approksimointi

Olkoot $D \subset \mathbb{R}^n$ alue ja $1 \leq p, q < \infty$. Tällöin avaruudessa $W^{d,p,q}(D, \Lambda^\ell(\mathbb{R}^n))$ on määritelty normi $||\cdot||_{W^{d,p,q}(D,\Lambda^\ell(\mathbb{R}^n))} : W^{d,p,q}(D, \Lambda^\ell(\mathbb{R}^n)) \to [0, \infty[$ kaavalla

$$\omega \mapsto ||\omega||_{p,D} + ||d\omega||_{q,D} .$$

Koska $W^{1,p}(D, \Lambda^\ell(\mathbb{R}^n)) \subset W^{d,p}(D, \Lambda^\ell(\mathbb{R}^n))$, niin normin $||\cdot||_{W^{d,p}(D,\Lambda^\ell(\mathbb{R}^n))}$ rajoittuma määrittelee normin avaruudessa $W^{1,p}(D, \Lambda^\ell(\mathbb{R}^n))$. Avaruuteen $W^{1,p}(D, \Lambda^\ell(\mathbb{R}^n))$ voidaan myös määritellä normi käyttämättä normin $||\cdot||_{W^{d,p}(D,\Lambda^\ell(\mathbb{R}^n))}$ rajoittumaa. Merkitään

$$\nabla\omega = \left(\frac{\partial \omega_I}{\partial x_i}\right)_{I,i} = (\nabla\omega_I)_I \quad \text{ja} \quad ||\nabla\omega||_{p,D} = \left(\int_D |\nabla\omega|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

jokaisella

$$\omega = \sum_{i_1 < \cdots < i_\ell} \omega_I \, dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_\ell} \in W^{1,p}(D, \Lambda^\ell(\mathbb{R}^n)).$$

Tällöin avaruuden $W^{1,p}(D, \Lambda^\ell(\mathbb{R}^n))$ normi $||\cdot||_{W^{1,p}(D,\Lambda^\ell(\mathbb{R}^n))} : W^{1,p}(D, \Lambda^\ell(\mathbb{R}^n)) \to [0, \infty[$ on määritelty kaavalla

$$\omega \mapsto ||\omega||_{p,D} + ||\nabla\omega||_{p,D} .$$

Oletetaan, että alue D on rajoitettu. Tällöin avaruudessa $W^{1,p}(D, \Lambda^\ell(\mathbb{R}^n))$ on myös määritelty normi $\not|\!\not| \cdot ||_{W^{1,p}(D,\Lambda^\ell(\mathbb{R}^n))}: W^{1,p}(D, \Lambda^\ell(\mathbb{R}^n)) \to [0, \infty[$ kaavalla

$$\omega \mapsto \not|\!\not| \, \omega||_{p,D} + ||\nabla\omega||_{p,D} .$$

Olkoon

$$\omega = \sum_{i_1 < \cdots < i_\ell} \omega_I \, dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_\ell} \in W^{1,p}(D, \Lambda^\ell(\mathbb{R}^n)).$$

Jokaista komponenttifunktiota ω_I voidaan approksimoida sellaisella jonolla $(\omega_I^m)_{m\in\mathbb{N}} \subset C^\infty(D) \cap W^{1,p}(D, \mathbb{R})$, että

$$||\omega_I^m - \omega_I||_{p,D} \to \quad \text{ja} \quad ||\nabla\omega_I^m - \nabla\omega_I||_{p,D} \to 0,$$

kun $m \to \infty$. Tällöin jono $(\omega_m)_{m\in\mathbb{N}} \subset \Omega^\ell(D) \cap W^{1,p}(D, \Lambda^\ell(\mathbb{R}^n))$ differentiaalimuotoja

$$\omega_m = \sum_{i_1 < \cdots < i_\ell} \omega_I^m \, dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_\ell}$$

on sellainen, että $||\omega_m - \omega||_{W^{1,p}(D,\Lambda^\ell(\mathbb{R}^n))} \to 0$, kun $m \to \infty$.

Tulosten todistaminen Sobolev-avaruudessa $W^{d,p}(D,\Lambda^\ell(\mathbb{R}^n))$ on monimutkaisempaa kuin Sobolev-avaruudessa $W^{1,p}(D,\Lambda^\ell(\mathbb{R}^n))$, sillä ei voida suoraan soveltaa Sobolev-kuvausten tuloksia komponenttifunktioihin. Työssä kuitenkin tarvitaan tulosta, että differentiaalimuotoa $\tau \in W^{d,p}(D,\Lambda^\ell(\mathbb{R}^n))$ voidaan approksimoida avaruudessa $W^{d,p}(D,\Lambda^\ell(\mathbb{R}^n))$ sileillä differentiaalimuodoilla $\tau_m \in \Omega^\ell(D) \cap W^{d,p}(D,\Lambda^\ell(\mathbb{R}^n))$. Muotoillaan tulos lauseeksi ja todistetaan lause.

Lause 5.14. *Olkoot $D \subset \mathbb{R}^n$ rajoitettu alue, $1 \le p < \infty$ ja*

$$\omega = \sum_{i_1<\cdots<i_\ell} \omega_I \, dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_\ell} \in W^{d,p}(D,\Lambda^\ell(\mathbb{R}^n)).$$

Tällöin on olemassa sellainen jono $(\omega_m)_{m\in\mathbb{N}} \subset \Omega^\ell(D) \cap W^{d,p}(D,\Lambda^\ell(\mathbb{R}^n))$, että

$$||\omega - \omega_m||_{W^{d,p}(D,\Lambda^\ell(\mathbb{R}^n))} \to 0,$$

kun $m \to \infty$.

Olkoon $D \subset \mathbb{R}^n$ rajoitettu alue. Tällöin merkitään

$$D_\varepsilon = \{x \in D \colon\ \mathrm{dist}(x,\partial D) > \varepsilon\}.$$

Määritellään lauseen 5.14 todistusta varten lokaalisti integroituvan differentiaalimuodon ja tasoittajafunktion konvoluutio. Olkoon $\eta \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n,\mathbb{R})$ standarditasoittajafunktio. Olkoon jokaisella $\varepsilon > 0$ funktio $\eta_\varepsilon \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n,\mathbb{R})$ on määritelty kaavalla $x \mapsto \frac{1}{\varepsilon^n}\eta\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)$. Olkoon

$$\omega = \sum_{i_1<\cdots<i_\ell} \omega_I \, dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_\ell} \in L^1_{\mathrm{loc}}(D,\Lambda^\ell(\mathbb{R}^n)).$$

Asetetaan jokaisella $\varepsilon > 0$

$$\omega_\varepsilon = (\omega * \eta_\varepsilon) = \sum_{i_1<\cdots<i_\ell} (\omega_I * \eta_\varepsilon) \, dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_\ell} \in \Omega^\ell(D_\varepsilon).$$

Oletetaan, että on olemassa heikko ulkoinen derivaatta $d\omega \in L^1_{\mathrm{loc}}(D,\Lambda^\ell(\mathbb{R}^n))$. Osoitetaan, että tällöin pätee $d\omega_\varepsilon = (d\omega)_\varepsilon$ jokaisella sellaisella $\varepsilon > 0$, että $\mathrm{supp}\,\omega \subset D_\varepsilon$; katso [12, Lemma 3.14, s. 15] ja [12, Corollary 3.15, s. 16]. Tämän jälkeen lauseen 5.14 todistus perustuu ykkösenositukseen ja approksimointiin tasoittajafunktioiden konvoluutioilla vastaavasti kuin kuvausten tapauksessa; katso [5, Theorem 2 (Globaali approksimointi sileillä funktioilla), s. 251].

Lemma 5.15. *Olkoot $D \subset \mathbb{R}^n$ rajoitettu alue ja*

$$\omega = \sum_{\sigma \in S(\ell, n-\ell)} \omega_\sigma \, dx_{\sigma(1)} \wedge \cdots \wedge dx_{\sigma(\ell)} \in \Omega^\ell(D).$$

Tällöin $d\omega_\varepsilon = (d\omega)_\varepsilon$ jokaisella $\varepsilon > 0$.

Todistus. Olkoon $\varepsilon > 0$. Lasketaan auki esityksien

$$d\omega = \sum_{\alpha \in S(\ell+1, n-\ell-1)} (d\omega)_\alpha \, dx_{\alpha(1)} \wedge \cdots \wedge dx_{\alpha(\ell+1)}$$

ja

$$d\omega_\varepsilon = \sum_{\alpha \in S(\ell+1, n-\ell-1)} (d\omega_\varepsilon)_\alpha \, dx_{\alpha(1)} \wedge \cdots \wedge dx_{\alpha(\ell+1)}$$

komponenttifunktiot $(d\omega)_\alpha \colon D \to \mathbb{R}$ ja $(d\omega_\varepsilon)_\alpha \colon D_\varepsilon \to \mathbb{R}$. Olkoon $\alpha \in S(\ell+1, n-\ell-1)$. Olkoon $(-1)^{c(\alpha,k)}$ jokaisella $k = \alpha(1), \ldots, \alpha(\ell+1)$ sellainen, että

$$(-1)^{c(\alpha,k)} dx_{\alpha(1)} \wedge \ldots dx_{\alpha(\ell+1)} = dx_k \wedge dx_{\alpha(1)} \wedge \cdots \wedge \widehat{dx_k} \wedge \ldots dx_{\alpha(\ell+1)}.$$

Olkoon $\alpha_k \in S(\ell, n-\ell)$ jokaisella $k = \alpha(1), \ldots, \alpha(\ell+1)$ sellainen, että

$$\alpha_k(1) < \cdots < \alpha_k(\ell) = \alpha(1) < \cdots < \hat{k} < \cdots < \alpha(\ell+1).$$

Tällöin pätevät yhtäsuuruudet

$$(d\omega)_\alpha = \sum_{k=\alpha(1)}^{\alpha(\ell+1)} (-1)^{c(\alpha,k)} \frac{\partial \omega_{\alpha_k}}{\partial x_k} \quad \text{ja} \quad (d\omega_\varepsilon)_\alpha = \sum_{k=\alpha(1)}^{\alpha(\ell+1)} (-1)^{c(\alpha,k)} \frac{\partial(\omega_{\alpha_k} * \eta_\varepsilon)}{\partial x_k}.$$

Koska

$$\frac{\partial \omega_{\alpha_k}}{\partial x_k} * \eta_\varepsilon = \frac{\partial(\omega_{\alpha_k} * \eta_\varepsilon)}{\partial x_k}$$

jokaisella $k = \alpha(1), \ldots, \alpha(\ell+1)$ joukossa D_ε, niin väite seuraa. □

Lemma 5.16. *Olkoot $D \subset \mathbb{R}^n$ rajoitettu alue ja*

$$\omega = \sum_{\sigma \in S(\ell, n-\ell)} \omega_\sigma \, dx_{\sigma(1)} \wedge \cdots \wedge dx_{\sigma(\ell)} \in L^1_{\mathrm{loc}}(D, \Lambda^\ell(\mathbb{R}^n)).$$

Olkoon $\varepsilon > 0$ sellainen, että $\operatorname{supp} \omega \subset D_\varepsilon$. Tällöin

$$\int_{D_\varepsilon} \omega_\varepsilon \wedge \tau = \int_{D_\varepsilon} \omega \wedge \tau_\varepsilon \tag{5.17}$$

jokaisella sellaisella $\tau \in \Omega^{n-\ell}_c(D)$, että $\operatorname{supp} \tau \subset D_\varepsilon$.

Todistus. Olkoon

$$\tau = \sum_{\sigma \in S(\ell, n-\ell)} \tau_\sigma \, dx_{\sigma(\ell+1)} \wedge \cdots \wedge dx_{\sigma(n)} \in \Omega_c^{n-\ell}(D)$$

sellainen, että $\operatorname{supp} \tau \subset D_\varepsilon$. Koska

$$\omega_\varepsilon \wedge \tau = \sum_{\sigma \in S(\ell, n-\ell)} (\omega_\sigma * \eta_\varepsilon)\tau_\sigma \operatorname{vol}_{\mathbb{R}^n} \quad \text{ja} \quad \omega \wedge \tau_\varepsilon = \sum_{\sigma \in S(\ell, n-\ell)} \omega_\sigma(\tau_\sigma * \eta_\varepsilon) \operatorname{vol}_{\mathbb{R}^n},$$

niin riittää osoittaa, että jokaisella $\sigma \in S(\ell, n-\ell)$ pätee

$$\int_{D_\varepsilon} (\omega_\sigma * \eta_\varepsilon)\tau_\sigma = \int_{D_\varepsilon} \omega_\sigma(\tau_\sigma * \eta_\varepsilon).$$

Olkoon $\sigma \in S(\ell, n-\ell)$. Koska $\eta_\varepsilon(z) = \eta_\varepsilon(-z)$ jokaisella $z \in \mathbb{R}^n$, niin tällöin Fubinin lauseen nojalla pätee

$$\begin{aligned}
\int_{D_\varepsilon} \omega_\sigma(\tau_\sigma * \eta_\varepsilon) &= \int_{\mathbb{R}^n} \chi_{\operatorname{supp}\omega}(y)\omega_\sigma(y)(\tau_\sigma * \eta_\varepsilon)(y)\,\mathrm{d}y \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} \chi_{\operatorname{supp}\omega}(y)\omega_\sigma(y)\left(\int_{B^n(y,\varepsilon)} \tau_\sigma(x)\eta_\varepsilon(y-x)\,\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y \\
&= \int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} \chi_{\operatorname{supp}\omega}(y)\chi_{B^n(y,\varepsilon)}(x)\chi_{\operatorname{supp}\tau}(x)\omega_\sigma(y)\eta_\varepsilon(-(y-x))\tau_\sigma(x)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \\
&= \int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} \chi_{\operatorname{supp}\omega}(y)\chi_{B^n(x,\varepsilon)}(y)\chi_{\operatorname{supp}\tau}(x)\omega_\sigma(y)\eta_\varepsilon(x-y)\tau_\sigma(x)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x \\
&= \int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} \chi_{\operatorname{supp}\tau}(x)\chi_{B^n(x,\varepsilon)}(y)\chi_{\operatorname{supp}\omega}(y)\omega_\sigma(y)\eta_\varepsilon(x-y)\tau_\sigma(x)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} \chi_{\operatorname{supp}\tau}(x)\left(\int_{B^n(x,\varepsilon)} \omega_\sigma(y)\eta_\varepsilon(x-y)\,\mathrm{d}y\right)\tau_\sigma(x)\,\mathrm{d}x \\
&= \int_{D_\varepsilon} (\omega_\sigma * \eta_\varepsilon)\tau_\sigma.
\end{aligned}$$

□

Korollaari 5.18. *Olkoot $D \subset \mathbb{R}^n$ rajoitettu alue ja $\omega \in W^{d,1}_{\mathrm{loc}}(D, \Lambda^\ell(\mathbb{R}^n))$. Tällöin pätee $d\omega_\varepsilon = (d\omega)_\varepsilon$ jokaisella sellaisella $\varepsilon > 0$, että $\operatorname{supp}\omega \subset D_\varepsilon$.*

Todistus. Olkoon $\varepsilon > 0$ sellainen, että $\operatorname{supp}\omega \subset D_\varepsilon$. Koska differentiaalimuodot $d\omega_\varepsilon$ ja $(d\omega)_\varepsilon$ ovat sileitä, niin riittää osoittaa, että pätee $d\omega_\varepsilon = (d\omega)_\varepsilon$ heikossa mielessä. Olkoon

$\varphi \in \Omega_c^{n-\ell-1}(D_\varepsilon)$. Differentiaalimuoto φ voidaan laajentaa sellaiseksi differentiaalimuodoksi $\varphi \in \Omega_c^{n-\ell-1}(D)$, että $\operatorname{supp} \varphi \subset D_\varepsilon$. Tällöin yhtälöstä (5.17) saadaan yhtäsuuruudet

$$\int_{D_\varepsilon} \omega_\varepsilon \wedge d\varphi = \int_{D_\varepsilon} \omega \wedge (d\varphi)_\varepsilon \quad \text{ja} \quad \int_{D_\varepsilon} (d\omega)_\varepsilon \wedge \varphi = \int_{D_\varepsilon} d\omega \wedge \varphi_\varepsilon.$$

Koska yhtälöstä (5.11) seuraa yhtäsuuruus

$$\int_{D_\varepsilon} \omega \wedge d\varphi_\varepsilon = (-1)^{\ell+1} \int_{D_\varepsilon} d\omega \wedge \varphi_\varepsilon$$

ja lemmasta 5.15 seuraa yhtäsuuruus $(d\varphi)_\varepsilon = d\varphi_\varepsilon$, niin yhdistämällä välivaiheet saadaan, että pätee

$$\int_{D_\varepsilon} \omega_\varepsilon \wedge d\varphi = (-1)^{\ell+1} \int_{D_\varepsilon} (d\omega)_\varepsilon \wedge \varphi.$$

Tämä päättää todistuksen. □

Korollaari 5.19. *Olkoot $D \subset \mathbb{R}^n$ rajoitettu alue ja $1 \leq p < \infty$. Olkoon*

$$\omega = \sum_{\sigma \in S(\ell, n-\ell)} \omega_\sigma \, dx_{\sigma(1)} \wedge \cdots \wedge dx_{\sigma(\ell)} \in W^{d,p}(D, \Lambda^\ell(\mathbb{R}^n))$$

kompaktikantajainen. Tällöin jokaisella $\delta > 0$ on olemassa sellainen $\varepsilon_0 > 0$, että

$$||\omega - \omega_\varepsilon||_{W^{d,p}(D,\Lambda^\ell(\mathbb{R}^n))} < \delta$$

jokaisella $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$.

Todistus. Olkoon $\delta > 0$. Koska $||\omega_\sigma - \omega_\sigma * \eta_\varepsilon||_{p,D} \to 0$ ja $||(d\omega)_\sigma - (d\omega)_\sigma * \eta_\varepsilon||_{p,D} \to 0$ jokaisella $\sigma \in S(\ell, n-\ell)$, kun $\varepsilon \to 0$, niin on olemassa sellainen $\varepsilon_1 > 0$, että

$$||\omega - \omega_\varepsilon||_{p,D} < \frac{\delta}{2} \quad \text{ja} \quad ||d\omega - (d\omega)_\varepsilon||_{p,D} < \frac{\delta}{2}$$

jokaisella $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_1$. Olkoon $0 < \varepsilon_0 \leq \varepsilon_1$ sellainen, että $\operatorname{supp} \omega \subset D_{\varepsilon_0}$. Tällöin korollaarista 5.18 seuraa arvio

$$\begin{aligned} ||\omega - \omega_\varepsilon||_{W^{d,p}(D,\Lambda^\ell(\mathbb{R}^n))} &= ||\omega - \omega_\varepsilon||_{p,D} + ||d\omega - d\omega_\varepsilon||_{p,D} \\ &= ||\omega - \omega_\varepsilon||_{p,D} + ||d\omega - (d\omega)_\varepsilon||_{p,D} < \delta \end{aligned}$$

jokaisella $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$. □

Lauseen 5.14 todistus. Osoitetaan, että jokaisella $\delta > 0$ on olemassa sellainen $\tau \in \Omega^\ell(D) \cap W^{d,p}(D, \Lambda^\ell(\mathbb{R}^n))$, että $||\tau - \omega||_{W^{d,p}(D,\Lambda^\ell(\mathbb{R}^n))} < \delta$. Olkoon $\delta > 0$. Määritellään joukot $U_0 = \emptyset$ ja $U_i = \left\{x \in D\colon \ \mathrm{dist}(x, \partial D) > \frac{1}{i}\right\}$ jokaisella $i \in \mathbb{N}$. Merkitään $V_i = U_{i+3} \setminus \overline{U_{i+1}}$ jokaisella $i \in \mathbb{N}_0$. Olkoon $\{\lambda_i\}_{i \in \mathbb{N}_0}$ avoimen peitteen $\{V_i\}_{i \in \mathbb{N}_0}$ alistama sileä ykkösenositus joukossa D.

Lemman 5.13 ja korollaarin 5.19 nojalla jokaisella $i \in \mathbb{N}_0$ voidaan valita sellainen $\varepsilon_{i,0} > 0$, että

$$||\lambda_i \omega - (\lambda_i \omega)_\varepsilon||_{W^{d,p}(D,\Lambda^\ell(\mathbb{R}^n)} < \frac{\delta}{2^{i+1}}$$

jokaisella $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_{i,0}$. Valitaan jokaisella $i \in \mathbb{N}_0$ sellainen $0 < \varepsilon_i \leq \varepsilon_{i,0}$, että $\mathrm{supp}(\lambda_i \omega)_{\varepsilon_i} \subset U_{i+4} \setminus \overline{U_i}$. Tällöin

$$\tau = \sum_{i=0}^{\infty} (\lambda_i \omega)_{\varepsilon_i} \in \Omega^\ell(D) \cap W^{d,p}(D, \Lambda^\ell(\mathbb{R}^n))$$

on sellainen differentiaalimuoto, että

$$||\tau - \omega||_{W^{d,p}(D,\Lambda^\ell(\mathbb{R}^n))} < \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\delta}{2^{i+1}} = \delta.$$

□

5.5 Osittaisintegrointi avaruudessa $W^{d,p}(D, \Lambda^\ell(\mathbb{R}^n))$

Olkoot $D \subset \mathbb{R}^n$ alue, $1 < p < \infty$ ja $\omega \in W^{d,p}(D, \Lambda^\ell(\mathbb{R}^n))$. Tällöin yhtälö (5.9) pätee jokaisella $\tau \in \Omega_c^{n-\ell-1}(D)$. Seuraavassa lemmassa osoitetaan, että yhtälö (5.9) pätee myös jokaisella kompaktikantajaisella $\tau \in W^{d,\frac{p}{p-1}}(D, \Lambda^{n-\ell-1}(\mathbb{R}^n))$.

Lemma 5.20. *Olkoot $D \subset \mathbb{R}^n$ alue, $1 < p < \infty$, ja $\omega \in W^{d,p}(D, \Lambda^\ell(\mathbb{R}^n))$. Tällöin*

$$\int_D \omega \wedge d\tau = (-1)^{\ell+1} \int_D d\omega \wedge \tau$$

jokaisella kompaktikantajaisella $\tau \in W^{d,\frac{p}{p-1}}(D, \Lambda^{n-\ell-1}(\mathbb{R}^n))$.

Olkoot $D \subset \mathbb{R}^n$ alue ja $1 \leq p < \infty$. Lemman 5.20 todistusta varten osoitetaan, että kompaktikantajaista Sobolev-differentiaalimuotoa $\omega \in W^{d,p}(D, \Lambda^\ell(\mathbb{R}^n))$ voidaan approksimoida kompaktikantajaisilla sileillä differentiaalimuodoilla $\omega_m \in \Omega_c^\ell(D)$.

Lemma 5.21. *Olkoot $D \subset \mathbb{R}^n$ alue, $1 \leq p < \infty$, ja $\omega \in W^{d,p}(D, \Lambda^\ell(\mathbb{R}^n))$ kompaktikantajainen differentiaalimuoto. Tällöin on olemassa sellainen jono $(\omega_m)_{m\in\mathbb{N}} \subset \Omega_c^\ell(D)$, että*

$$||\omega - \omega_m||_{p,D} \to 0 \quad \text{ja} \quad ||d\omega - d\omega_m||_{p,D} \to 0,$$

kun $m \to \infty$.

Todistus. Koska $\omega \in W^{d,p}(D, \Lambda^\ell(\mathbb{R}^n))$, niin lauseen 5.14 nojalla on olemassa sellainen jono $(\tau_m)_{m\in\mathbb{N}} \subset \Omega^\ell(D) \cap W^{d,p}(D, \Lambda^\ell(\mathbb{R}^n))$, että

$$||\omega - \tau_m||_{p,D} \to 0 \quad \text{ja} \quad ||d\omega - d\tau_m||_{p,D} \to 0,$$

kun $m \to \infty$. Olkoon $\psi \in C_c^\infty(D, \mathbb{R})$ sellainen funktio, että $\psi(x) = 1$ jokaisella $x \in \operatorname{supp}\omega$. Asetetaan $\omega_m = \psi\tau_m$ jokaisella $m \in \mathbb{N}$. Osoitetaan, että jono $(\omega_m)_{m\in\mathbb{N}} \subset \Omega_c^\ell(D)$ on halutunlainen.

Koska $\psi \in C_c^\infty(D, \mathbb{R})$, niin $||\psi||_\infty < \infty$ ja on olemassa sellainen vakio $L > 0$, että

$$|d\psi|(x) = ||(d\psi)_x||_{\Lambda^1(\mathbb{R}^n)} = |D\psi(x)| \leq L$$

jokaisella $x \in D$.

Tällöin

$$\begin{aligned} ||\omega - \omega_m||_{p,D} &= ||\psi(\omega - \tau_m)||_{p,D} = \left(\int_D |\psi|^p |\omega - \tau_m|^p\right)^{\frac{1}{p}} \\ &\leq ||\psi||_\infty \left(\int_D |\omega - \tau_m|^p\right)^{\frac{1}{p}} = ||\psi||_\infty ||\omega - \tau_m||_{p,D} \to 0, \end{aligned}$$

kun $m \to \infty$. Lisäksi lemman 5.13 ja epäyhtälön (5.5) nojalla pätee, että

$$\begin{aligned} ||d\omega - d\omega_m||_{p,D} &= ||d(\psi(\omega - \tau_m))||_{p,D} = \left(\int_D |d\psi \wedge (\omega - \tau_m) + \psi d(\omega - \tau_m)|^p\right)^{\frac{1}{p}} \\ &\leq \left(\int_D |d\psi \wedge (\omega - \tau_m)|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_D |\psi d(\omega - \tau_m)|^p\right)^{\frac{1}{p}} \\ &\leq C(n)\left(\int_D |d\psi|^p |\omega - \tau_m|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_D |\psi|^p |d(\omega - \tau_m)|^p\right)^{\frac{1}{p}} \\ &\leq C(n)L\left(\int_D |\omega - \tau_m|^p\right)^{\frac{1}{p}} + ||\psi||_\infty \left(\int_D |d\omega - d\tau_m)|^p\right)^{\frac{1}{p}} \\ &= C(n)L\,||\omega - \tau_m||_{p,D} + ||\psi||_\infty ||d\omega - d\tau_m||_{p,D} \to 0, \end{aligned}$$

kun $m \to \infty$. □

Lemman 5.20 todistus. Olkoon $\tau \in W^{d,\frac{p}{p-1}}(D, \Lambda^{n-\ell-1}(\mathbb{R}^n))$ kompaktikantajainen. Tällöin lemman 5.21 nojalla on olemassa sellainen jono $(\tau_m)_{m\in\mathbb{N}} \subset \Omega_c^{n-\ell-1}(D)$, että

$$||\tau - \tau_m||_{p,D} \to 0 \quad \text{ja} \quad ||d\tau - d\tau_m||_{p,D} \to 0,$$

kun $m \to \infty$. Yhtälön (5.11) perusteella jokaisella $m \in \mathbb{N}$ saadaan yhtäsuuruus

$$\int_D \omega \wedge d\tau_m = (-1)^{\ell+1} \int_D d\omega \wedge \tau_m.$$

Lisäksi lemman 5.7 nojalla

$$\lim_{m\to\infty} \int_D \omega \wedge d\tau_m = \int_D \omega \wedge d\tau \quad \text{ja} \quad \lim_{m\to\infty} \int_D d\omega \wedge \tau_m = \int_D d\omega \wedge \tau.$$

Täten väite on todistettu. □

5.6 Kuulan Poincaré-operaattori ja Sobolev-Poincaré epäyhtälö differentiaalimuodoille

Olkoon $B \subset \mathbb{R}^n$ kuula. Tässä alaluvussa todistetaan Sobolev-Poincaré epäyhtälö Sobolev-avaruuden $W^{1,p}(B, \Lambda^\ell(\mathbb{R}^n))$ differentiaalimuodoille jokaisella $\ell \in \{1, \dots, n\}$ ja jokaisella $1 < p < n$. Epäyhtälön todistuksessa käytetään Iwaniecin ja Lutoborskin määrittelemää kuulan B Poincaré-operaattoria; katso [9, luku 4].

Määritellään jokaisella $y \in B$ ja jokaisella $\omega \in \Omega^\ell(\mathbb{R}^n)$ differentiaalimuoto $T_{B,y}\omega \colon B \to \Lambda^{\ell-1}(\mathbb{R}^n)$ kaavalla

$$(T_{B,y}\omega)_x(v_1, \dots, v_{\ell-1}) = \int_0^1 t^{\ell-1}\omega_{tx+y-ty}(x - y, v_1, \dots, v_{\ell-1})\,\mathrm{d}t$$

jokaisella $x \in B$ ja kaikilla $v_1, \dots, v_{\ell-1} \in \mathbb{R}^n$.

Olkoon $f_y \colon B \times [0,1] \to B \times [0,1] \times \mathbb{R}^n$ sileä kuvaus, joka on määritelty kaavalla

$$(x, t) \mapsto (tx + y - ty, t, x - y),$$

jokaisella $y \in B$. Olkoon $g_\omega \colon B \times [0,1] \times \mathbb{R}^n \to \Lambda^\ell(\mathbb{R}^n) \times \mathbb{R}^n$ sileä kuvaus, joka on määritelty kaavalla

$$(x, t, z) \mapsto (t^{\ell-1}\omega_x, z),$$

jokaisella $\omega \in \Omega^\ell(B)$. Olkoon sileä kuvaus $h \colon \Lambda^\ell(\mathbb{R}^n) \times \mathbb{R}^n \to \Lambda^{\ell-1}(\mathbb{R}^n)$ määritelty kaavalla $(\tau, z) \mapsto \alpha$, missä $\alpha \in \Lambda^{\ell-1}(\mathbb{R}^n)$ on sellainen, että

$$\alpha(v_1, \dots, v_{\ell-1}) = \tau(z, v_1, \dots, v_{\ell-1})$$

kaikilla $v_1, \ldots, v_{\ell-1} \in \mathbb{R}^n$. Tällöin jokaisella $y \in B$ ja jokaisella $\omega \in \Omega^\ell(B)$ voidaan kirjoittaa

$$(T_{B,y}\omega)_x = \int_0^1 (h \circ g_\omega \circ f_y)(x,t)\,\mathrm{d}t$$

jokaisella $x \in B$. Koska jokaisella $y \in B$ ja jokaisella $\omega \in \Omega^\ell(B)$ kuvaus $h \circ g_\omega \circ f_y$ on sileä, niin pätee $T_{B,y}\omega \in \Omega^{\ell-1}(B)$. Näin ollen lineaarikuvaus $T_{B,y}\colon \Omega^\ell(B) \to \Omega^{\ell-1}(B)$, $\omega \mapsto T_{B,y}\omega$, on hyvin määritelty. Tällöin voidaan muodostaa kaavio

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & \Omega^{\ell-1}(B) \arrow[r, "d"] \arrow[d, "\mathrm{id}"] & \Omega^\ell(B) \arrow[r, "d"] \arrow[d, "\mathrm{id}"] \arrow[dl, "T_{B,y}"] & \Omega^{\ell+1}(B) \arrow[r] \arrow[d, "\mathrm{id}"] \arrow[dl, "T_{B,y}"] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & \Omega^{\ell-1}(B) \arrow[r, "d"'] & \Omega^\ell(B) \arrow[r, "d"'] & \Omega^{\ell+1}(B) \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

ja tutkia kuvausten $\mathrm{id}, d \circ T_{B,y}, T_{B,y} \circ d\colon \Omega^\ell(B) \to \Omega^\ell(B)$ yhteyttä toisiinsa. Seuraavassa lauseessa osoitetaan, että kuvaukset $T_{B,y}$ muodostavat identiteettikuvauksen ja nollakuvauksen välisen ketjuhomotopian; katso [9, Lemma 4.1, s. 36].

Lause 5.22. *Olkoot $B \subset \mathbb{R}^n$ kuula ja $y \in B$. Tällöin*

$$\omega = d(T_{B,y}\omega) + T_{B,y}(d\omega) \tag{5.23}$$

jokaisella $\omega \in \Omega^\ell(B)$.

Todistus. Olkoon $\omega \in \Omega^\ell(B)$. Olkoot $x \in B$ ja $v_1, \ldots, v_\ell \in \mathbb{R}^n$. Merkitään $V = (v_1, \ldots, v_\ell)$ ja $V_k = (v_1, \ldots, \hat{v_k}, \ldots, v_\ell)$ jokaisella $k = 1, \ldots, \ell$. Halutaan osoittaaa, että pätee

$$\omega_x(V) = (d(T_{B,y}\omega))_x(V) + (T_{B,y}(d\omega))_x(V).$$

Tätä varten lasketaan auki yhtälön oikeata puolta. Termi $(T_{B,y}(d\omega))_x(V)$ on muotoa

$$\begin{aligned}
(T_{B,y}(d\omega))_x(V) &= \int_0^1 t^\ell (d\omega)_{tx+y-ty}(x-y, V)\,\mathrm{d}t \\
&= \int_0^1 t^\ell (\omega'(tx+y-ty)(x-y))(V)\,\mathrm{d}t \\
&\quad + \int_0^1 \sum_{k=1}^{\ell} (-1)^k t^\ell (\omega'(tx+y-ty)(v_k))(x-y, V_k)\,\mathrm{d}t \\
&= \int_0^1 t^\ell (\omega'(tx+y-ty)(x-y))(V)\,\mathrm{d}t \\
&\quad + \sum_{k=1}^{\ell} (-1)^k \int_0^1 t^\ell (\omega'(tx+y-ty)(v_k))(x-y, V_k)\,\mathrm{d}t.
\end{aligned}$$

Jokaisella $i = 1, \dots, k$ pätee yhtälö

$$
\begin{aligned}
&((T_{B,y}\omega)'(x)(v_k))(V_k) \\
&\quad = \left(\lim_{\varepsilon \to 0} \int_0^1 \frac{(h \circ g_\omega \circ f_y)(x + \varepsilon v_k, t) - (h \circ g_\omega \circ f_y)(x, t)}{\varepsilon}\right)(V_k) \\
&\quad = \left(\int_0^1 \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{(h \circ g_\omega \circ f_y)(x + \varepsilon v_k, t) - (h \circ g_\omega \circ f_y)(x, t)}{\varepsilon}\right)(V_k) \\
&\quad = \int_0^1 \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{(h \circ g_\omega \circ f_y)(x + \varepsilon v_k, t)(V_k) - (h \circ g_\omega \circ f_y)(x, t)(V_k)}{\varepsilon} \\
&\quad = \int_0^1 t^{\ell-1} \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\omega_{t(x+\varepsilon v_k)+y-ty}(x + \varepsilon v_k - y, V_k) - \omega_{tx+y-ty}(x - y, V_k)}{\varepsilon} \, \mathrm{d}t \\
&\quad = \int_0^1 t^{\ell-1} \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{(\omega_{t(x+\varepsilon v_k)+y-ty} - \omega_{tx+y-ty})(x - y, V_k) + \omega_{t(x+\varepsilon v_k)+y-ty}(\varepsilon v_k, V_k)}{\varepsilon} \, \mathrm{d}t \\
&\quad = \int_0^1 t^{\ell-1} \lim_{\varepsilon \to 0} \left(\frac{(\omega_{tx+y-ty+\varepsilon v_k} - \omega_{tx+y-ty})(x - y, V_k)}{\frac{\varepsilon}{t}} + \omega_{tx+y-ty+\varepsilon v_k}(v_k, V_k)\right) \mathrm{d}t \\
&\quad = \int_0^1 t^{\ell-1}(t(\omega'(tx + y - ty)(v_k))(x - y, V_k) + \omega_{tx+y-ty}(v_k, V_k)) \, \mathrm{d}t \\
&\quad = \int_0^1 t^{\ell}(\omega'(tx + y - ty)(v_k))(x - y, V_k) \, \mathrm{d}t + \int_0^1 t^{\ell-1} \omega_{tx+y-ty}(v_k, V_k) \, \mathrm{d}t,
\end{aligned}
$$

joten termi $(d(T_{B,y}\omega))_x(V)$ on muotoa

$$
\begin{aligned}
&(d(T_{B,y}\omega))_x(V) = \sum_{k=1}^{\ell} (-1)^{k-1}((T_{B,y}\omega)'(x)(v_k))(V_k) \\
&\quad = \sum_{k=1}^{\ell} (-1)^{k-1} \left(\int_0^1 t^{\ell}(\omega'(tx + y - ty)(v_k))(x - y, V_k) \, \mathrm{d}t + \int_0^1 t^{\ell-1} \omega_{tx+y-ty}(v_k, V_k) \, \mathrm{d}t\right) \\
&\quad = \sum_{k=1}^{\ell} (-1)^{k-1} \int_0^1 t^{\ell}(\omega'(tx + y - ty)(v_k))(x - y, V_k) \, \mathrm{d}t + \ell \int_0^1 t^{\ell-1} \omega_{tx+y-ty}(V) \, \mathrm{d}t \\
&\quad = -\sum_{k=1}^{\ell} (-1)^{k} \int_0^1 t^{\ell}(\omega'(tx + y - ty)(v_k))(x - y, V_k) \, \mathrm{d}t + \ell \int_0^1 t^{\ell-1} \omega_{tx+y-ty}(V) \, \mathrm{d}t.
\end{aligned}
$$

Täten termien $(T_{B,y}(d\omega))_x(V)$ ja $(d(T_{B,y}\omega))_x(V)$ summa on muotoa

$$\begin{aligned}
&(T_{B,y}(d\omega))_x(V) + (d(T_{B,y}\omega))_x(V) \\
&= \int_0^1 t^\ell(\omega'(tx+y-ty)(x-y))(V)\,\mathrm{d}t + \ell\int_0^1 t^{\ell-1}\omega_{tx+y-ty}(V)\,\mathrm{d}t \\
&= \int_0^1 \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(t^\ell\omega_{tx+y-ty}(V)\right)\,\mathrm{d}t = \Big/_{0}^{1} t^\ell\omega_{tx+y-ty}(V) = \omega_x(V)
\end{aligned}$$

ja väite seuraa. $\square$

Olkoon $B \subset \mathbb{R}^n$ kuula. Olkoon $\varphi \in C_c^\infty(B,\mathbb{R})$ sellainen ei-negatiivinen funktio, että $\int_B \varphi(y)\,\mathrm{d}y = 1$, $||\varphi||_\infty \leq \frac{2(n+1)}{|B|}$ ja $||\nabla\varphi||_\infty \leq \frac{4(n+1)}{|B|(\operatorname{diam} B)}$. *Kuulan B ℓ:s Poincaré-operaattori* on lineaarikuvaus $T\colon \Omega^\ell(B) \to \Omega^{\ell-1}(B)$, joka on määritelty kaavalla

$$T\omega = \int_B \varphi(y)T_{B,y}\omega\,\mathrm{d}y. \tag{5.24}$$

Olkoon $f\colon B\times B\times[0,1] \to B\times[0,1]\times\mathbb{R}^n$ sileä kuvaus, joka on määritelty kaavalla

$$(y,x,t) \mapsto (tx+y-ty, t, x-y) = f_y(x,t).$$

Koska jokaisella $\omega \in \Omega^\ell(B)$ kuvaus $h\circ g_\omega\circ f$ on sileä, niin kuvaus

$$(y,x) \mapsto \int_0^1 (h\circ g_\omega\circ f)(y,x,t)\,\mathrm{d}t = (T_{B,y}\omega)_x$$

on sileä joukossa $B\times B$. Näin ollen jokaisella $\omega\in\Omega^\ell(B)$ kuvaus

$$x \mapsto \int_B \varphi(y)(T_{B,y}\omega)_x\,\mathrm{d}y$$

on sileä kuulassa B. Täten Poincaré-operaattori $T\colon \Omega^\ell(B)\to\Omega^{\ell-1}(B)$ on hyvin määritelty. Osoitetaan, että Poincaré-operaattori T säilyttää identiteettikuvauksen ja nollakuvauksen välisen ketjuhomotopian.

Lause 5.25. *Olkoon $B\subset\mathbb{R}^n$ kuula ja olkoot $T^\ell\colon \Omega^\ell(B)\to\Omega^{\ell-1}(B)$ kuulan B ℓ:s Poincaré-operaattori ja $T^{\ell+1}\colon \Omega^{\ell+1}(B)\to\Omega^\ell(B)$ kuulan B $(\ell+1)$:s Poincaré-operaattori. Tällöin*

$$\omega = d(T^\ell\omega) + T^{\ell+1}(d\omega) \tag{5.26}$$

jokaisella $\omega\in\Omega^\ell(B)$.

Todistus. Olkoon $\omega \in \Omega^\ell(B)$. Koska yhtälöstä (5.23) seuraa yhtäsuuruus

$$\begin{aligned}
\omega &= \int_B \varphi(y)\omega \,\mathrm{d}y = \int_B \varphi(y) d(T_{B,y}\omega)\,\mathrm{d}y + \int_B \varphi(y) T_{B,y}(d\omega))\,\mathrm{d}y \\
&= \int_B \varphi(y) d(T_{B,y}\omega)\,\mathrm{d}y + T^{\ell+1}(d\omega),
\end{aligned}$$

niin riittää osoittaa, että $d(T^\ell\omega) = \int_B \varphi(y)d(T_{B,y}\omega)\,\mathrm{d}y$. Olkoot $x \in B$ ja $v_1, \ldots, v_\ell \in \mathbb{R}^n$. Merkitään $V = (v_1, \ldots, v_\ell)$ ja $V_k = (v_1, \ldots, \hat{v_k}, \ldots, v_\ell)$ jokaisella $k = 1, \ldots, \ell$. Tällöin pätee yhtäsuuruus

$$\begin{aligned}
(d(T^\ell\omega))_x(V) &= \sum_{k=1}^{\ell} (-1)^{k-1}((T^\ell\omega)'(x)(v_k))(V) \\
&= \sum_{k=1}^{\ell} (-1)^{k-1} \lim_{h\to 0} \frac{\int_B \varphi(y)((T_{B,y}\omega)_{x+hv_k} - (T_{B,y}\omega)_x)(V_k)\,\mathrm{d}y}{h} \\
&= \int_B \varphi(y) \sum_{k=1}^{\ell} (-1)^{k-1} \lim_{h\to 0} \frac{((T_{B,y}\omega)_{x+hv_k} - (T_{B,y}\omega)_x)(V_k)}{h}\,\mathrm{d}y \\
&= \int_B \varphi(y) \sum_{k=1}^{\ell} (-1)^{k-1}((T_{B,y}\omega)'(x)(v_k))(V_k)\,\mathrm{d}y \\
&= \int_B \varphi(y)(d(T^\ell\omega))_x(V)\,\mathrm{d}y
\end{aligned}$$

ja väite seuraa. □

Olkoot $B \subset \mathbb{R}^n$ kuula, $\ell \in \{1, \ldots, n\}$ ja $T\colon \Omega^\ell(B) \to \Omega^{\ell-1}(B)$ kuulan B ℓ:s Poincaré-operaattori. Osoitetaan, että Poincaré-operaattorin T rajoittuma

$$T|_{\Omega_c^\ell(B)}\colon \Omega_c^\ell(B) \to L^p(B, \Lambda^{\ell-1}(\mathbb{R}^n))$$

on hyvin määritelty ja jatkuva jokaisella $1 \le p < \infty$. Myös Poincaré-operaattorin T rajoittumaa $T|_{\Omega_c^\ell(B)}$ kutsutaan kuulan B ℓ:ksi Poincaré-operaattoriksi.

Lause 5.27. *Olkoot $B \subset \mathbb{R}^n$ kuula, $\ell \in \{1, \ldots, n\}$ ja $T\colon \Omega^\ell(B) \to \Omega^{\ell-1}(B)$ kuulan B ℓ:s Poincaré-operaattori. Tällöin jokaisella $\omega \in \Omega_c^\ell(B)$ pätee*

$$||T\omega||_{p,B} \le C(n)(\operatorname{diam} B)\,||\omega||_{p,B}$$

jokaisella $1 \le p < \infty$, missä $C(n) > 0$.

Olkoon $\Phi\colon B \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ kuvaus, joka on määritelty kaavalla

$$(a,b) \mapsto b \int_0^\infty t^{\ell-1}(1+t)^{n-\ell}\varphi(a-tb)\,\mathrm{d}t.$$

Muotoillaan ja todistetaan kuvauksen Φ avulla seuraava lemma lauseen 5.27 todistusta varten.

Lemma 5.28. *Olkoot $B \subset \mathbb{R}^n$ kuula, $\ell \in \{1,\dots,n\}$ ja $T\colon \Omega^\ell(B) \to \Omega^{\ell-1}(B)$ kuulan B ℓ:s Poincaré-operaattori. Tällöin jokaisella $x \in B$ ja kaikilla $v_1,\dots,v_{\ell-1} \in \mathbb{R}^n$ pätee yhtälö*

$$(T\omega)_x(v_1,\dots,v_{\ell-1}) = \int_B \omega_y\left(\Phi(y,x-y),v_1,\dots,v_{\ell-1}\right)\mathrm{d}y. \tag{5.29}$$

Todistus. Olkoot $x \in B$ ja $v_1,\dots,v_{\ell-1} \in \mathbb{R}^n$. Merkitään $V = (v_1,\dots,v_{\ell-1})$. Käyttämällä muuttujanvaihtoa saadaan yhtäsuuruus

$$\begin{aligned}
(T\omega)_x &= \int_B \varphi(y)(T_{B,y}\omega)_x\,\mathrm{d}y = \int_B\int_0^1 \varphi(y)(h\circ g_\omega)(tx+y-ty,t,x-y)\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}y\\
&= \int_B\int_0^1 \varphi\left(\frac{y-tx}{1-t}\right)(h\circ g_\omega)\left(y,t,x-\frac{y-tx}{1-t}\right)(1-t)^{-n}\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}y\\
&= \int_B\int_0^\infty \varphi\left(y-t(x-y)\right)(h\circ g_\omega)\left(y,\frac{t}{1+t},(1-t)(x-y)\right)(1+t)^{n-2}\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}y.
\end{aligned}$$

Koska

$$\begin{aligned}
(h\circ g_\omega)\left(y,\frac{t}{1+t},(1-t)(x-y)\right)(V) &= \left(\frac{t}{1+t}\right)^{\ell-1}\omega_y((1+t)(x-y),V)\\
&= \left(\frac{t}{1+t}\right)^{\ell-1}(1+t)\omega_y(x-y,V),
\end{aligned}$$

niin saadaan yhtäsuuruus

$$\begin{aligned}
(T\omega)_x(V) &= \int_B\int_0^\infty \varphi\left(y-t(x-y)\right)\left(\frac{t}{1+t}\right)^{\ell-1}\omega_y(x-y,V)(1+t)^{n-1}\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}y\\
&= \int_B\left(\int_0^\infty \varphi\left(y-t(x-y)\right)t^{\ell-1}(1+t)^{n-\ell}\,\mathrm{d}t\right)\omega_y(x-y,V)\,\mathrm{d}y\\
&= \int_B \omega_y\left((x-y)\left(\int_0^\infty \varphi\left(y-t(x-y)\right)t^{\ell-1}(1+t)^{n-\ell}\,\mathrm{d}t\right),V\right)\mathrm{d}y\\
&= \int_B \omega_y\left(\Phi(y,x-y),V\right)\mathrm{d}y.
\end{aligned}$$

□

Seuraavassa lemmassa osoitetaan kaksi yhtälöä, joista ensimmäinen on tarpeellinen lauseen 5.27 todistuksessa ja toinen on tarpeellinen vasta myöhemmin alaluvussa. Yhtälöt on kuitenkin luonnollista todistaa yhtäaikaa.

Lemma 5.30. *Olkoot* $B \subset \mathbb{R}^n$ *kuula ja* $\ell \in \{1, \ldots, n\}$. *Olkoot* $\psi \in C_c^\infty(B, \mathbb{R})$, $a \in B$ *ja* $b \in B^n(0, \operatorname{diam} B) \setminus \{0\}$. *Tällöin yhtälöt*

$$\int_0^\infty t^{\ell-1}(1+t)^{n-\ell}\psi(a-tb)\,\mathrm{d}t = \sum_{k=\ell}^{n} \binom{n-\ell}{k-\ell} \frac{1}{|b|^k} \int_0^{\operatorname{diam} B} t^{k-1}\psi\left(a - t\frac{b}{|b|}\right)\mathrm{d}t \tag{5.31}$$

ja

$$\int_0^\infty t^{\ell}(1+t)^{n-\ell}\psi(a-tb)\,\mathrm{d}t = \sum_{k=\ell}^{n} \binom{n-\ell}{k-\ell} \frac{1}{|b|^{k+1}} \int_0^{\operatorname{diam} B} t^{k}\psi\left(a - t\frac{b}{|b|}\right)\mathrm{d}t \tag{5.32}$$

pätevät.

Todistus. Käyttämällä binomikaavaa

$$t^{\ell-1}(1+t)^{n-\ell} = \sum_{k=\ell}^{n}\binom{n-\ell}{k-\ell} t^{k-1}$$

ja muuttujanvaihtoa saadaan yhtäsuuruudet

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty t^{\ell-1}(1+t)^{n-\ell}\psi(a-tb)\,\mathrm{d}t &= \sum_{k=\ell}^{n}\binom{n-\ell}{k-\ell}\int_0^\infty t^{k-1}\psi(a-tb)\,\mathrm{d}t \\
&= \sum_{k=\ell}^{n}\binom{n-\ell}{k-\ell}\frac{1}{|b|}\int_0^\infty \left(\frac{t}{|b|}\right)^{k-1}\psi\left(a - t\frac{b}{|b|}\right)\mathrm{d}t
\end{aligned}$$

ja

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty t^{\ell}(1+t)^{n-\ell}\psi(a-tb)\,\mathrm{d}t &= \sum_{k=\ell}^{n}\binom{n-\ell}{k-\ell}\int_0^\infty t^{k}\psi(a-tb)\,\mathrm{d}t \\
&= \sum_{k=\ell}^{n}\binom{n-\ell}{k-\ell}\frac{1}{|b|}\int_0^\infty \left(\frac{t}{|b|}\right)^{k}\psi\left(a - t\frac{b}{|b|}\right)\mathrm{d}t.
\end{aligned}$$

Näin ollen väite seuraa siitä, että $\psi\left(a - t\frac{b}{|b|}\right) = 0$ jokaisella $t > \operatorname{diam} B$. $\square$

Muotoillaan ja todistetaan vielä kaksi lemmaa ennen lauseen 5.27 todistusta.

Lemma 5.33. *Olkoot $B \subset \mathbb{R}^n$ kuula ja $\omega\colon B \to \Lambda^\ell(\mathbb{R}^n)$ differentiaalimuoto. Tällöin jokaisella $y \in B$, jokaisella $x \in \mathbb{R}^n$ ja jokaisella $\sigma \in S(\ell-1, n-\ell+1)$ pätee*

$$\left|\omega_y(x, e_{\sigma(1)}, \dots, e_{\sigma(\ell-1)})\right| \le n\,|\omega(y)|\,|x|\,. \tag{5.34}$$

Todistus. Olkoot $y \in B$, $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ ja $\sigma \in S(\ell-1, n-\ell+1)$. Merkitään $E = (e_{\sigma(1)}, \dots, e_{\sigma(\ell-1)})$. Tällöin voidaan tehdä arvio

$$\begin{aligned}
|\omega_y(x,E)| &= \left|\omega_y\left(\sum_{k=1}^n x_k e_k, E\right)\right| = \left|\sum_{k=1}^n x_k \omega_y(e_k, E)\right| \le \sum_{k=1}^n |x_k|\,|\omega_y(e_k,E)| \\
&\le |\omega(y)| \sum_{k=1}^n |x_k| \le n\,|\omega(y)|\,|x|\,.
\end{aligned}$$

□

Lemma 5.35. *Olkoot $B \subset \mathbb{R}^n$ kuula, $1 \le p < \infty$ ja $\omega \in L^p(B, \Lambda^\ell(\mathbb{R}^n))$. Tällöin pätee*

$$\left(\int_B \left(\int_B \frac{|\omega(y)|}{|x-y|^{n-1}}\,\mathrm{d}y\right)^p \mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}} \le n(\operatorname{diam} B)\,|B^n(0,1)|\,||\omega||_{p,B}\,. \tag{5.36}$$

Todistus. Olkoon $\rho\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ määritelty kaavalla

$$x \mapsto \begin{cases} |\omega(x)|\,, & \text{kun } x \in B, \\ 0, & \text{muulloin.} \end{cases}$$

Kuvaus ρ kuuluu avaruuteen $L^p(\mathbb{R}^n)$, sillä $\omega \in L^p(B, \Lambda^\ell(\mathbb{R}^n))$. Olkoon $\Psi\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ määritelty kaavalla

$$x \mapsto \begin{cases} \frac{1}{|x|^{n-1}}, & \text{kun } x \in B^n(0, \operatorname{diam} B) \setminus \{0\}, \\ 0, & \text{muulloin.} \end{cases}$$

Kuvaus Ψ kuuluu avaruuteen $L^1(\mathbb{R}^n)$, sillä

$$\begin{aligned}
||\Psi||_{1,\mathbb{R}^n} &= \int_{B^n(0,\operatorname{diam} B)} \frac{1}{|x|^{n-1}}\,\mathrm{d}x = \int_{S^{n-1}(0,1)} \int_0^{\operatorname{diam} B} \frac{1}{|t|^{n-1}} t^{n-1}\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}S \\
&= (\operatorname{diam} B)\left|S^{n-1}(0,1)\right| = n(\operatorname{diam} B)\,|B^n(0,1)|\,.
\end{aligned}$$

Näin ollen Youngin konvoluutioepäyhtälön nojalla saadaan arvio

$$\begin{aligned}
\left(\int_B \left(\int_B \frac{|\omega(y)|}{|x-y|^{n-1}}\,\mathrm{d}y\right)^p \mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}} &= ||\rho * \Psi||_{p,\mathbb{R}^n} \le ||\rho||_{p,\mathbb{R}^n}\,||\Psi||_{1,\mathbb{R}^n} \\
&= n(\operatorname{diam} B)\,|B^n(0,1)|\,||\omega||_{p,B}\,.
\end{aligned}$$

□

Lauseen 5.27 todistus. Olkoot $\omega \in \Omega_c^\ell(B)$ ja $1 \le p < \infty$. Tällöin differentiaalimuoto $T\omega$ on muotoa

$$T\omega = \sum_{\sigma \in S(\ell-1, n-\ell+1)} (T\omega)_\sigma dx_{\sigma(1)} \wedge \cdots \wedge dx_{\sigma(\ell-1)},$$

missä jokainen komponenttifunktio $(T\omega)_\sigma$ kuuluu avaruuteen $C_c^\infty(B, \mathbb{R})$. Osoitetaan aluksi, että jokaisella $x \in B$ ja jokaisella $\sigma \in S(\ell-1, n-\ell+1)$ pätee epäyhtälö

$$|(T\omega)_\sigma(x)| \le \frac{2^{2n+1}(n+1)n}{|B^n(0,1)|} \int_B \frac{|\omega(y)|}{|x-y|^{n-1}} \, \mathrm{d}y. \tag{5.37}$$

Olkoon $x \in B$. Merkitään $E_\sigma = (e_{\sigma(1)}, \ldots, e_{\sigma(\ell-1)})$ jokaisella $\sigma \in S(\ell-1, n-\ell+1)$. Yhtälön (5.29) ja epäyhtälön (5.34) nojalla jokaisella $\sigma \in S(\ell-1, n-\ell+1)$ saadaan arvio

$$\begin{aligned} |(T\omega)_\sigma(x)| &= |(T\omega)_x(E_\sigma)| = \left| \int_B \omega_y \left(\Phi(y, x-y), E_\sigma \right) \mathrm{d}y \right| \le \int_B \left| \omega_y \left(\Phi(y, x-y), E_\sigma \right) \right| \mathrm{d}y \\ &\le n \int_B |\omega(y)| \, |\Phi(y, x-y)| \, \mathrm{d}y. \end{aligned}$$

Jokaisella sellaisella $y \in B$, että $y \ne x$, pätee yhtälön (5.31) nojalla epäyhtälö

$$\begin{aligned} |\Phi(y, x-y)| &= \left| \sum_{k=\ell}^n \binom{n-\ell}{k-\ell} \frac{x-y}{|x-y|^k} \int_0^{\operatorname{diam} B} t^{k-1} \varphi\left(y - t\frac{x-y}{|x-y|} \right) \mathrm{d}t \right| \\ &\le \sum_{k=\ell}^n \binom{n-\ell}{k-\ell} \frac{||\varphi||_\infty}{|x-y|^{k-1}} \Big/_{0}^{\operatorname{diam} B} \frac{t^k}{k} \\ &\le (\operatorname{diam} B) \frac{2(n+1)}{|B|} \sum_{k=\ell}^n \binom{n-\ell}{k-\ell} \left(\frac{\operatorname{diam} B}{|x-y|} \right)^{k-1} \\ &\le (\operatorname{diam} B) \frac{2(n+1)}{|B|} 2^n \left(\frac{\operatorname{diam} B}{|x-y|} \right)^{n-1} = \frac{2^{2n+1}(n+1)}{|B^n(0,1)|} \frac{1}{|x-y|^{n-1}}. \end{aligned}$$

Täten epäyhtälö (5.37) pätee jokaisella $\sigma \in S(\ell-1, n-\ell+1)$. Näin ollen jokaisella $\sigma \in S(\ell-1, n-\ell+1)$ epäyhtälöstä (5.36) seuraa arvio

$$\begin{aligned} ||(T\omega)_\sigma||_{p,B} &\le \frac{2^{2n+1}(n+1)n}{|B^n(0,1)|} \left(\int_B \left(\int_B \frac{|\omega(y)|}{|x-y|^{n-1}} \, \mathrm{d}y \right)^p \mathrm{d}x \right)^{\frac{1}{p}} \\ &\le 2^{2n+1}(n+1)n^2 (\operatorname{diam} B) \, ||\omega||_{p,B}. \end{aligned}$$

Tällöin differentiaalimuodon $T\omega$ normille $||T\omega||_{p,B}$ saadaan arvio

$$\begin{aligned}
||T\omega||_{p,B} &\leq \left(\int_B \left(\sum_{\sigma\in S(\ell-1,n-\ell+1)} |(T\omega)_\sigma|\right)^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \sum_{\sigma\in S(\ell-1,n-\ell+1)} \left(\int_B |(T\omega)_\sigma|^p\right)^{\frac{1}{p}} \\
&\leq \sum_{\sigma\in S(\ell-1,n-\ell+1)} 2^{2n+1}(n+1)n^2(\operatorname{diam} B)\,||\omega||_{p,B} \\
&= \binom{n}{\ell} 2^{2n+1}(n+1)n^2(\operatorname{diam} B)\,||\omega||_{p,B} \leq 2^{3n+1}(n+1)n^2(\operatorname{diam} B)\,||\omega||_{p,B}
\end{aligned}$$

ja väite seuraa. □

Korollaari 5.38. *Olkoon $B \subset \mathbb{R}^n$ kuula. Tällöin jokaisella $\ell \in \{1,\dots,n\}$ ja jokaisella $1 \leq p < \infty$ kuulan B ℓ:s Poincaré-operaattori $T\colon \Omega^\ell_c(B) \to L^p(B, \Lambda^{\ell-1}(\mathbb{R}^n))$ voidaan laajentaa sellaiseksi lineaarikuvaukseksi*

$$T\colon L^p(B, \Lambda^\ell(\mathbb{R}^n)) \to L^p(B, \Lambda^{\ell-1}(\mathbb{R}^n)),$$

että $||T||_{\text{op}} \leq C(n)(\operatorname{diam} B)$, missä $C(n) > 0$.

Huomautus 5.39. Myös laajennettua lineaarikuvausta kutsutaan kuulan B ℓ:ksi Poincaré-operaattoriksi.

Todistus. Olkoon $1 \leq p < \infty$. Avaruudet $L^p(B, \Lambda^\ell(\mathbb{R}^n))$ ja $L^p(B, \Lambda^{\ell-1}(\mathbb{R}^n))$ ovat Banachin avaruuksia ja avaruus $\Omega^\ell_c(B)$ on avaruuden $L^p(B, \Lambda^\ell(\mathbb{R}^n))$ tiheä aliavaruus. Lauseen 5.27 nojalla lineaarikuvaus $T\colon \Omega^\ell_c(B) \to L^p(B, \Lambda^{\ell-1}(\mathbb{R}^n))$ on jatkuva, sillä kuvaus toteuttaa ehdon $||T||_{\text{op}} \leq C(n)(\operatorname{diam} B)$. Näin ollen on olemassa sellainen yksikäsitteinen laajennus

$$T\colon L^p(B, \Lambda^\ell(\mathbb{R}^n)) \to L^p(B, \Lambda^{\ell-1}(\mathbb{R}^n)),$$

että laajennetun kuvauksen operaattorinormi on sama kuin alkuperäisen kuvauksen. Täten myös laajennettu kuvaus toteuttaa ehdon $||T||_{\text{op}} \leq C(n)(\operatorname{diam} B)$. □

Olkoot $B \subset \mathbb{R}^n$ kuula ja $1 \leq p < \infty$. Olkoot

$$T^\ell\colon L^p(B, \Lambda^\ell(\mathbb{R}^n)) \to L^p(B, \Lambda^{\ell-1}(\mathbb{R}^n))$$

kuulan B ℓ:s Poincaré-operaattori ja

$$T^{\ell+1}\colon L^p(B, \Lambda^{\ell+1}(\mathbb{R}^n)) \to L^p(B, \Lambda^\ell(\mathbb{R}^n))$$

kuulan B $(\ell+1)$:s Poincaré-operaattori. Halutaan osoittaa Poincaré-operaattoreille T^ℓ ja $T^{\ell+1}$ lausetta 5.26 vastaava tulos. Olkoon $\omega \in L^p(B, \Lambda^\ell(\mathbb{R}^n))$. Jos ei ole olemassa heikkoa ulkoista derivaattaa $d\omega \in L^p(B, \Lambda^{\ell+1}(\mathbb{R}^n))$, niin differentiaalimuotoa $T^{\ell+1}(d\omega)$ ei ole määritelty. Osoitetaan, että heikon ulkoisen derivaatan $d\omega \in L^p(B, \Lambda^{\ell+1}(\mathbb{R}^n))$ olemassaolo on riittävä ehto yhtälölle $\omega = d(T^\ell\omega) + T^{\ell+1}(d\omega)$.

Lemma 5.40. *Olkoot $B \subset \mathbb{R}^n$ kuula ja $1 \le p < \infty$. Olkoot*

$$T^\ell \colon L^p(B, \Lambda^\ell(\mathbb{R}^n)) \to L^p(B, \Lambda^{\ell-1}(\mathbb{R}^n))$$

kuulan B ℓ:s Poincaré-operaattori ja

$$T^{\ell+1} \colon L^p(B, \Lambda^{\ell+1}(\mathbb{R}^n)) \to L^p(B, \Lambda^\ell(\mathbb{R}^n))$$

kuulan B $(\ell+1)$:s Poincaré-operaattori. Tällöin

$$d(T^\ell\omega) = \omega - T^{\ell+1}(d\omega)$$

heikossa mielessä jokaisella $\omega \in W^{d,p}(B, \Lambda^\ell(\mathbb{R}^n))$.

Todistus. Olkoon $\omega \in W^{d,p}(B, \Lambda^\ell(\mathbb{R}^n))$. Koska $T^\ell\omega \in L^p(B, \Lambda^{\ell-1}(\mathbb{R}^n))$ ja $\omega - T^{\ell+1}(d\omega) \in L^p(B, \Lambda^\ell(\mathbb{R}^n))$, niin riittää osoittaa, että jokaisella $\tau \in \Omega_c^{n-\ell}(B)$ pätee

$$\int_B (\omega - T^{\ell+1}(d\omega)) \wedge \tau = (-1)^\ell \int_B T^\ell\omega \wedge d\tau.$$

Olkoon $\tau \in \Omega_c^{n-\ell}(B)$. Lauseen 5.14 nojalla on olemassa sellainen jono $(\omega_m)_{m\in\mathbb{N}} \subset \Omega^\ell(B) \cap W^{d,p}(B, \Lambda^\ell(\mathbb{R}^n))$, että

$$||\omega - \omega_m||_{p,D} \to 0 \quad \text{ja} \quad ||d\omega - d\omega_m||_{p,D} \to 0,$$

kun $m \to \infty$. Lisäksi, koska T^ℓ on jatkuva lineaarikuvaus, niin $\left|\left|T^\ell\omega - T^\ell\omega_m\right|\right|_{p,B} \to 0$, kun $m \to \infty$.

Nyt jokaisella $m \in \mathbb{N}$ pätee

$$\begin{aligned}\int_B (\omega - T^{\ell+1}(d\omega)) \wedge \tau &= \int_B (\omega - \omega_m) \wedge \tau - \int_B (T^{\ell+1}(d\omega) - T^{\ell+1}(d\omega_m)) \wedge \tau \\ &\quad + \int_B (\omega_m - T^{\ell+1}(d\omega_m)) \wedge \tau.\end{aligned}$$

Lemman 5.7 nojalla $\int_B (\omega - \omega_m) \wedge \tau \to 0$, kun $m \to 0$. Lauseen 5.27 perusteella pätee

$$\begin{aligned}\left|\left|T^{\ell+1}(d\omega) - T^{\ell+1}(d\omega_m)\right|\right|_{p,B} &= \left|\left|T^{\ell+1}(d\omega - d\omega_m)\right|\right|_{p,B} \\ &\le C(n)(\operatorname{diam} B)\, ||d\omega - d\omega_m||_{p,B} \to 0,\end{aligned}$$

kun $m \to \infty$. Täten lemman 5.7 nojalla $\int_B (T^{\ell+1}(d\omega) - T^{\ell+1}(d\omega_m)) \wedge \tau \to 0$, kun $m \to \infty$.

Yhtälön (5.26) nojalla jokaisella $m \in \mathbb{N}$ pätee

$$\int_B (\omega_m - T^{\ell+1}(d\omega_m)) \wedge \tau = \int_B d(T^\ell\omega_m) \wedge \tau = (-1)^\ell \int_B T^\ell\omega_m \wedge d\tau.$$

Näin ollen lemman 5.7 nojalla pätee

$$\int_B (\omega - T^{\ell+1}(d\omega)) \wedge \tau = (-1)^\ell \lim_{m\to\infty} \int_B T^\ell \omega_m \wedge d\tau = (-1)^\ell \int_B T^\ell \omega \wedge d\tau.$$

$\square$

Olkoot $B \subset \mathbb{R}^n$ kuula, $1 < p < \infty$ ja $\ell \in \{1, \ldots, n\}$. Seuraava propositio osoittaa, että kuulan B ℓ:s Poincaré-operaattori

$$T\colon L^p(B, \Lambda^\ell(\mathbb{R}^n)) \to L^p(B, \Lambda^{\ell-1}(\mathbb{R}^n))$$

määrittelee kuvauksen

$$T\colon L^p(B, \Lambda^\ell(\mathbb{R}^n)) \to W^{1,p}(B, \Lambda^{\ell-1}(\mathbb{R}^n)),$$

joka on jatkuva normissa $\nparallel \cdot ||_{W^{1,p}(B,\Lambda^{\ell-1}(\mathbb{R}^n))}$; katso [9, Proposition 4.1, s. 39]. Proposition todistus perustuu siihen, että väite seuraa Calderónin-Zygmundin ydintä vastaavan integraalioperaattorin jatkuvuudesta; [4, Theorem 2, s. 290]. Singulaaristen integraalien teoriaan ei tässä työssä tutustuta tarkemmin.

Propositio 5.41. *Olkoot $B \subset \mathbb{R}^n$ kuula, $1 < p < \infty$ ja $\ell \in \{1, \ldots, n\}$. Olkoon*

$$T\colon L^p(B, \Lambda^\ell(\mathbb{R}^n)) \to L^p(B, \Lambda^{\ell-1}(\mathbb{R}^n))$$

kuulan B ℓ:s Poincaré-operaattori. Tällöin $T\omega \in W^{1,p}(B, \Lambda^{\ell-1}(\mathbb{R}^n))$ ja

$$\nparallel T\omega||_{W^{1,p}(B,\Lambda^{\ell-1}(\mathbb{R}^n))} \leq C(n,p)\, ||\omega||_{p,B} \tag{5.42}$$

jokaisella $\omega \in L^p(B, \Lambda^\ell(\mathbb{R}^n))$, missä $C(n,p) > 0$.

Väitteen palauttaminen singulaaristen integraalien teoriaan. Olkoon $\omega \in L^p(B, \Lambda^\ell(\mathbb{R}^n))$. Tällöin differentiaalimuoto $T\omega$ on muotoa

$$T\omega = \sum_{\sigma \in S(\ell-1, n-\ell+1)} (T\omega)_\sigma dx_{\sigma(1)} \wedge \cdots \wedge dx_{\sigma(\ell-1)},$$

missä jokainen komponenttifunktio $(T\omega)_\sigma$ kuuluu avaruuteen $L^p(B)$. Koska $||T||_{\mathrm{op}} \leq C(n)(\operatorname{diam} B)$ korollaarin 5.38 perusteella, niin

$$\nparallel T\omega||_{p,B} = \frac{1}{\operatorname{diam} B} ||T\omega||_{p,B} \leq \frac{1}{\operatorname{diam} B} ||T||_{\mathrm{op}} ||\omega||_{p,B} \leq C(n)\, ||\omega||_{p,B}.$$

Näin ollen riittää osoittaa, että $T\omega \in W^{1,p}(B, \Lambda^{\ell-1}(\mathbb{R}^n))$ ja $||\nabla(T\omega)||_{p,B} \leq C(n,p)\, ||\omega||_{p,B}$.

Olkoot $\sigma \in S(\ell-1, n-\ell+1)$ ja $E = (e_{\sigma(1)}, \ldots, e_{\sigma(\ell-1)})$. Määritellään jokaisella $y \in B$ kuvaus $\Phi^y\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ kaavalla $x \mapsto \Phi(y, x-y)$. Tavoitteena on osoittaa, että jokaisella $i = 1, \ldots, n$ komponenttifunktion $(T\omega)_\sigma$ i:s heikko derivaatta

$$\frac{\partial (T\omega)_\sigma}{\partial x_i} = \int_B \omega_y \left(\frac{\partial \Phi^y}{\partial x_i}, E \right) \mathrm{d}y$$

toteuttaa epäyhtälön

$$\left|\left| \frac{\partial (T\omega)_\sigma}{\partial x_i} \right|\right|_{p,B} \leq C(n,p) \left|\left|\omega\right|\right|_{p,B}.$$

Koska jokaisella $y \in B$ ja jokaisella $i = 1, \ldots, n$ pätee yhtälö

$$\frac{\partial \Phi^y}{\partial x_i}(x) = e_i \int_0^\infty t^{\ell-1}(1+t)^{n-\ell} \varphi(y-t(x-y))\,\mathrm{d}t - (x-y)\int_0^\infty t^\ell (1+t)^{n-\ell} \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(y-t(x-y))\,\mathrm{d}t$$

jokaisella $x \in \mathbb{R}^n$, niin yhtälöiden (5.31) ja (5.32) nojalla jokaisella $y \in B$ ja jokaisella $i = 1, \ldots, n$ pätee yhtälö

$$\begin{aligned}\frac{\partial \Phi^y}{\partial x_i}(x) = &\sum_{k=\ell}^{n} \binom{n-\ell}{k-\ell} \frac{e_i}{|x-y|^k} \int_0^{\operatorname{diam} B} t^{k-1} \varphi\left(y - t\frac{x-y}{|x-y|} \right) \mathrm{d}t \\ &- \sum_{k=\ell}^{n} \binom{n-\ell}{k-\ell} \frac{x-y}{|x-y|^{k+1}} \int_0^{\operatorname{diam} B} t^{k} \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}\left(y - t\frac{x-y}{|x-y|} \right) \mathrm{d}t\end{aligned}$$

jokaisella sellaisella $x \in B$, että $x \neq y$. Määritellään jokaisella $i = 1, \ldots, n$ kuvaus $L_i\colon B \times (\mathbb{R}^n \setminus \{0\}) \to \mathbb{R}^n$ kaavalla

$$\begin{aligned}(a,b) \mapsto &\sum_{k=\ell}^{n-1} \binom{n-\ell}{k-\ell} \frac{e_i}{|b|^k} \int_0^{\operatorname{diam} B} t^{k-1} \varphi\left(a - t\frac{b}{|b|} \right) \mathrm{d}t \\ &- \sum_{k=\ell}^{n-1} \binom{n-\ell}{k-\ell} \frac{b}{|b|^{k+1}} \int_0^{\operatorname{diam} B} t^{k} \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}\left(a - t\frac{b}{|b|} \right) \mathrm{d}t.\end{aligned}$$

Määritellään jokaisella $i = 1, \ldots, n$ kuvaus $K_i\colon B \times (\mathbb{R}^n \setminus \{0\}) \to \mathbb{R}^n$ kaavalla

$$(a,b) \mapsto \frac{e_i}{|b|^n} \int_0^{\operatorname{diam} B} t^{n-1} \varphi\left(a - t\frac{b}{|b|} \right) \mathrm{d}t - \frac{b}{|b|^{n+1}} \int_0^{\operatorname{diam} B} t^{n} \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}\left(a - t\frac{b}{|b|} \right) \mathrm{d}t.$$

Täten jokaisella $y \in B$ ja jokaisella $i = 1, \ldots, n$ pätee

$$\frac{\partial \Phi^y}{\partial x_i}(x) = L_i(y, x-y) + K_i(y, x-y) \tag{5.43}$$

jokaisella sellaisella $x \in B$, että $x \neq y$. Määritellään jokaisella $i = 1, \ldots, n$ kuvaus $A_i \colon B \to \mathbb{R}$ kaavalla

$$x \mapsto \int_B \omega_y \left(L_i(y, x-y), E \right) \, \mathrm{d}y.$$

Määritellään jokaisella $i = 1, \ldots, n$ kuvaus $S_i \colon B \to \mathbb{R}$ kaavalla

$$x \mapsto \int_B \omega_y \left(K_i(y, x-y), E \right) \, \mathrm{d}y.$$

Näin ollen jokaisella $i = 1, \ldots, n$ pätee yhtälö

$$\frac{\partial (T\omega)_\sigma}{\partial x_i} = A_i + S_i.$$

Jokaisella $i = 1, \ldots, n$ riittää siis arvioida kuvausten A_i ja S_i normeja $||A_i||_{p,B}$ ja $||S_i||_{p,B}$.

Tässä työssä ei todenneta sitä, mutta jokaisella $i = 1, \ldots, n$ ydin K_i on Calderónin-Zygmundin ydin. Näin ollen jokaisella $i = 1, \ldots, n$ ydintä K_i vastaava integraalioperaattori on jatkuva, joten jokaisella $i = 1, \ldots, n$ saadaan arvio

$$||S_i||_{p,B} \leq C(n,p) \, ||\omega||_{p,B} .$$

Jokaisella $i = 1, \ldots, n$ voidaan tehdä arvio

$$\begin{aligned}
|L_i(y, x-y)| &\leq \sum_{k=\ell}^{n-1} \binom{n-\ell}{k-\ell} \left(\frac{||\varphi||_\infty}{|x-y|^k} \int_0^{\operatorname{diam} B} \frac{t^k}{k} + \frac{||\nabla\varphi||_\infty}{|x-y|^k} \int_0^{\operatorname{diam} B} \frac{t^{k+1}}{k+1} \right) \\
&\leq \frac{2(n+1)}{|B|} \sum_{k=\ell}^{n-1} \binom{n-\ell}{k-\ell} \left(\frac{\operatorname{diam} B}{|x-y|} \right)^k \left(\frac{1}{k} + \frac{2}{k+1} \right) \\
&\leq \frac{2(n+1)}{|B|} 2^n \left(\frac{\operatorname{diam} B}{|x-y|} \right)^{n-1} = \frac{1}{\operatorname{diam} B} \frac{2^{2n+1}(n+1)}{|B^n(0,1)|} \frac{1}{|x-y|^{n-1}}
\end{aligned}$$

jokaisella sellaisella $x \in B$ ja jokaisella sellaisella $y \in B$, että $x \neq y$. Tällöin epäyhtälöiden (5.34) ja (5.36) nojalla jokaisella $i = 1, \ldots, n$ saadaan arvio

$$||A_i||_{p,B} \leq \frac{2^{2n+1}(n+1)n^2}{|B^n(0,1)|} \, ||\omega||_{p,B} = C(n) \, ||\omega||_{p,B} .$$

Täten on osoitettu arvio

$$\left|\left| \frac{\partial (T\omega)_\sigma}{\partial x_i} \right|\right|_{p,B} \leq C(n,p) \, ||\omega||_{p,B} ,$$

missä permutaatio $\sigma \in S(\ell-1, n-\ell+1)$ on mielivaltaisesti valittu. Tällöin saadaan arvio

$$\begin{aligned}
||\nabla(T\omega)||_{p,B} &= \left(\int_B \left|\left(\frac{\partial(T\omega)_\sigma}{\partial x_i}\right)_{\sigma,i}\right|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\int_B \left(\sum_{\sigma,i}\left|\frac{\partial(T\omega)_\sigma}{\partial x_i}\right|\right)^p\right)^{\frac{1}{p}} \\
&\leq \sum_{\sigma,i}\left(\int_B \left|\frac{\partial(T\omega)_\sigma}{\partial x_i}\right|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \sum_{\sigma,i} C(n,p)\, ||\omega||_{p,B} = n\binom{n}{\ell} C(n,p)\, ||\omega||_{p,B} \\
&\leq C(n,p)\, ||\omega||_{p,B}
\end{aligned}$$

ja väite seuraa. □

Olkoot $B \subset \mathbb{R}^n$ kuula, $1 < p < n$ ja $\ell \in \{1, \ldots, n\}$. Proposition 5.41 seurauksena saadaan osoitettua Sobolev-Poincaré epäyhtälö Sobolev-avaruuden $W^{d,p}(B, \Lambda^\ell(\mathbb{R}^n))$ differentiaalimuodoille.

Korollaari 5.44. *Olkoot $B \subset \mathbb{R}^n$ kuula, $1 < p < n$ ja $\ell \in \{1, \ldots, n\}$. Olkoon*

$$T \colon L^p(B, \Lambda^{\ell+1}(\mathbb{R}^n)) \to W^{1,p}(B, \Lambda^\ell(\mathbb{R}^n))$$

kuulan B $(\ell+1)$:s Poincaré-operaattori. Tällöin $T(d\omega) \in L^{p^*}(B, \Lambda^\ell(\mathbb{R}^n))$ ja

$$||T(d\omega)||_{p^*,B} \leq C(n,p)\, ||d\omega||_{p,B} \tag{5.45}$$

jokaisella $\omega \in W^{d,p}(B, \Lambda^\ell(\mathbb{R}^n))$, missä $p^* = \frac{np}{n-p}$ ja $C(n,p) > 0$.

Todistus. Olkoon $\omega \in W^{d,p}(B, \Lambda^\ell(\mathbb{R}^n))$. Koska $d\omega \in L^p(B, \Lambda^{\ell+1}(\mathbb{R}^n))$, niin proposition 5.41 nojalla pätee $T(d\omega) \in W^{1,p}(B, \Lambda^\ell(\mathbb{R}^n))$ ja

$$||T(d\omega)||_{W^{1,p}(B,\Lambda^\ell(\mathbb{R}^n))} \leq C(n,p)\, ||d\omega||_{p,B}\,.$$

Koska differentiaalimuoto $T(d\omega)$ on muotoa

$$T(d\omega) = \sum_{i_1 < \cdots < i_\ell} (T(d\omega))_I\, dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_\ell},$$

missä jokainen komponenttifunktio $(T(d\omega))_I$ kuuluu avaruuteen $W^{1,p}(B, \mathbb{R})$, niin korollaarin 4.8 nojalla saadaan arvio

$$
\begin{aligned}
||T(d\omega)||_{p^*,B} &\leq \left(\int_B \left(\sum_{i_1<\cdots<i_\ell} |(T(d\omega))_I| \right)^{p^*} \right)^{\frac{1}{p^*}} \leq \sum_{i_1<\cdots<i_\ell} \left(\int_B |(T(d\omega))_I|^{p^*} \right)^{\frac{1}{p^*}} \\
&\leq \sum_{i_1<\cdots<i_\ell} C(n,p) \left(\frac{1}{\operatorname{diam} B} \left(\int_B |(T(d\omega))_I|^p \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_B |\nabla (T(d\omega))_I|^p \right)^{\frac{1}{p}} \right) \\
&\leq \sum_{i_1<\cdots<i_\ell} C(n,p) \left(\frac{1}{\operatorname{diam} B} \left(\int_B |T(d\omega)|^p \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_B |\nabla T(d\omega)|^p \right)^{\frac{1}{p}} \right) \\
&= \binom{n}{\ell} C(n,p) \not\| \, T(d\omega)||_{W^{1,p}(B,\Lambda^\ell(\mathbb{R}^n))} \leq C(n,p) \not\| \, T(d\omega)||_{W^{1,p}(B,\Lambda^\ell(\mathbb{R}^n))}.
\end{aligned}
$$

Tämä päättää todistuksen. $\square$

Luku 6

Sobolev-avaruudet monistolla

Tässä luvussa siirretään lukujen 4 ja 5 käsitteitä euklidisesta avaruudesta monistolle.

6.1 Sobolev-avaruus $W^{1,n}_{\mathrm{loc}}(D, M)$

Olkoot $D \subset \mathbb{R}^n$ alue ja M sileä n-monisto. Tässä alaluvussa määritellään Sobolev-avaruus $W^{1,n}_{\mathrm{loc}}(D, M)$ ja sen alkioiden tangenttikuvaus.

Määritelmä 6.1. Olkoot $D \subset \mathbb{R}^n$ alue ja M sileä n-monisto. Jatkuva kuvaus $f \colon D \to M$ *kuuluu avaruuteen* $W^{1,n}_{\mathrm{loc}}(D, M)$, jos jokaisella $x \in D$ on olemassa sellainen ympäristö $U \ni x$ ja sellainen kartta (V, h) monistolla M, että $f(U) \subset V$ ja $h \circ f|_U \in W^{1,n}_{\mathrm{loc}}(U, \mathbb{R}^n)$.

Seuraavassa lemmassa osoitetaan, että moniston Sobolev-kuvauksen määritelmässä 6.1 valittavilla ympäristöllä ja kartalla ei ole merkitystä.

Lemma 6.2. *Olkoot $D \subset \mathbb{R}^n$ alue, M sileä n-monisto ja $f \in W^{1,n}_{\mathrm{loc}}(D, M)$. Tällöin jokaisella $x \in D$ ja jokaisella sellaisella moniston M kartalla (V, h), että $f(x) \in V$, on olemassa sellainen ympäristö $U \ni x$, että $f(U) \subset V$ ja $h \circ f|_U \in W^{1,n}_{\mathrm{loc}}(U, \mathbb{R}^n)$.*

Todistus. Olkoot $x \in D$ ja pari (V, h) sellainen kartta, että $f(x) \in V$. Määritelmän 6.1 nojalla on olemassa sellainen ympäristö $U_0 \ni x$ ja sellainen kartta (V_0, h_0), että $f(U_0) \subset V_0$ ja $h_0 \circ f|_{U_0} \in W^{1,n}_{\mathrm{loc}}(U_0, \mathbb{R}^n)$. Koska kuvaus $f \colon D \to M$ on jatkuva ja $f(x) \in V$, niin on myös olemassa sellainen ympäristö $U_1 \ni x$, että $f(U_1) \subset V$. Koska kuvaus $h \circ h_0^{-1} \colon h_0(V_0 \cap V) \to h(V_0 \cap V)$ on diffeomorfismi ja $h_0(f(x)) \in h_0(V_0 \cap V)$, niin on olemassa sellainen pisteen $h_0(f(x))$ ympäristö W, että kuvaus $h \circ h_0^{-1}$ on Lipshitz-jatkuva joukossa W.

Osoitetaan, että voidaan valita pisteen x ympäristö $U = (h_0 \circ f)^{-1}(W) \cap U_0 \cap U_1$. Valinnan perusteella selvästi pätee, että $f(U) \subset f(U_1) \subset V$. Voidaan kirjoittaa $h \circ f|_U = (h \circ h_0^{-1})|_W \circ h_0 \circ f|_U$, missä kuvaus $(h \circ h_0^{-1})|_W \colon W \to (h \circ h_0^{-1})(W)$ on Lipschitz-jatkuva diffeomorfismi. Lisäksi kuvaus $h_0 \circ f|_U \colon U \to W$ kuuluu avaruuteen $W^{1,n}_{\text{loc}}(U, \mathbb{R}^n)$, joten lemman 4.3 perusteella $h \circ f|_U \in W^{1,n}_{\text{loc}}(U, \mathbb{R}^n)$. □

Olkoot $D \subset \mathbb{R}^n$ alue, M sileä n-monisto ja $f \in W^{1,n}_{\text{loc}}(D, M)$. Tällöin kuvaus f ei välttämättä ole riittävän sileä, jotta tangenttikuvaus olisi määritelty perinteisessä mielessä. Halutaan kuitenkin etsiä tangenttikuvauksen yleistus avaruuden $W^{1,n}_{\text{loc}}(D, M)$ alkioille.

Olkoon pari (V, h) sellainen kartta monistolla M, että $f^{-1}(V) \subset D$. Tällöin melkein jokaisella $x \in f^{-1}(V)$ voidaan tarkastella lineaarikuvausta

$$(Dh^{-1})(h(f(x))) \circ D(h \circ f)(x) \colon \mathbb{R}^n \to T_{f(x)}M.$$

Jos kuvauksen f tangenttikuvaus on määritelty, niin se vastaa tarkasteltavaa lineaarikuvausta.

Lause 6.3. *Olkoot $D \subset \mathbb{R}^n$ alue, M sileä n-monisto ja $f \in W^{1,n}_{\text{loc}}(D, M)$. Tällöin kuvaukselle f voidaan määritellä melkein jokaisella $x \in D$ tangenttikuvaus $Df(x) \colon \mathbb{R}^n \to T_{f(x)}M$ kaavalla $Df(x) = (Dh^{-1})(h(f(x))) \circ D(h \circ f)(x)$, missä pari (V, h) on mikä tahansa sellainen moniston M kartta, että $f(x) \in V$.*

Todistus. Halutaan osoittaa, että tangenttikuvauksen määritelmä on riippumaton kartan valinnasta. Oletetaan siis, että on olemassa sellaiset kartat (V_0, h_0) ja (V_1, h_1), että $U = f^{-1}(V_0) \cap f^{-1}(V_1) \neq \emptyset$.

Tällöin kirjoittamalla $h_0^{-1} = h_1^{-1} \circ h_1 \circ h_0^{-1}$ saadaan

$$\begin{aligned}(Dh_0^{-1})(h_0(f(x))) &= D(h_1^{-1} \circ h_1 \circ h_0^{-1})(h_0(f(x))) \\ &= (Dh_1^{-1})(h_1(f(x))) \circ D(h_1 \circ h_0^{-1})(h_0(f(x)))\end{aligned}$$

melkein jokaisella $x \in U$. Vastaavasti kirjoittamalla $h_0 \circ f = h_0 \circ h_1^{-1} \circ h_1 \circ f$ ja käyttämällä lemmaa 4.3 sopivassa pisteen x ympäristössä saadaan

$$\begin{aligned}D(h_0 \circ f)(x) &= D(h_0 \circ h_1^{-1} \circ h_1 \circ f)(x) \\ &= D(h_0 \circ h_1^{-1})(h_1(f(x))) \circ D(h_1 \circ f)(x)\end{aligned}$$

melkein jokaisella $x \in U$. Koska

$$D(h_1 \circ h_0^{-1})(h_0(f(x))) \circ D(h_0 \circ h_1^{-1})(h_1(f(x))) = D(h_1 \circ h_0^{-1} \circ h_0 \circ h_1^{-1})(h_1(f(x))) = \text{id}$$

melkein jokaisella $x \in U$, niin yhdistämällä välivaiheet on saatu osoitettua, että määritelmä on riippumaton kartan valinnasta, sillä

$$(Dh_0^{-1})(h_0(f(x))) \circ D(h_0 \circ f)(x) = D(h_1^{-1})(h_1(f(x))) \circ D(h_1 \circ f)(x)$$

melkein jokaisella $x \in U$. □

Määritelmä 6.4. Olkoot $D \subset \mathbb{R}^n$ alue, M sileä n-monisto ja $f \in W^{1,n}_{\mathrm{loc}}(D, M)$. Määritellään jokaisella $\omega \in \Omega^\ell(M)$ *pullback-muoto* $f^*\omega \colon \mathbb{R}^n \to \Lambda^\ell(\mathbb{R}^n)$ kaavalla

$$(f^*\omega)_x = (Df(x))^*(\omega_{f(x)}) \tag{6.5}$$

melkein jokaisella $x \in \mathbb{R}^n$.

Määritelmä 6.6. Olkoot $D \subset \mathbb{R}^n$ alue, M n-ulotteinen suunnistettu Riemannin monisto ja $f \in W^{1,n}_{\mathrm{loc}}(D, M)$. *Kuvauksen f Jacobiaani* on funktio $J_f \colon D \to \mathbb{R}$, joka toteuttaa yhtälön

$$J_f(x)\,\mathrm{vol}_{\mathbb{R}^n} = (f^*\,\mathrm{vol}_M)_x$$

melkein jokaisella $x \in D$.

6.2 Sobolev-avaruus $W^{d,p,q}(M, \Lambda^\ell(TM))$

Olkoot M suunnistettu n-ulotteinen Riemannin monisto ja $\omega \colon M \to \Lambda^\ell(TM)$ differentiaalimuoto. Koska monistolla M on määritelty Riemannin mitta μ ja ℓ:s ulkoinen kimppu $\Lambda^\ell(TM)$ on sileä monisto, niin voidaan puhua differentiaalimuodon ω mitallisuudesta. Sanotaan, että ω on mitallinen differentiaalimuoto, jos kuvaus $\omega \colon M \to \Lambda^\ell(TM)$ on mitallinen. Tämän jälkeen avaruuksien $L^p(M, \Lambda^\ell(TM))$ määritteleminen on tapahtuu luonnollisesti jokaisella $1 \leq p \leq \infty$.

Määritelmä 6.7. Olkoon M n-ulotteinen Riemannin monisto. Differentiaalimuodon $\omega \colon M \to \Lambda^\ell(TM)$ *pisteittäinen normi* on funktio $|\omega| : M \to \mathbb{R}$, joka on määritelty kaavalla $x \mapsto ||\omega_x||_{\Lambda^\ell(T_xM)}$. Merkitään $|\omega|(x) = |\omega(x)|$ jokaisella $x \in M$.

Määritelmä 6.8. Olkoot M suunnistettu n-ulotteinen Riemannin monisto, μ Riemannin mitta monistolla M ja $1 \leq p < \infty$. Mitallinen differentiaalimuoto $\omega \colon M \to \Lambda^\ell(TM)$ *kuuluu avaruuteen* $L^p(M, \Lambda^\ell(TM))$, jos

$$||\omega||_p = \left(\int_M |\omega|^p \, \mathrm{d}\mu \right)^{\frac{1}{p}} < \infty.$$

Määritelmä 6.9. Olkoot M suunnistettu n-ulotteinen Riemannin monisto. Mitallinen differentiaalimuoto $\omega \colon M \to \Lambda^\ell(TM)$ *kuuluu avaruuteen* $L^\infty(M, \Lambda^\ell(TM))$, jos

$$||\omega||_\infty = \operatorname{ess\,sup}_{x \in M} |\omega(x)| < \infty,$$

missä oleellinen supremum otetaan Riemannin mitan suhteen.

Olkoot M suunnistettu n-ulotteinen Riemannin monisto ja $1 \leq p, q < \infty$. Heikko ulkoinen derivaatta ja avaruus $W^{d,p,q}(M, \Lambda^\ell(TM))$ voidaan määritellä vastaavasti kuin euklidisessa tapauksessa.

Määritelmä 6.10. Olkoon M suunnistettu n-ulotteinen Riemannin monisto. Olkoot $\omega \in L^1_{\text{loc}}(M, \Lambda^\ell(TM))$ ja $\tau \in L^1_{\text{loc}}(M, \Lambda^{\ell+1}(TM))$. Jos jokaisella $\varphi \in \Omega_c^{n-\ell-1}(M)$ pätee

$$\int_M \omega \wedge d\varphi = (-1)^{\ell+1} \int_M \tau \wedge \varphi, \tag{6.11}$$

niin sanotaan, että $d\omega = \tau$ *heikossa mielessä.*

Määritelmä 6.12. Olkoot M suunnistettu n-ulotteinen Riemannin monisto ja $1 \leq p, q < \infty$. Differentiaalimuoto $\omega \colon M \to \Lambda^\ell(TM)$ *kuuluu avaruuteen* $W^{d,p,q}(M, \Lambda^\ell(TM))$, jos $\omega \in L^p(M, \Lambda^\ell(TM))$ ja on olemassa sellainen differentiaalimuoto $\tau \in L^q(M, \Lambda^{\ell+1}(TM))$, että $d\omega = \tau$ heikossa mielessä. Erikoistapauksessa $p = q$ merkitään $W^{d,p,p}(M, \Lambda^\ell(TM)) = W^{d,p}(M, \Lambda^\ell(TM))$.

Luku 7

Kvasisäännöllinen analyysi

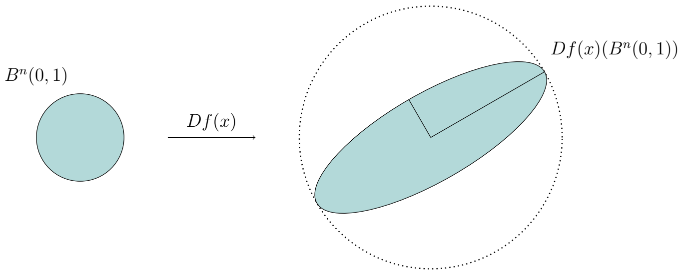
Luvussa esitellään kvasisäännöllisen kuvauksen määritelmä ja kvasisäännöllisiin kuvauksiin liittyviä tuloksia. Luvun lopuksi määritellään kvasisäännöllisen kuvauksen kohomologinen arvojenjakautumisraja ja lausutaan tulos sen olemassaolosta, jonka avulla esitetään todistus lauseelle 1.2.

7.1 Kvasisäännöllinen kuvaus

Tässä alaluvussa tutustutaan kvasisäännöllisiin kuvauksiin sekä euklidiselta avaruudelta euklidiselle avaruudelle että euklidiselta avaruudelta suunnistetulle Riemannin monistolle.

Aloitetaan määrittelemällä kvasisäännöllinen kuvaus euklidisten avaruuksien välillä. Formaalia määritelmää seuraa havainnollistava kuva.

Määritelmä 7.1. Olkoot $n \geq 2$, $D \subset \mathbb{R}^n$ alue ja $K \geq 1$. Kuvaus $f\colon D \to \mathbb{R}^n$ on *K-kvasisäännöllinen*, jos $f \in W^{1,n}_{\mathrm{loc}}(D, \mathbb{R}^n)$ ja $||Df(x)||^n_{\mathrm{op}} \leq K J_f(x)$ melkein jokaisella $x \in D$.



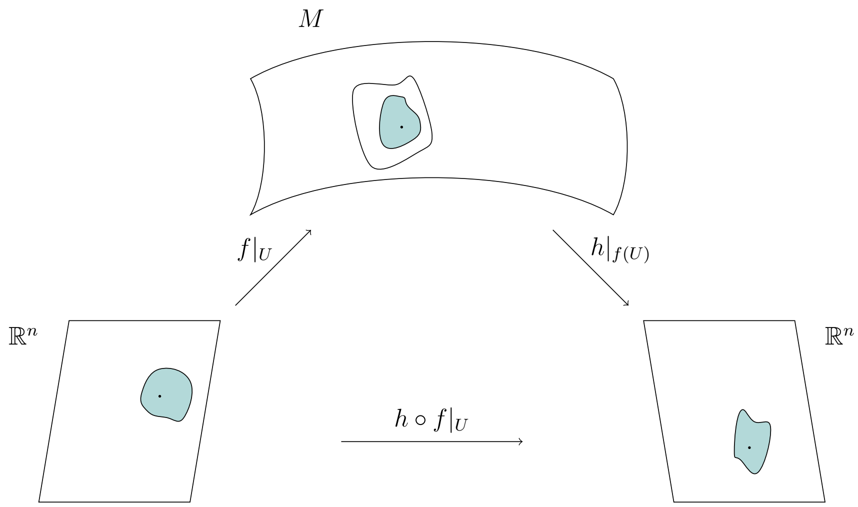
Kuva 7.1

Määritelmässä 7.1 ei vaadita, että kvasisäännöllinen kuvaus on jatkuva. Voidaan kuitenkin osoittaa, että jokaisen kvasisäännöllisen kuvauksen ekvivalenssiluokalla on olemassa jatkuva edustaja; katso [16, 3.9. Theorem, s. 177].

Olkoot $n \geq 2$, $D \subset \mathbb{R}^n$ alue ja $K \geq 1$. Kuvassa 7.1 havainnollistetaan sitä, miten yksikkökuula kuvautuu K-kvasisäännöllisen kuvauksen $f\colon D \to \mathbb{R}^n$ tangenttikuvauksessa. Kuvassa 7.1 ellipsoidin pisimmän akselin pituus on $||Df(x)||_{\mathrm{op}}$, ellipsoidin akselien pituuksien tulo on $J_f(x)$ ja katkoviivalla piirretyn kuulan tilavuus $||Df(x)||_{\mathrm{op}}^n \, |B^n(0,1)|$ on korkeintaan K kertaa ellipsoidin tilavuus $J_f(x)\, |B^n(0,1)|$.

Seuraavaksi määritellään kvasisäännöllinen kuvaus euklidiselta avaruudelta suunnistetulle Riemannin monistolle. Määritelmä voidaan antaa usein ekvivalentein tavoin. Tässä työssä käytetään Kangaslammen väitöskirjassaan [11] käyttämää määritelmää.

Määritelmä 7.2. Olkoot $n \geq 2$, M suunnistettu n-ulotteinen Riemannin monisto ja $K \geq 1$. Jatkuva kuvaus $f\colon \mathbb{R}^n \to M$ on K-*kvasisäännöllinen*, jos $f \in W^{1,n}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n, M)$ ja jokaisella $\varepsilon > 0$ ja jokaisella $x \in \mathbb{R}^n$ on olemassa sellainen pisteen x ympäristö $U \subset \mathbb{R}^n$ ja sellainen $(1+\varepsilon)$-bilipschitz-jatkuva kartta (V, h) monistolla M, että $f(U) \subset V$ ja kuvaus $h \circ f|_U\colon U \to \mathbb{R}^n$ on $((1+\varepsilon)^{2n}K)$-kvasisäännöllinen.



Kuva 7.2: Kvasisäännöllinen kuvaus $f\colon \mathbb{R}^n \to M$.

Olkoon $n \geq 2$. Määritelmää 7.2 voidaan soveltaa myös sellaisiin kuvauksiin $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, että $f \in W^{1,n}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$. Näin ollen halutaan, että näin saatava määritelmä kvasisäännöllisyydelle pysyy yhtäsopivana määritelmän 7.1 kanssa. Tämä selittää, miksi kartan vaaditaan olevan $(1+\varepsilon)$-bilipschitz-jatkuva ja yhdistetyn kuvauksen $((1+\varepsilon)^{2n}K)$-kvasisäännöllinen. Näytetään tämä esimerkeillä.

Esimerkki 7.3. Olkoot $n \geq 2$, $K \geq 1$ ja $\varepsilon > 0$. Olkoot $f \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ K-kvasisäännöllinen kuvaus ja $h \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ $(1+\varepsilon)$-bilipschitz-jatkuva diffeomorfismi. Tällöin lemman 4.3 perusteella pätee $h \circ f \in W^{1,n}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ ja $D(h \circ f)(x) = Dh(f(x)) \circ Df(x)$ melkein jokaisella $x \in \mathbb{R}^n$. Täten epäyhtälöiden (2.19) ja (2.20) nojalla saadaan arvio

$$\begin{aligned} ||D(h \circ f)(x)||^n_{\mathrm{op}} &= ||Dh(f(x)) \circ Df(x)||^n_{\mathrm{op}} \leq ||Dh(f(x))||^n_{\mathrm{op}} \, ||Df(x)||^n_{\mathrm{op}} \\ &\leq (1+\varepsilon)^n K J_f(x) \leq (1+\varepsilon)^n K J_f(x) J_h(f(x))(1+\varepsilon)^n \\ &= (1+\varepsilon)^{2n} K J_{h \circ f}(x) \end{aligned}$$

melkein jokaisella $x \in \mathbb{R}^n$.

Esimerkki 7.4. Kuvaus $f \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $(x,y) \mapsto (2x, y)$, ei ole 1-kvasisäännöllinen. Selvästi $f \in W^{1,n}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$ ja

$$||Df(x,y)||^2_{\mathrm{op}} = \left|\left| \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right|\right|^2_{\mathrm{op}} = 2^2 > 2 = J_f(x,y)$$

jokaisella $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

Määritellään diffeomorfismi $h \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $(x,y) \mapsto (x, 2y)$. Tällöin $h \circ f = 2\mathrm{id}$ on 1-kvasisäännöllinen, koska $h \circ f \in W^{1,n}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$ ja

$$||D(h \circ f)(x,y)||^2_{\mathrm{op}} = \left|\left| \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \right|\right|^2_{\mathrm{op}} = 2^2 = J_{h \circ f}(x,y)$$

jokaisella $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Tässä kuitenkin kuvaus h on 2-Lipschitz.

Määritelmä 7.5. Olkoot $n \geq 2$, M suunnistettu n-ulotteinen Riemannin monisto ja $K \geq 1$. Sanotaan, että monisto M on *K-kvasisäännöllisesti elliptinen*, jos on olemassa K-kvasisäännöllinen kuvaus $f \colon \mathbb{R}^n \to M$, joka ei ole vakiokuvaus.

Olkoot $n \geq 2$ ja M suunnistettu n-ulotteinen Riemannin monisto. Olkoot $K \geq 1$ ja $f \colon \mathbb{R}^n \to M$ K-kvasisäännöllinen kuvaus. Katsomalla määritelmää 7.1 herää kysymys, toteuttaako kuvaus f epäyhtälön $||Df(x)||^n_{\mathrm{op}} \leq K J_f(x)$ melkein jokaisella $x \in \mathbb{R}^n$. Seuraavassa lemmassa osoitetaan, että vastaus on kyllä.

Lemma 7.6. *Olkoot $n \geq 2$ ja M suunnistettu n-ulotteinen Riemannin monisto. Olkoot $K \geq 1$ ja $f \colon \mathbb{R}^n \to M$ K-kvasisäännöllinen kuvaus. Tällöin*

$$||Df(x)||^n_{\mathrm{op}} \leq K J_f(x) \tag{7.7}$$

melkein jokaisella $x \in \mathbb{R}^n$.

Todistus. Olkoot $\varepsilon > 0$ ja $y \in \mathbb{R}^n$. Tällöin on olemassa sellainen pisteen y ympäristö $D \subset \mathbb{R}^n$ ja sellainen $(1+\varepsilon)$-bilipschitz-jatkuva kartta (V, h), että $f(D) \subset V$ ja kuvaus $h \circ f \colon D \to \mathbb{R}^n$ on $((1+\varepsilon)^{2n}K)$-kvasisäännöllinen. Nyt epäyhtälöiden (2.19) ja (2.20) nojalla melkein jokaisella $x \in D$ pätee

$$\begin{aligned}
||Df(x)||_{\mathrm{op}}^n &= \left|\left|(Dh^{-1})(h(f(x)) \circ D(h \circ f)(x)\right|\right|_{\mathrm{op}}^n \\
&\leq \left|\left|(Dh^{-1})(h(f(x)))\right|\right|_{\mathrm{op}}^n ||D(h \circ f)(x)||_{\mathrm{op}}^n \\
&\leq (1+\varepsilon)^n (1+\varepsilon)^{2n} K J_{h\circ f}(x) \\
&= (1+\varepsilon)^{3n} K J_h(f(x)) J_f(x) \\
&\leq (1+\varepsilon)^{3n} K (1+\varepsilon)^n J_f(x) \\
&= (1+\varepsilon)^{4n} K J_f(x).
\end{aligned}$$

Koska pisteen $y \in \mathbb{R}^n$ valinta oli mielivaltainen, niin arvio $||Df(x)||_{\mathrm{op}}^n \leq (1+\varepsilon)^{4n} K J_f(x)$ pätee melkein jokaisella $x \in \mathbb{R}^n$. Myös $\varepsilon > 0$ oli mielivaltainen, joten väite seuraa. □

Olkoot $n \geq 2$ ja M suunnistettu n-ulotteinen Riemannin monisto. Olkoot $K \geq 1$ ja $f \colon \mathbb{R}^n \to M$ K-kvasisäännöllinen kuvaus, joka ei ole vakiokuvaus. Epäyhtälön (7.7) nojalla Jacobiaani J_f on ei-negatiivinen melkein kaikkialla joukossa $\mathbb{R}^n$. Epäyhtälöstä (7.7) seuraa myös se, että Jacobiaani J_f ei voi olla vakiokuvaus nolla, koska kuvaus f ei ole vakiokuvaus.

7.2 Pullback-operaatio

Olkoot $n \geq 2$ ja M yhtenäinen ja suunnistettu n-ulotteinen Riemannin monisto. Olkoot $K \geq 1$ ja $f \colon \mathbb{R}^n \to M$ K-kvasisäännöllinen kuvaus, joka ei ole vakiokuvaus. Olkoon $\omega \colon M \to \Lambda^\ell(TM)$ mitallinen differentiaalimuoto. Tällöin yhtälö (6.5) määrittelee mitallisen pullback-muodon $f^*\omega \colon \mathbb{R}^n \to \Lambda^\ell(\mathbb{R}^n)$; katso [12, Proposition 11.2, s. 50]. Tässä alaluvussa arvioidaan pullback-muodon $f^*\omega$ pisteittäistä normia $|f^*\omega|$ ja perehdytään pullback-muodon $f^*\omega$ säännöllisyyteen.

Jos $\omega \in L^\infty(M, \Lambda^\ell(TM))$, niin tällöin seuraava propositio antaa keskeisen arvion pullback-muodon $f^*\omega$ pisteittäiselle normille $|f^*\omega|$. Kyseinen arvio on tärkeä työkalu työssä.

Propositio 7.8. *Olkoot $n \geq 2$, M yhtenäinen ja suunnistettu n-ulotteinen Riemannin monisto ja μ Riemannin mitta monistolla M. Olkoot $K \geq 1$ ja $f \colon \mathbb{R}^n \to M$ K-kvasisäännöllinen kuvaus, joka ei ole vakiokuvaus. Olkoon $\omega \in L^\infty(M, \Lambda^\ell(TM))$. Tällöin*

$$|(f^*\omega)(x)| \leq C(n)\, ||\omega||_\infty \, ||Df(x)||_{\mathrm{op}}^\ell \tag{7.9}$$

melkein jokaisella $x \in \mathbb{R}^n$, missä $C(n) > 0$.

Proposition 7.8 todistusta varten osoitetaan, että kvasisäännöllinen kuvaus toteuttaa Lusinin ominaisuuden (N^{-1}).

Lause 7.10. [1, Theorem 8.1, s. 305] *Olkoot $n \geq 2$ ja $D \subset \mathbb{R}^n$ alue. Olkoot $K \geq 1$, ja $f\colon D \to \mathbb{R}^n$ K-kvasisäännöllinen kuvaus, joka ei ole vakiokuvaus. Olkoon $E \subset \mathbb{R}^n$ sellainen joukko, että $|E| = 0$. Tällöin $|f^{-1}(E)| = 0$.*

Korollaari 7.11. *Olkoot $n \geq 2$, M suunnistettu n-ulotteinen Riemannin monisto ja μ Riemannin mitta monistolla M. Olkoot $K \geq 1$ ja $f\colon \mathbb{R}^n \to M$ K-kvasisäännöllinen kuvaus, joka ei ole vakiokuvaus. Olkoon $E \subset M$ sellainen joukko, että $\mu(E) = 0$. Tällöin $|f^{-1}E| = 0$.*

Todistus. Jokaisella $x \in \mathbb{R}^n$ on olemassa sellainen ympäristö $D_x \subset \mathbb{R}^n$ ja sellainen 2-bilipschitz-jatkuva kartta (V_x, h_x), että $f(D_x) \subset V_x$ ja kuvaus $h_x \circ f|_{D_x}\colon D_x \to \mathbb{R}^n$ on $(2^{2n}K)$-kvasisäännöllinen. Nyt kokoelma $\{D_x\}_{x \in \mathbb{R}^n}$ on avaruuden $\mathbb{R}^n$ avoin peite, joten on olemassa numeroituva osapeite $\{D_{x_i}\}_{i \in \mathbb{N}}$. Tällöin

$$f^{-1}(E) = \bigcup_{i=1}^{\infty} (f|_{D_{x_i}})^{-1}(E \cap V_{x_i}).$$

Tarkastellaan joukkoja $E \cap V_{x_i} \subset V_{x_i}$. Joukot ovat nollamittaisia, sillä $0 \leq \mu(E \cap V_{x_i}) \leq \mu(E) = 0$. Koska (V_{x_i}, h_{x_i}) on 2-bilipschitz-jatkuva kartta, niin lemman 2.24 nojalla $|h_{x_i}(E \cap V_{x_i})| = 0$. Kuvaus $h_{x_i} \circ f|_{D_{x_i}}\colon D_{x_i} \to \mathbb{R}^n$ on $(2^{2n}K)$-kvasisäännöllinen, joten käyttämällä lausetta 7.10 saadaan yhtäsuuruus $\left|(f|_{D_{x_i}})^{-1}(E \cap V_{x_i})\right| = 0$. Täten

$$0 \leq \left|f^{-1}(E)\right| = \left|\bigcup_{i=1}^{\infty} (f|_{D_{x_i}})^{-1}(E \cap V_{x_i})\right| \leq \sum_{i=1}^{\infty} \left|(f|_{D_{x_i}})^{-1}(E \cap V_{x_i})\right| = 0.$$

□

Proposition 7.8 todistus. Osoitetaan ensin, että

$$||(f^*\omega)_x||_{\mathrm{op}} \leq n \left|\left|\omega_{f(x)}\right|\right|_{\Lambda^\ell(T_{f(x)}M)} ||Df(x)||_{\mathrm{op}}^{\ell}$$

melkein jokaisella $x \in \mathbb{R}^n$. Olkoot $v_1, \ldots, v_\ell \in \mathbb{R}^n$ yksikkövektoreita. Määritelmän 6.4 nojalla saadaan melkein jokaisella $x \in \mathbb{R}^n$ yhtäsuuruus

$$\begin{aligned} |(f^*\omega)_x(v_1, \ldots, v_\ell)| &= \left|((Df(x))^*(\omega_{f(x)}))(v_1, \ldots, v_\ell)\right| \\ &= \left|\omega_{f(x)}(Df(x)v_1, \ldots, Df(x)v_\ell)\right|. \end{aligned}$$

Jos $Df(x)v_i = 0$ jollakin $i = 1, \ldots, \ell$, niin

$$\left|\omega_{f(x)}(Df(x)v_1, \ldots, Df(x)v_\ell)\right| = 0.$$

Voidaan siis olettaa, että $Df(x)v_i \neq 0$ jokaisella $i = 1, \dots, \ell$. Tällöin lemman 2.8 nojalla saadaan arvio

$$\begin{aligned}
&\left|\omega_{f(x)}(Df(x)v_1, \dots, Df(x)v_\ell)\right| \\
&= \left(\prod_{i=1}^{\ell} ||Df(x)v_i||_{T_{f(x)}M}\right) \left|\omega_{f(x)}\left(\frac{Df(x)v_1}{||Df(x)v_1||_{T_{f(x)}M}}, \dots, \frac{Df(x)v_\ell}{||Df(x)v_\ell||_{T_{f(x)}M}}\right)\right| \\
&\leq \left(\prod_{i=1}^{\ell} ||Df(x)||_{\mathrm{op}}\right) \left|\left|\omega_{f(x)}\right|\right|_{\mathrm{op}} = ||Df(x)||_{\mathrm{op}}^{\ell} \left|\left|\omega_{f(x)}\right|\right|_{\mathrm{op}} \\
&\leq n \left|\left|\omega_{f(x)}\right|\right|_{\Lambda^\ell(T_{f(x)}M)} ||Df(x)||_{\mathrm{op}}^{\ell}
\end{aligned}$$

melkein jokaisella $x \in \mathbb{R}^n$.

Lemman 2.9 nojalla saadaan arvio

$$|(f^*\omega)(x)| = ||(f^*\omega)_x||_{\Lambda^\ell(\mathbb{R}^n)} \leq C(n)\, ||(f^*\omega)_x||_{\mathrm{op}} \leq C(n) \left|\left|\omega_{f(x)}\right|\right|_{\Lambda^\ell(T_{f(x)}M)} ||Df(x)||_{\mathrm{op}}^{\ell}$$

melkein jokaisella $x \in \mathbb{R}^n$. Merkitään

$$E = \{y \in M\colon\ |\omega(y)| > ||\omega||_\infty\}.$$

Koska $\omega \in L^\infty(M, \Lambda^\ell(TM))$, niin $\mu(E) = 0$. Tällöin korollaarin 7.11 nojalla pätee, että $|f^{-1}(E)| = 0$. Näin ollen melkein jokaisella $x \in \mathbb{R}^n$ pätee

$$\left|\left|\omega_{f(x)}\right|\right|_{\Lambda^\ell(T_{f(x)}M)} = |\omega(f(x))| \leq ||\omega||_\infty$$

ja väite seuraa. □

Olkoot $n \geq 2$ ja M yhtenäinen ja suunnistettu n-ulotteinen Riemannin monisto. Olkoot $K \geq 1$ ja $f\colon \mathbb{R}^n \to M$ K-kvasisäännöllinen kuvaus, joka ei ole vakiokuvaus. Olkoon $\omega\colon M \to \Lambda^\ell(TM)$ mitallinen differentiaalimuoto. Seuraavat kaksi propositiota ovat oleellisen tärkeitä tuloksia pullback-muodon $f^*\omega$ säännöllisyydestä.

Propositio 7.12. [12, Proposition 11.5, s. 52] *Olkoot $n \geq 2$ ja M yhtenäinen ja suunnistettu n-ulotteinen Riemannin monisto. Olkoot $K \geq 1$ ja $f\colon \mathbb{R}^n \to M$ K-kvasisäännöllinen kuvaus, joka ei ole vakiokuvaus. Olkoot $\ell \in \{1, \dots, n\}$ ja $\omega \in L^{\frac{n}{\ell}}_{\mathrm{loc}}(M, \Lambda^\ell(TM))$. Tällöin pätee $f^*\omega \in L^{\frac{n}{\ell}}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n, \Lambda^\ell(\mathbb{R}^n))$.*

Propositio 7.13. [12, Theorem 11.8, s. 54] *Olkoot $n \geq 2$ ja M yhtenäinen ja suunnistettu n-ulotteinen Riemannin monisto. Olkoot $K \geq 1$ ja $f\colon \mathbb{R}^n \to M$ K-kvasisäännöllinen kuvaus, joka ei ole vakiokuvaus. Olkoot $\ell \in \{1, \dots, n-1\}$ ja $\omega \in W^{d,\frac{n}{\ell},\frac{n}{\ell+1}}_{\mathrm{loc}}(M, \Lambda^\ell(TM))$. Tällöin pätee $f^*\omega \in W^{d,\frac{n}{\ell},\frac{n}{\ell+1}}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n, \Lambda^\ell(\mathbb{R}^n))$ ja $d(f^*\omega) = f^*(d\omega)$ heikossa mielessä.*

Seuraava propositio on kuulan Poincaré-operaattorin ja proposition 7.13 sovellus.

Propositio 7.14. *Olkoot $n \geq 2$ ja M suunnistettu n-ulotteinen Riemannin monisto. Olkoot $K \geq 1$ ja $f\colon \mathbb{R}^n \to M$ K-kvasisäännöllinen kuvaus, joka ei ole vakiokuvaus. Olkoot $1 \leq \ell \leq \frac{n}{2}$ ja $\omega \in \Omega^\ell(M)$ suljettu differentiaalimuoto. Olkoot $B \subset \mathbb{R}^n$ kuula, $p = \frac{n}{\ell}$ ja $q = \frac{n}{\ell}\frac{n}{n+1}$. Tällöin on olemassa sellainen $\tau \in L^p(B, \Lambda^{\ell-1}(\mathbb{R}^n))$, että $f^*\omega = d\tau$ heikossa mielessä ja*

$$||\tau||_{\frac{nq}{n-q},B} \leq C(n)\, ||f^*\omega||_{q,B}\,.$$

Todistus. Propositiosta 7.13 seuraa, että $f^*\omega \in L^p(B, \Lambda^\ell(\mathbb{R}^n))$ ja $d(f^*\omega) = f^*(d\omega) = 0$ heikossa mielessä. Olkoot

$$T^\ell\colon L^p(B, \Lambda^\ell(\mathbb{R}^n)) \to W^{1,p}(B, \Lambda^{\ell-1}(\mathbb{R}^n))$$

kuulan B ℓ:s Poincaré-operaattori ja

$$T^{\ell+1}\colon L^p(B, \Lambda^{\ell+1}(\mathbb{R}^n)) \to W^{1,p}(B, \Lambda^\ell(\mathbb{R}^n))$$

kuulan B $(\ell+1)$:s Poincaré-operaattori. Olkoon $\tau = T^\ell(f^*\omega) \in W^{1,p}(B, \Lambda^{\ell-1}(\mathbb{R}^n))$. Koska $f^*\omega \in W^{d,p}(B, \Lambda^\ell(\mathbb{R}^n))$, niin lemman 5.40 nojalla

$$d\tau = f^*\omega - T^{\ell+1}(d(f^*\omega)) = f^*\omega$$

heikossa mielessä.

Koska $q < p$ ja $\tau \in W^{1,p}(B, \Lambda^{\ell-1}(\mathbb{R}^n))$, niin $\tau \in W^{d,q}(B, \Lambda^{\ell-1}(\mathbb{R}^n))$. Lisäksi $1 < q < n$, joten korollaarin 5.44 nojalla saadaan arvio

$$||\tau||_{\frac{nq}{n-q},B} = \left|\left|T^\ell(d\tau)\right|\right|_{\frac{nq}{n-q},B} \leq C(n,q)\, ||d\tau||_{q,B} = C(n,\ell)\, ||f^*\omega||_{q,B} \leq C(n)\, ||f^*\omega||_{q,B}\,,$$

missä $C(n) = \max\{C(n,\ell)\colon 1 \leq \ell \leq \frac{n}{2}\}$. □

7.3 Kuvauksen käytös keskimäärin

Olkoot $n \geq 2$ ja M on suunnistettu n-ulotteinen Riemannin monisto. Olkoot $K \geq 1$ ja $f\colon \mathbb{R}^n \to M$ K-kvasisäännöllinen kuvaus, joka ei ole vakiokuvaus. Olkoot $x \in \mathbb{R}^n$ ja $r > 0$. Kuvauksen f käytöstä kuulassa $B^n(x,r)$ voidaan tutkia palauttamalla tilanne yksikkökuulaan affiinilla kuvauksella $T_{x,r}\colon B^n(0,1) \to B^n(x,r)$, $y \mapsto x + ry$. Merkitään siirrettyä kuvausta $f_{x,r} = f \circ T_{x,r}$.

Seuraavat kaksi lemmaa osoittavat, että kuvauksen f siirtäminen yksikkökuulaan ei tee suuria muutoksia kuvauksen f luonteeseen. Näin ollen kuvauksen f siirtäminen yksikkökuulaan antaa mielekkään tavan verrata sen käytöstä eri kuulaympäristöissä.

Lemma 7.15. *Olkoot $n \geq 2$ ja M on suunnistettu n-ulotteinen Riemannin monisto. Olkoot $K \geq 1$ ja $f\colon \mathbb{R}^n \to M$ K-kvasisäännöllinen kuvaus, joka ei ole vakiokuvaus. Olkoot $x \in \mathbb{R}^n$ ja $r > 0$. Tällöin kuvaus $f_{x,r}\colon B^n(0,1) \to M$ on K-kvasisäännöllinen.*

Todistus. Käytetään hyväksi tietoa, että $f_{x,r}$ on kvasisäännöllisen kuvauksen ja diffeomorfismin yhdistetty kuvaus. Osoitetaan ensin, että $f \circ T_{x,r} \in W^{1,n}_{\text{loc}}(B^n(0,1), M)$. Koska f on kvasisäännöllinen kuvaus, niin f on jatkuva kuvaus. Tällöin $f \circ T_{x,r}$ on jatkuvien kuvausten yhdisteenä jatkuva.

Olkoon $y \in B^n(0,1)$. Koska $f \in W^{1,n}_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n, M)$, niin on olemassa sellainen pisteen $T_{x,r}(y)$ ympäristö $W \subset B^n(x,r)$ ja sellainen kartta (V,h) monistolla M, että $h \circ f|_W \in W^{1,n}_{\text{loc}}(W, \mathbb{R}^n)$. Kuvauksen $T_{x,r}$ jatkuvuuden nojalla voidaan valita sellainen pisteen y ympäristö U, että $T_{x,r}(U) \subset W$. Täten lemman 4.3 nojalla pätee, että $h \circ f \circ T_{x,r} \in W^{1,n}_{\text{loc}}(U, \mathbb{R}^n)$. On siis osoitettu, että $f \circ T_{x,r} \in W^{1,n}_{\text{loc}}(B^n(0,1), M)$.

Osoitetaan sitten, että kvasisäännöllisyyden määritelmän 7.2 toinen ehto toteutuu. Olkoon $\varepsilon > 0$ ja $y \in B^n(0,1)$. Tällöin kuvauksen f kvasisäännöllisyyden nojalla on olemassa sellainen pisteen $T_{x,r}(y)$ ympäristö $W \subset \mathbb{R}^n$ ja sellainen $(1+\varepsilon)$-bilipschitz-jatkuva kartta (V,h) monistolla M, että $f(W) \subset V$ ja kuvaus $h \circ f|_W\colon W \to \mathbb{R}^n$ on $((1+\varepsilon)^{2n}K)$-kvasisäännöllinen. Koska kuvaus $T_{x,r}$ on jatkuva, niin on olemassa sellainen pisteen y ympäristö U, että $T_{x,r}(U) \subset W$. Osoitetaan vielä, että $h \circ f \circ T_{x,r}|_U\colon U \to \mathbb{R}^n$ on $((1+\varepsilon)^{2n}K)$-kvasisäännöllinen.

Koska $h \circ f|_W \in W^{1,n}_{\text{loc}}(W, \mathbb{R}^n)$, niin käyttämällä lemmaa 4.3 saadaan, että pätee $h \circ f \circ T_{x,r}|_U \in W^{1,n}_{\text{loc}}(U, \mathbb{R}^n)$ ja

$$D(h \circ f \circ T_{x,r})(z) = D(h \circ f)(T_{x,r}(z)) \circ DT_{x,r}(z)$$

melkein jokaisella $z \in U$. Tällöin melkein jokaisella $z \in U$ pätee arvio

$$\begin{aligned} ||D(h \circ f \circ T_{x,r})(z)||^n_{\text{op}} &= ||D(h \circ f)(T_{x,r}(z)) \circ DT_{x,r}(z)||^n_{\text{op}} \\ &\leq ||D(h \circ f)(T_{x,r}(z))||^n_{\text{op}}\, ||DT_{x,r}(z)||^n_{\text{op}} \\ &\leq (1+\varepsilon)^{2n} K J_{h\circ f}(T_{x,r}(z)) r^n = (1+\varepsilon)^{2n} K J_{h\circ f\circ T_{x,r}}(z). \end{aligned}$$

Täten kuvaus $h \circ f \circ T_{x,r}|_U\colon U \to \mathbb{R}^n$ on $((1+\varepsilon)^{2n}K)$-kvasisäännöllinen. □

Lemma 7.16. *Olkoot $n \geq 2$ ja M yhtenäinen ja suunnistettu n-ulotteinen Riemannin monisto. Olkoot $K \geq 1$ ja $f\colon \mathbb{R}^n \to M$ K-kvasisäännöllinen kuvaus, joka ei ole vakiokuvaus. Olkoot $x \in \mathbb{R}^n$ ja $r > 0$. Tällöin*

$$\int_{B^n(0,1)} |(f_{x,r})^*\omega|^{\frac{n}{\ell}} = \int_{B^n(x,r)} |f^*\omega|^{\frac{n}{\ell}} \tag{7.17}$$

jokaisella $\omega \in \Omega^\ell(M)$.

Todistus. Olkoon $\omega \in \Omega^\ell(M)$. Koska $f_{x,r} = f \circ T_{x,r}$, missä $T_{x,r}\colon B^n(0,1) \to B^n(x,r)$ on määritelty kaavalla $y \mapsto x + ry$, niin $((f_{x,r})^*\omega)_y = r^\ell (f^*\omega)_{T_{x,r}(y)}$ jokaisella $y \in B^n(0,1)$. Näin ollen muuttujanvaihdosta seuraa yhtäsuuruus

$$\begin{aligned}\int_{B^n(0,1)} |(f_{x,r})^*\omega|^{\frac{n}{\ell}} &= \int_{B^n(0,1)} r^n (|f^*\omega| \circ T_{x,r})^{\frac{n}{\ell}} \\ &= \int_{B^n(0,1)} J_{T_{x,r}} (|f^*\omega| \circ T_{x,r})^{\frac{n}{\ell}} = \int_{B^n(x,r)} |f^*\omega|^{\frac{n}{\ell}}.\end{aligned}$$

□

Seuraava lemma on tekninen aputulos myöhempää varten.

Lemma 7.18. *Olkoot $n \geq 2$ ja M yhtenäinen ja suunnistettu n-ulotteinen Riemannin monisto. Olkoot $K \geq 1$ ja $f\colon \mathbb{R}^n \to M$ K-kvasisäännöllinen kuvaus, joka ei ole vakiokuvaus. Olkoot $x \in \mathbb{R}^n$ ja $r > 0$. Tällöin*

$$||(f_{x,r})^*\omega||_{\frac{n}{\ell},B^n(0,1)} \leq C(n)\,||\omega||_\infty \left(K \int_{B^n(x,r)} J_f\right)^{\frac{\ell}{n}} \tag{7.19}$$

jokaisella $\omega \in \Omega^\ell(M)$.

Todistus. Olkoon $\omega \in \Omega^\ell(M)$. Yhtälöstä (7.17) ja epäyhtälöistä (7.9) ja (7.7) saadaan arvio

$$\begin{aligned}||(f_{x,r})^*\omega||_{\frac{n}{\ell},B^n(0,1)} &= \left(\int_{B^n(x,r)} |f^*\omega|^{\frac{n}{\ell}}\right)^{\frac{\ell}{n}} \leq C(n)\,||\omega||_\infty \left(\int_{B^n(x,r)} ||Df||^n_{\mathrm{op}}\right)^{\frac{\ell}{n}} \\ &\leq C(n)\,||\omega||_\infty \left(\int_{B^n(x,r)} KJ_f\right)^{\frac{\ell}{n}}.\end{aligned}$$

□

7.4 Kohomologinen arvojenjakautumisraja ja lauseen 1.2 todistus

Tässä alaluvussa jatketaan alaluvun 7.3 hengessä ja käydään läpi uusia merkintöjä ja määritelmiä. Erityisesti esitellään kvasisäännöllisen kuvauksen kohomologisen arvojenjakautumisrajan määritelmä. Alaluvun lopussa lausutaan tulos kvasisäännöllisen kuvauksen tietynlaisen kohomologisen arvojenjakautumisrajan olemassaolosta ja esitetään lauseen 1.2 todistus.

Olkoot $n \geq 2$ ja M on kompakti, yhtenäinen ja suunnistettu n-ulotteinen Riemannin monisto. Olkoot $K \geq 1$ ja $f\colon \mathbb{R}^n \to M$ K-kvasisäännöllinen kuvaus, joka ei ole vakiokuvaus. Koska $\mathrm{vol}_M \in \Omega^n(M)$ ja monisto M on kompakti, niin $f^* \mathrm{vol}_M$ kuuluu avaruuteen $L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n, \Lambda^n(\mathbb{R}^n))$ proposition 7.12 nojalla. Näin ollen funktion f Jacobiaani J_f kuuluu avaruuteen $L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$ ja $A_f\colon E \mapsto \int_E J_f$ on hyvin määritelty avaruuden $\mathbb{R}^n$ Borel-mitta.

Määritellään jokaisella $x \in \mathbb{R}^n$ ja jokaisella $r > 0$ lineaarikuvaus

$$(f_{x,r})^!\colon H^\ell(M) \to L^{\frac{n}{\ell}}(B^n(0,1), \Lambda^\ell(\mathbb{R}^n))$$

kaavalla

$$c \mapsto A_f(B^n(x,r))^{-\frac{\ell}{n}}(f_{x,r})^*\omega_c,$$

missä ω_c on ekvivalenssiluokan c yksikäsitteinen harmoninen edustaja. Kuvaus $(f_{x,r})^!$ on hyvin määritelty proposition 7.12 nojalla jokaisella $x \in \mathbb{R}^n$ ja jokaisella $r > 0$.

Seuraavassa lemmassa osoitetaan, että jokaisella $x \in \mathbb{R}^n$ ja jokaisella $r > 0$ lineaarikuvaus $(f_{x,r})^!$ kuvaa jokaisen ekvivalenssiluokan c heikosti suljetuksi muodoksi $(f_{x,r})^!c$, jonka normi $\left|\left|(f_{x,r})^!c\right|\right|_{\frac{n}{\ell},B^n(0,1)}$ on rajoitettu pisteestä x ja säteestä r riippumattomalla vakiolla. Lemma ja sen todistus saattavat vaikuttaa yksinkertaisilta, mutta lemmalla on kuitenkin merkittävä rooli työssä.

Lemma 7.20. *Olkoot $n \geq 2$ ja M kompakti, yhtenäinen ja suunnistettu n-ulotteinen Riemannin monisto. Olkoot $K \geq 1$ ja $f\colon \mathbb{R}^n \to M$ K-kvasisäännöllinen kuvaus, joka ei ole vakiokuvaus. Olkoot $x \in \mathbb{R}^n$, $r > 0$ ja $c \in H^\ell(M)$. Tällöin $d((f_{x,r})^!c) = 0$ heikossa mielessä ja*

$$\left|\left|(f_{x,r})^!c\right|\right|_{\frac{n}{\ell},B^n(0,1)} \leq C(n)\,||\omega_c||_\infty\, K^{\frac{\ell}{n}}.$$

Todistus. Proposition 3.18 nojalla $A_f(B^n(x,r))^{-\frac{\ell}{n}}\omega_c$ on suljettu muoto, joten lemman 7.15 ja proposition 7.13 nojalla pätee

$$d((f_{x,r})^!c) = (f_{x,r})^*\left(d\left(A_f(B^n(x,r))^{-\frac{\ell}{n}}\omega_c\right)\right) = 0$$

heikossa mielessä. Näin ollen väitteen ensimmäinen osa on todistettu. Lemman 7.18 nojalla saadaan arvio

$$\left|\left|(f_{x,r})^!c\right|\right|_{\frac{n}{\ell},B^n(0,1)} = A_f(B^n(x,r))^{-\frac{\ell}{n}}\,||(f_{x,r})^*\omega_c||_{\frac{n}{\ell},B^n(x,r)} \leq C(n)\,||\omega_c||_\infty\, K^{\frac{\ell}{n}}$$

ja väitteen toinenkin osa on todistettu. □

Seuraavaksi määritellään kvasisäännöllisen kuvauksen kohomologinen arvojenjakautumisraja ja lausutaan tulos, jonka suorana seurauksena saadaan todistus lauseelle 1.2. Tulos todistetaan seuraavan luvun lopussa.

Määritelmä 7.21. Olkoot $n \geq 2$ ja M kompakti, yhtenäinen ja suunnistettu n-ulotteinen Riemannin monisto. Olkoot $K \geq 1$ ja $f\colon \mathbb{R}^n \to M$ K-kvasisäännöllinen kuvaus, joka ei ole vakiokuvaus. Kuvaus

$$L\colon H^\ell(M) \to L^{\frac{n}{\ell}}(B^n(0,1), \Lambda^\ell(\mathbb{R}^n))$$

on *kuvauksen f ℓ:s kohomologinen arvojenjakautumisraja*, jos on olemassa sellainen jono $(B^n(x_m, r_m))_{m\in\mathbb{N}}$ kuulia, että $A_f(B^n(x_m, r_m)) \to \infty$ ja $(f_{x_m,r_m})^! \to L$ pisteittäin avaruuden $L^{\frac{n}{\ell}}(B^n(0,1), \Lambda^\ell(\mathbb{R}^n))$ heikossa topologiassa, kun $m \to \infty$.

Palautetaan mieleen, että työssä joukon $E \subset \mathbb{R}^n$ mittaa Lebesguen mitassa merkitään $|E|$.

Lause 7.22. *Olkoot $n \geq 2$ ja M kompakti, yhtenäinen ja suunnistettu n-ulotteinen Riemannin monisto. Olkoot $K \geq 1$ ja $f\colon \mathbb{R}^n \to M$ K-kvasisäännöllinen kuvaus, joka ei ole vakiokuvaus. Olkoon $1 \leq \ell \leq \frac{n}{2}$ sellainen, että $H^\ell(M) \neq 0$. Tällöin on olemassa sellainen kuvauksen f ℓ:s kohomologinen arvojenjakautumisraja*

$$L\colon H^\ell(M) \to L^{\frac{n}{\ell}}(B^n(0,1), \Lambda^\ell(\mathbb{R}^n)),$$

että

$$\left|\left\{x \in B^n(0,1)\colon \text{ jono } (Lc_1(x), \dots, Lc_k(x)) \subset \Lambda^\ell(\mathbb{R}^n) \text{ on vapaa}\right\}\right| > 0$$

jokaisella avaruuden $H^\ell(M)$ kannalla $(c_1, \dots, c_k)$.

Lauseen 1.2 todistus. Voidaan olettaa, että $1 \leq \ell \leq \frac{n}{2}$ ja $H^\ell(M) \neq 0$. Olkoon $(c_1, \dots, c_k)$ avaruuden $H^\ell(M)$ kanta. Lauseen 7.22 nojalla on olemassa sellainen kuvauksen f ℓ:s kohomologinen arvojenjakautumisraja

$$L\colon H^\ell(M) \to L^{\frac{n}{\ell}}(B^n(0,1), \Lambda^\ell(\mathbb{R}^n)),$$

että

$$\left|\left\{x \in B^n(0,1)\colon \text{ jono } (Lc_1(x), \dots, Lc_k(x)) \subset \Lambda^\ell(\mathbb{R}^n) \text{ on vapaa}\right\}\right| > 0.$$

Näin ollen on olemassa sellainen $x \in B^n(0,1)$, että jono $(Lc_1(x), \dots, Lc_k(x)) \subset \Lambda^\ell(\mathbb{R}^n)$ on vapaa. Koska $\dim \Lambda^\ell(\mathbb{R}^n) = \binom{n}{\ell}$, niin $\dim H^\ell(M) = k \leq \binom{n}{\ell}$. □

Luku 8

Kvasisäännöllisesti elliptinen monisto

Tässä luvussa todistetaan joukko aputuloksia, joiden avulla luvun lopussa todistetaan lause 7.22.

8.1 Jacobiaanin heikko käänteinen Hölderin epäyhtälö

Olkoot $n \geq 2$ ja M kompakti, yhtenäinen ja suunnistettu n-ulotteinen Riemannin monisto. Olkoot $K \geq 1$ ja $f \colon \mathbb{R}^n \to M$ K-kvasisäännöllinen kuvaus, joka ei ole vakiokuvaus. Tässä luvussa osoitetaan, että jos on olemassa sellainen $1 \leq \ell \leq \frac{n}{2}$, että $H^\ell(M) \neq 0$, niin kuvauksen f Jacobiaani J_f toteuttaa heikon käänteisen Hölderin epäyhtälön; katso [14, Proposition 2.2, s. 869]. Luvun lopuksi parannetaan heikkoa käänteistä Hölderin epäyhtälöä lauseella 4.5.

Propositio 8.1. *Olkoot $n \geq 2$ ja M kompakti, yhtenäinen ja suunnistettu n-ulotteinen Riemannin monisto. Olkoot $K \geq 1$ ja $f \colon \mathbb{R}^n \to M$ K-kvasisäännöllinen kuvaus, joka ei ole vakiokuvaus. Olkoon $1 \leq \ell \leq \frac{n}{2}$ sellainen luku, että $H^\ell(M) \neq 0$. Tällöin kuvauksen f Jacobiaani J_f toteuttaa heikon käänteisen Hölderin epäyhtälön*

$$\frac{1}{\left|\frac{1}{2}B\right|} \int_{\frac{1}{2}B} J_f \leq C(n,M,K) \left(\frac{1}{|B|} \int_B J_f^{\frac{n}{n+1}} \right)^{\frac{n+1}{n}},$$

missä $B = B^n(x,r) \subset \mathbb{R}^n$ on mielivaltainen kuula ja $\frac{1}{2}B = B^n\left(x, \frac{r}{2}\right)$.

Huomautus 8.2. Vakio $C(n,M,K)$ on tässä itse asiassa vakio $C(n,M,K,\alpha,\beta)$, missä $\alpha \in \Omega^\ell(M)$ ja $\beta \in \Omega^{n-\ell}(M)$ ovat differentiaalimuotoja kuten korollaarissa 3.22. Riittää kuitenkin, että vakio ei riipu kuulasta B, joten vakion riippuvuudet monistolla M voidaan sivuuttaa ja merkitä yksinkertaisuuden vuoksi $C(n,M,K)$.

Muotoillaan ja todistetaan seuraava lemma proposition 8.1 todistusta varten; katso [14, Lemma 2.4, s. 871].

Lemma 8.3. *Olkoot $n \geq 2$ ja M kompakti, yhtenäinen ja suunnistettu n-ulotteinen Riemannin monisto. Olkoot $K \geq 1$ ja $f\colon \mathbb{R}^n \to M$ K-kvasisäännöllinen kuvaus, joka ei ole vakiokuvaus. Olkoon $1 \leq \ell \leq \frac{n}{2}$ ja olkoot $\alpha \in \Omega^\ell(M)$ ja $\beta \in \Omega^{n-\ell}(M)$ suljettuja differentiaalimuotoja. Olkoon $B = B^n(x,r) \subset \mathbb{R}^n$ sellainen kuula, että kuulassa B pätee $f^*(\alpha \wedge \beta) = g \operatorname{vol}_{\mathbb{R}^n}$, missä $g\colon B \to \mathbb{R}$ on ei-negatiivinen funktio. Tällöin pätee*

$$\frac{1}{\left|\frac{1}{2}B\right|}\int_{\frac{1}{2}B} f^*(\alpha \wedge \beta) \leq C(n)\,||\alpha||_\infty\,||\beta||_\infty\,K\left(\frac{1}{|B|}\int_B J_f^{\frac{n}{n+1}}\right)^{\frac{n+1}{n}}.$$

Todistus. Olkoon $\psi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n,\mathbb{R})$ sellainen ei-negatiivinen funktio, että $\psi(x) = 1$ jokaisella $x \in \frac{1}{2}B$, $\psi(x) = 0$ jokaisella $x \notin B$ ja $|D\psi| \leq \frac{3}{r}$. Koska $\psi g \geq 0$ kuulassa B, niin

$$\int_{\frac{1}{2}B} f^*(\alpha\wedge\beta) = \int_{\frac{1}{2}B}\psi g \leq \int_B \psi g = \int_B \psi f^*(\alpha\wedge\beta).$$

Olkoot $p = \frac{n}{\ell}$ ja $q = \frac{n}{\ell}\frac{n}{n+1}$. Tällöin käyttämällä propositiota 7.13 saadaan, että pätee $f^*\alpha \in L^p(B,\Lambda^\ell(\mathbb{R}^n))$, $d(f^*\alpha) = f^*(d\alpha) = 0$ heikossa mielessä, $f^*\beta \in L^{\frac{p}{p-1}}(B,\Lambda^{n-\ell}(\mathbb{R}^n))$ ja $d(f^*\beta) = f^*(d\beta) = 0$ heikossa mielessä. Lisäksi proposition 7.14 nojalla on olemassa sellainen $\omega \in L^p(B,\Lambda^{\ell-1}(\mathbb{R}^n)$, että $f^*\alpha = d\omega$ heikossa mielessä ja

$$||\omega||_{\frac{nq}{n-q},B} \leq C(n)\,||f^*\alpha||_{q,B}\,. \tag{8.4}$$

Näin ollen pätee yhtälö

$$\int_B \psi f^*(\alpha\wedge\beta) = \int_B f^*\alpha \wedge \psi f^*\beta = \int_B d\omega \wedge \psi f^*\beta.$$

Käyttämällä lemmaa 5.13 differentiaalimuotoon $f^*\beta$ ja testifunktioon ψ saadaan, että pätee $\psi f^*\beta \in W^{d,\frac{p}{p-1}}(B,\Lambda^{n-\ell}(\mathbb{R}^n))$ ja $d(\psi f^*\beta) = d\psi \wedge f^*\beta$ heikossa mielessä. Tällöin lemmasta 5.20 seuraa yhtäsuuruus

$$\left|\int_B d\omega\wedge\psi f^*\beta\right| = \left|\int_B \omega \wedge d(\psi f^*\beta)\right| = \left|\int_B \omega\wedge d\psi\wedge f^*\beta\right|.$$

Nyt epäyhtälöstä (5.5) saadaan arvio

$$\left|\int_B \omega\wedge d\psi\wedge f^*\beta\right| \leq \int_B |\omega\wedge d\psi\wedge f^*\beta| \leq C(n)\int_B |\omega|\,|d\psi|\,|f^*\beta|\,,$$

missä $|d\psi|(x) = ||(d\psi)_x||_{\Lambda^1(\mathbb{R}^n)} = |D\psi(x)|$ jokaisella $x \in B$. Käyttämällä ylärajaa $|d\psi| \leq \frac{3}{r}$ ja Hölderin epäyhtälöä Hölder konjugaateilla $\frac{nq}{n-q}$ ja $\frac{nq}{nq-n+q} = \frac{n}{n+1}\frac{n}{n-\ell}$ saadaan arvio

$$C(n)\int_B |\omega|\,|d\psi|\,|f^*\beta| \leq \frac{C(n)}{r}\,||\omega||_{\frac{nq}{n-q},B}\,||f^*\beta||_{\frac{n}{n+1}\frac{n}{n-\ell},B}\,.$$

Täten käyttämällä epäyhtälöä (8.4) saadaan, että pätee

$$\frac{C(n)}{r}\,||\omega||_{\frac{nq}{n-q},B}\,||f^*\beta||_{\frac{n}{n+1}\frac{n}{n-\ell},B} \leq \frac{C(n)}{r}\,||f^*\alpha||_{q,B}\,||f^*\beta||_{\frac{n}{n+1}\frac{n}{n-\ell},B}\,.$$

Siirrytään arvioimaan termejä $||f^*\alpha||_{q,B}$ ja $||f^*\beta||_{\frac{n}{n+1}\frac{n}{n-\ell},B}$ erikseen. Käsitellään ensin termi $||f^*\alpha||_{q,B}$. Käyttämällä epäyhtälöitä (7.9) ja (7.7) saadaan arvio

$$\begin{aligned}
||f^*\alpha||_{q,B} &= \left(\int_B |f^*\alpha|^q\right)^{\frac{1}{q}} \leq C(n)\,||\alpha||_\infty \left(\int_B ||Df||_{\mathrm{op}}^{n\frac{n}{n+1}}\right)^{\frac{1}{q}} \\
&\leq C(n)\,||\alpha||_\infty \left(\int_B (KJ_f)^{\frac{n}{n+1}}\right)^{\frac{1}{q}} = C(n)\,||\alpha||_\infty\, K^{\frac{\ell}{n}}(||J_f||_{\frac{n}{n+1},B})^{\frac{\ell}{n}}.
\end{aligned}$$

Vastaavasti termille $||f^*\beta||_{\frac{n}{n+1}\frac{n}{n-\ell},B}$ saadaan arvio

$$\begin{aligned}
||f^*\beta||_{\frac{n}{n+1}\frac{n}{n-\ell},B} &= \left(\int_B |f^*\beta|^{\frac{n}{n+1}\frac{n}{n-\ell}}\right)^{\frac{n+1}{n}\frac{n-\ell}{n}} \leq C(n)\,||\beta||_\infty \left(\int_B ||Df||_{\mathrm{op}}^{n\frac{n}{n+1}}\right)^{\frac{n+1}{n}\frac{n-\ell}{n}} \\
&\leq C(n)\,||\beta||_\infty \left(\int_B (KJ_f)^{\frac{n}{n+1}}\right)^{\frac{n+1}{n}\frac{n-\ell}{n}} \\
&= C(n)\,||\beta||_\infty\, K^{\frac{n-\ell}{n}}(||J_f||_{\frac{n}{n+1},B})^{\frac{n-\ell}{n}}.
\end{aligned}$$

Täten yhdistämällä kaikki aiemmat välivaiheeet ja termien $||f^*\alpha||_{q,B}$ ja $||f^*\beta||_{\frac{nq}{nq-n+q},B}$ arviot on osoitettu epäyhtälö

$$\int_{\frac{1}{2}B} f^*(\alpha\wedge\beta) \leq \frac{C(n)}{r}\,||\alpha||_\infty\,||\beta||_\infty\,K\,||J_f||_{\frac{n}{n+1},B}\,.$$

Jakamalla yhtälö puolittain termillä $\left|\frac{1}{2}B\right| = \frac{|B|}{2^n}$ saadaan epäyhtälö

$$\frac{1}{\left|\frac{1}{2}B\right|}\int_{\frac{1}{2}B} f^*(\alpha\wedge\beta) \leq \frac{C(n)}{r\,|B|}\,||\alpha||_\infty\,||\beta||_\infty\,K\,||J_f||_{\frac{n}{n+1},B}\,.$$

Kirjoittamalla $r\,|B| = |B^n(0,1)|^{\frac{1}{n}}\,|B|^{\frac{n+1}{n}} = C(n)\,|B|^{\frac{n+1}{n}}$ saadaan epäyhtälön oikea puoli haluttuun muotoon. $\square$

Proposition 8.1 todistus. Olkoon $B \subset \mathbb{R}^n$ kuula ja olkoot $\alpha \in \Omega^\ell(M)$ ja $\beta \in \Omega^{n-\ell}(M)$ kuten korollaarissa 3.22. Tällöin lemman 3.23 nojalla Riemannin tilavuusmuodolla vol_M on olemassa esitys

$$\mathrm{vol}_M = c \sum_{\nu=1}^{k} \lambda_\nu \Phi_\nu^*(\alpha \wedge \beta),$$

missä $\{\lambda_\nu\}_{\nu=1}^k$ on sileä ykkösen ositus monistolla M, kuvaus $\Phi_\nu \colon M \to M$ on suunnansäilyttävä diffeomorfismi jokaisella $\nu = 1, \ldots, k$ ja $c \in C^\infty(M, \mathbb{R})$ on positiivinen funktio. Merkitään $\alpha_\nu = \Phi_\nu^* \alpha$ ja $\beta_\nu = \Phi_\nu^* \beta$. Nyt jokaisella $\nu = 1, \ldots, k$ pätee

$$J_f \,\mathrm{vol}_{\mathbb{R}^n} = f^* \mathrm{vol}_M = (c \circ f) \sum_{\nu=1}^{k} (\lambda_\nu \circ f) f^*(\alpha_\nu \wedge \beta_\nu).$$

Täten

$$\frac{1}{\left|\frac{1}{2}B\right|} \int_{\frac{1}{2}B} J_f = \sum_{\nu=1}^{k} \frac{1}{\left|\frac{1}{2}B\right|} \int_{\frac{1}{2}B} (c \circ f)(\lambda_\nu \circ f) f^*(\alpha_\nu \wedge \beta_\nu)$$

ja voidaan tarkastella summan termejä erikseen.

Koska $\alpha \wedge \beta = g \,\mathrm{vol}_M$, missä $g \in C^\infty(M, \mathbb{R})$ on ei-negatiivinen funktio, niin

$$f^*(\alpha_\nu \wedge \beta_\nu) = f^*(\Phi_\nu^*(g \,\mathrm{vol}_M)) = (g \circ \Phi_\nu \circ f)(J_{\Phi_\nu} \circ f) J_f \,\mathrm{vol}_{\mathbb{R}^n}$$

jokaisella $\nu = 1, \ldots, k$, missä $(g \circ \Phi_\nu \circ f)(J_{\Phi_\nu} \circ f) J_f$ on ei-negatiivinen funktio. Tällöin

$$\frac{1}{\left|\frac{1}{2}B\right|} \int_{\frac{1}{2}B} (c \circ f)(\lambda_\nu \circ f) f^*(\alpha_\nu \wedge \beta_\nu) \le \frac{||c||_\infty}{\left|\frac{1}{2}B\right|} \int_{\frac{1}{2}B} f^*(\alpha_\nu \wedge \beta_\nu)$$

ja edelleen lemman 8.3 nojalla

$$\frac{||c||_\infty}{\left|\frac{1}{2}B\right|} \int_{\frac{1}{2}B} f^*(\alpha_\nu \wedge \beta_\nu) \le C(n) \, ||c||_\infty \, ||\alpha_\nu||_\infty \, ||\beta_\nu||_\infty \, K \left(\frac{1}{|B|} \int_B J_f^{\frac{n}{n+1}} \right)^{\frac{n+1}{n}}$$

jokaisella $\nu = 1, \ldots, k$.

On siis osoitettu arvio

$$\frac{1}{\left|\frac{1}{2}B\right|} \int_{\frac{1}{2}B} J_f \le k \cdot C(n) \, ||c||_\infty \max_{1 \le \nu \le k} ||\alpha_\nu||_\infty \max_{1 \le \nu \le k} ||\beta_\nu||_\infty \, K \left(\frac{1}{|B|} \int_B J_f^{\frac{n}{n+1}} \right)^{\frac{n+1}{n}}.$$

Vaikka kerroin

$$k \cdot C(n) \, ||c||_\infty \max_{1 \le \nu \le k} ||\alpha_\nu||_\infty \max_{1 \le \nu \le k} ||\beta_\nu||_\infty \, K$$

voi riippua kiinnitetyistä differentiaalimuodoista α ja β, se ei riipu kuulasta B. Tässä tapauksessa voidaan siis kirjoittaa

$$C(n, M, K) = k \cdot C(n) \, ||c||_\infty \max_{1 \le \nu \le k} ||\alpha_\nu||_\infty \max_{1 \le \nu \le k} ||\beta_\nu||_\infty \, K.$$

$\square$

Propositio 8.5. *Olkoot $n \ge 2$ ja M kompakti, yhtenäinen ja suunnistettu n-ulotteinen Riemannin monisto. Olkoot $K \ge 1$ ja $f \colon \mathbb{R}^n \to M$ K-kvasisäännöllinen kuvaus, joka ei ole vakiokuvaus. Oletetaan, että $H^\ell(M) \neq 0$ jollakin $1 \le \ell \le \frac{n}{2}$. Tällöin on olemassa sellainen $b > 1$, että jokaisella kuulalla $B \subset \mathbb{R}^n$ pätee*

$$\left(\frac{1}{\left|\frac{1}{2}B\right|} \int_{\frac{1}{2}B} J_f^b \right)^{\frac{1}{b}} \le C(n, M, K, b) \frac{1}{|B|} \int_B J_f, \tag{8.6}$$

missä $C(n, M, K, b) > 0$.

Todistus. Olkoot $p = \frac{n+1}{n}$ ja $g = J_f^{\frac{1}{p}} \in L^p_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$. Tällöin proposition 8.1 nojalla funktio g toteuttaa epäyhtälön (4.4) jokaisella kuulalla $B \subset \mathbb{R}^n$ vakiolla $C(n, M, K)$. Koska vakio $C(n, M, K)$ ei riipu kuulasta B, niin lauseen 4.5 oletukset toteutuvat ja on olemassa sellainen $q > p$, että

$$\begin{aligned}
\left(\frac{1}{\left|\frac{1}{2}B\right|} \int_{\frac{1}{2}B} J_f^{\frac{q}{p}} \right)^{\frac{1}{q}} &= \left(\frac{1}{\left|\frac{1}{2}B\right|} \int_{\frac{1}{2}B} g^q \right)^{\frac{1}{q}} \le C(n, M, K, q) \left(\frac{1}{|B|} \int_B g^p \right)^{\frac{1}{p}} \\
&= C(n, M, K, q) \left(\frac{1}{|B|} \int_B J_f \right)^{\frac{1}{p}}.
\end{aligned}$$

Nyt valitsemalla $b = \frac{q}{p} > 1$ on osoitettu väite todeksi. $\square$

8.2 Kuvauksen nopea kasvu

Olkoot $n \ge 2$ ja M kompakti, yhtenäinen ja suunnistettu n-ulotteinen Riemannin monisto. Olkoot $K \ge 1$ ja $f \colon \mathbb{R}^n \to M$ K-kvasisäännöllinen kuvaus, joka ei ole vakiokuvaus. Oletetaan, että $H^\ell(M) \neq 0$ jollakin $1 \le \ell \le \frac{n}{2}$. Osoitetaan, että tällöin kuulat $B^n(0, r)$ kasvavat rajatta mitassa A_f, kun säde r kasvaa rajatta. Tässä työssä tulos on todistettu proposition 8.5 seurauksena, mutta tulokselle on olemassa myös vaihtoehtoinen todistus; katso [2, Theorem 1.11, s. 224].

Lause 8.7. *Olkoot $n \geq 2$ ja M kompakti, yhtenäinen ja suunnistettu n-ulotteinen Riemannin monisto. Olkoot $K \geq 1$ ja $f\colon \mathbb{R}^n \to M$ K-kvasisäännöllinen kuvaus, joka ei ole vakiokuvaus. Oletetaan, että $H^\ell(M) \neq 0$ jollakin $1 \leq \ell \leq \frac{n}{2}$. Tällöin on olemassa sellainen vakio $\xi > 0$, että*

$$\liminf_{r\to\infty} \frac{A_f(B^n(0,r))}{r^\xi} > 0.$$

Erityisesti pätee, että $A_f(B^n(0,r)) \to \infty$, kun $r \to \infty$.

Todistus. Olkoon $b > 1$ kuten propositiossa 8.5. Tällöin epäyhtälöstä (8.6) seuraa jokaisella $r > 0$ arvio

$$\begin{aligned} A_f(B^n(0,r)) &\geq C(n,M,K,b)\,|B^n(0,r)| \left(\frac{1}{\left|B^n\left(0,\frac{r}{2}\right)\right|} \int_{B^n\left(0,\frac{r}{2}\right)} J_f^b \right)^{\frac{1}{b}} \\ &= C(n,M,K,b) r^n \left(\left(\frac{r}{2}\right)^{-n} \int_{B^n\left(0,\frac{r}{2}\right)} J_f^b \right)^{\frac{1}{b}} \\ &= C(n,M,K,b) r^{n\left(1-\frac{1}{b}\right)} \, ||J_f||_{b,B^n\left(0,\frac{r}{2}\right)}, \end{aligned}$$

missä $C(n,M,K,b) > 0$.

Olkoon $\xi = n\left(1 - \frac{1}{b}\right) > 0$. Olkoon $r_0 > 0$ sellainen, että $||J_f||_{b,B^n\left(0,\frac{r_0}{2}\right)} > 0$. Tällainen säde r_0 on mahdollista löytää, sillä Jacobiaani J_f on ei-negatiivinen funktio, joka ei ole vakiokuvaus nolla. Tällöin jokaisella $r \geq r_0$ pätee epäyhtälö

$$\frac{A_f(B^n(0,r))}{r^\xi} \geq C(n,M,K,b)\,||J_f||_{b,B^n\left(0,\frac{r}{2}\right)} \geq C(n,M,K,b)\,||J_f||_{b,B^n\left(0,\frac{r_0}{2}\right)}.$$

Näin ollen pätee arvio

$$\liminf_{r\to\infty} \frac{A_f(B^n(0,r))}{r^\xi} \geq C(n,M,K,b)\,||J_f||_{b,B^n\left(0,\frac{r_0}{2}\right)} > 0.$$

Tämä päättää todistuksen. $\square$

8.3 Kohomologisen arvojenjakautumisrajan olemassaolo

Olkoot $n \geq 2$ ja M kompakti, yhtenäinen ja suunnistettu n-ulotteinen Riemannin monisto. Olkoot $K \geq 1$ ja $f\colon \mathbb{R}^n \to M$ K-kvasisäännöllinen kuvaus, joka ei ole vakiokuvaus. Olkoon

$1 \leq \ell \leq \frac{n}{2}$ sellainen, että $H^\ell(M) \neq 0$. Tässä alaluvussa osoitetaan, että tällöin on olemassa kuvauksen f ℓ:s kohomologinen arvojenjakautumisraja

$$L\colon H^\ell(M) \to L^{\frac{n}{\ell}}(B^n(0,1), \Lambda^\ell(\mathbb{R}^n)).$$

Kohomologisen arvojenjakautumisrajan L ominaisuuksista ei kuitenkaan voida vielä sanoa mitään. Lauseen 7.22 todistukseen tarvitaan enemmän työkaluja, jotka esitellään seuraavassa alaluvussa.

Seuraava määritelmä yksinkertaistaa merkintöjä.

Määritelmä 8.8. Olkoot $n \geq 2$ ja M kompakti, yhtenäinen ja suunnistettu n-ulotteinen Riemannin monisto. Olkoot $K \geq 1$ ja $f\colon \mathbb{R}^n \to M$ K-kvasisäännöllinen kuvaus, joka ei ole vakiokuvaus. Olkoon $(B_m)_{m\in\mathbb{N}}$ jono kuulia $B_m = B^n(x_m, r_m)$. *Jonon $(B_m)_{m\in\mathbb{N}}$ indusoima kuvausjono $(f_m)_{m\in\mathbb{N}}$* on jono kuvauksia $f_m\colon B^n(0,1) \to M$, jotka on määritelty kaavalla $f_m = f_{x_m,r_m}$. Tällöin merkitään $(f_m)^! = (f_{x_m,r_m})^!$.

Tämän alaluvun tärkein sisältö on seuraavassa lemmassa. Kyseessä on uudelleen muotoilu lemmasta [14, Lemma 4.1, s. 875].

Lemma 8.9. *Olkoot $n \geq 2$ ja M kompakti, yhtenäinen ja suunnistettu n-ulotteinen Riemannin monisto. Olkoot $K \geq 1$ ja $f\colon \mathbb{R}^n \to M$ K-kvasisäännöllinen kuvaus, joka ei ole vakiokuvaus. Olkoot $(B_m)_{m\in\mathbb{N}}$ jono kuulia ja $(f_m)_{m\in\mathbb{N}}$ kuulien indusoima kuvausjono. Olkoon $1 \leq \ell \leq \frac{n}{2}$ ja olkoot $(\alpha_1, \ldots, \alpha_k)$ avaruuden $H^\ell(M)$ jono ja $(\beta_1, \ldots, \beta_k)$ sen duaalijono. Tällöin jokaisella $m \in \mathbb{N}$ ja jokaisella $i = 1, \ldots, k$ on olemassa sellainen differentiaalimuoto $u_i^m \in L^{\frac{n}{n-\ell}}(B^n(0,1), \Lambda^{n-\ell-1}(\mathbb{R}^n))$, että $du_i^m = (f_m)^!\beta_i$ heikossa mielessä.*

Lisäksi jokaisella $i = 1, \ldots, k$ siirtymällä jonojen $((f_m)^!\alpha_i)_{m\in\mathbb{N}}$ ja $((f_m)^!\beta_i)_{m\in\mathbb{N}}$ osajonoihin pätee:

(i) *On olemassa sellainen muoto $\eta_i \in L^{\frac{n}{\ell}}(B^n(0,1), \Lambda^\ell(\mathbb{R}^n))$, että $(f_m)^!\alpha_i$ suppenee muotoon η_i heikosti avaruudessa $L^{\frac{n}{\ell}}(B^n(0,1), \Lambda^\ell(\mathbb{R}^n))$.*

(ii) *On olemassa sellainen muoto $\theta_i \in L^{\frac{n}{n-\ell}}(B^n(0,1), \Lambda^{n-\ell}(\mathbb{R}^n))$, että $(f_m)^!\beta_i$ suppenee muotoon θ_i heikosti avaruudessa $L^{\frac{n}{n-\ell}}(B^n(0,1), \Lambda^{n-\ell}(\mathbb{R}^n))$.*

(iii) *On olemassa sellainen muoto $u_i \in L^{\frac{n}{n-\ell}}(B^n(0,1), \Lambda^{n-\ell-1}(\mathbb{R}^n))$, että u_i^m suppenee muotoon u_i avaruudessa $L^{\frac{n}{n-\ell}}(B^n(0,1), \Lambda^{n-\ell-1}(\mathbb{R}^n))$.*

(iv) *Joukossa $B^n(0,1)$ pätee $du_i = \theta_i$ heikossa mielessä.*

Huomautus 8.10. Merkitään jonojen $((f_m)^!\alpha_i)_{m\in\mathbb{N}}$ ja $((f_m)^!\beta_i)_{m\in\mathbb{N}}$ osajonoja $((f_{m_j})^!\alpha_i)_{j\in\mathbb{N}}$ ja $((f_{m_j})^!\beta_i)_{j\in\mathbb{N}}$ samoin kuin alkuperäisiä jonoja.

Todistus. Olkoon $i \in \{1, \ldots, k\}$. Olkoot

$$T\colon L^{\frac{n}{n-\ell}}(B^n(0,1), \Lambda^{n-\ell}(\mathbb{R}^n)) \to W^{1,\frac{n}{n-\ell}}(B^n(0,1), \Lambda^{n-\ell-1}(\mathbb{R}^n))$$

kuulan $B^n(0,1)$ $(n-\ell)$:s Poincaré-operaattori ja $u_i^m = T((f_m)^! \beta_i)$ jokaisella $m \in \mathbb{N}$. Koska lemman 7.20 perusteella pätee $d((f_m)^! \beta_i) = 0$ heikossa mielessä jokaisella $m \in \mathbb{N}$, niin lemman 5.40 nojalla pätee $du_i^m = (f_m)^! \beta_i$ heikossa mielessä jokaisella $m \in \mathbb{N}$. Täten on osoitettu lemman ensimmäinen väite.

Siirrytään sitten todistamaan lemman alakohtia. Käsitellään ensimmäisenä kohdat (i) ja (ii). Lemman 7.20 nojalla jonot $((f_m)^! \alpha_i)_{m\in\mathbb{N}} \subset L^{\frac{n}{\ell}}(B^n(0,1), \Lambda^\ell(\mathbb{R}^n))$ ja $((f_m)^! \beta_i)_{m\in\mathbb{N}} \subset L^{\frac{n}{n-\ell}}(B^n(0,1), \Lambda^{n-\ell}(\mathbb{R}^n))$ ovat rajoitettuja.

Banachin-Alaoglun lauseen nojalla on olemassa sellainen osajono $((f_{m_t})^! \alpha_i)_{t\in\mathbb{N}}$ ja sellainen differentiaalimuoto $\eta_i \in L^{\frac{n}{\ell}}(B^n(0,1), \Lambda^\ell(\mathbb{R}^n))$, että $(f_{m_t})^! \alpha_i$ suppenee muotoon η_i heikosti avaruudessa $L^{\frac{n}{\ell}}(B^n(0,1), \Lambda^\ell(\mathbb{R}^n))$.

Edelleen on olemassa osajonon $((f_{m_t})^! \beta_i)_{t\in\mathbb{N}} \subset L^{\frac{n}{n-\ell}}(B^n(0,1), \Lambda^{n-\ell}(\mathbb{R}^n))$ sellainen osajono $((f_{m_{t_s}})^! \beta_i)_{s\in\mathbb{N}}$ ja sellainen differentiaalimuoto $\theta_i \in L^{\frac{n}{n-\ell}}(B^n(0,1), \Lambda^{n-\ell}(\mathbb{R}^n))$, että $(f_{m_{t_s}})^! \beta_i$ suppenee muotoon θ_i heikosti avaruudessa $L^{\frac{n}{n-\ell}}(B^n(0,1), \Lambda^{n-\ell}(\mathbb{R}^n))$.

Kohtaa (iii) varten osoitetaan, että jono $(u_i^m)_{m\in\mathbb{N}} \subset W^{1,\frac{n}{n-\ell}}(B^n(0,1), \Lambda^{n-\ell-1}(\mathbb{R}^n))$ on rajoitettu. Tällöin lauseen 4.9 ja korollaarin 4.10 nojalla on olemassa on sellainen osajono $(u_i^{m_{t_{s_r}}})_{r\in\mathbb{N}}$ ja differentiaalimuoto $u_i \in L^{\frac{n}{n-\ell}}(B^n(0,1), \Lambda^{n-\ell-1}(\mathbb{R}^n))$, että $u_i^{m_{t_{s_r}}}$ suppenee muotoon u_i avaruudessa $L^{\frac{n}{n-\ell}}(B^n(0,1), \Lambda^{n-\ell-1}(\mathbb{R}^n))$. Proposition 5.41 ja lemman 7.20 nojalla saadaan arvio

$$\begin{aligned}
||u_i^m||_{W^{1,\frac{n}{n-\ell}}(B^n(0,1),\Lambda^{n-\ell-1}(\mathbb{R}^n))} &\leq 2 \nparallel u_i^m||_{W^{1,\frac{n}{n-\ell}}(B^n(0,1),\Lambda^{n-\ell-1}(\mathbb{R}^n))} \\
&\leq C(n,\ell) \left|\left|(f_m)^! \beta_i\right|\right|_{\frac{n}{n-\ell}, B^n(0,1)} \\
&\leq C(n,\ell) \, ||\omega_{\beta_i}||_\infty K^{\frac{n-\ell}{n}}.
\end{aligned}$$

Voidaan siirtyä kohtaan (iv). Olkoon $\omega \in \Omega_c^\ell(B^n(0,1))$. Tällöin

$$\begin{aligned}
\int_{B^n(0,1)} u_i \wedge d\omega &= \lim_{r\to\infty} \int_{B^n(0,1)} u_i^{m_{t_{s_r}}} \wedge d\omega = \lim_{r\to\infty} \int_{B^n(0,1)} du_i^{m_{t_{s_r}}} \wedge \omega \\
&= \lim_{r\to\infty} (-1)^{n-\ell} \int_{B^n(0,1)} ((f_{m_{t_{s_r}}})^! \beta_i) \wedge \omega = (-1)^{n-\ell} \int_{B^n(0,1)} \theta_i \wedge \omega.
\end{aligned}$$

Tämä päättää todistuksen. □

Korollaari 8.11. *Olkoot $n \geq 2$ ja M kompakti, yhtenäinen ja suunnistettu n-ulotteinen Riemannin monisto. Olkoot $K \geq 1$ ja $f\colon \mathbb{R}^n \to M$ K-kvasisäännöllinen kuvaus, joka ei ole vakiokuvaus. Olkoon $1 \leq \ell \leq \frac{n}{2}$ sellainen, että $H^\ell(M) \neq 0$. Tällöin on olemassa kuvauksen f ℓ:s kohomologinen arvojenjakautumisraja*

$$L\colon H^\ell(M) \to L^{\frac{n}{\ell}}(B^n(0,1), \Lambda^\ell(\mathbb{R}^n)).$$

Todistus. Lauseen 8.7 nojalla kuulien $(B^n(0,m))_{m\in\mathbb{N}}$ jono on sellainen, että $A_f(B^n(0,m)) \to \infty$, kun $m \to \infty$. Olkoon kuvausjono $(f_m)_{m\in\mathbb{N}}$ kuulien $(B^n(0,m))_{m\in\mathbb{N}}$ indusoima. Olkoon $(\alpha_1,\ldots,\alpha_k)$ avaruuden $H^\ell(M)$ kanta. Olkoon $(B^n(0,m_j))_{j\in\mathbb{N}}$ sellainen kuulien $(B^n(0,m))_{m\in\mathbb{N}}$ osajono, että jokaisella $i=1,\ldots,k$ on olemassa rajamuoto η_i kuten lemmassa 8.9. Tällöin kuvaus

$$L\colon H^\ell(M) \to L^{\frac{n}{\ell}}(B^n(0,1),\Lambda^\ell(\mathbb{R}^n)),$$

joka on määritelty kaavalla

$$\sum_{i=1}^k p_i\alpha_i \mapsto \sum_{i=1}^k p_i\eta_i,$$

on kuvauksen f ℓ:s kohomologinen arvojenjakautumisraja. □

8.4 Tuplaavasti rajatta kasvava jono kuulia

Olkoot $n \geq 2$ ja M kompakti, yhtenäinen ja suunnistettu n-ulotteinen Riemannin monisto. Olkoot $K \geq 1$ ja $f\colon \mathbb{R}^n \to M$ K-kvasisäännöllinen kuvaus, joka ei ole vakiokuvaus. Olkoon $1 \leq \ell \leq \frac{n}{2}$ sellainen, että $H^\ell(M) \neq 0$. Tällöin korollaarin 8.11 nojalla on olemassa kuvauksen f ℓ:s kohomologinen arvojenjakautumisraja

$$L\colon H^\ell(M) \to L^{\frac{n}{\ell}}(B^n(0,1),\Lambda^\ell(\mathbb{R}^n)).$$

Kohomologinen arvojenjakautumisraja L ei välttämättä ole kuten lauseessa 7.22. Halutunlaisen kohomologisen arvojenjakautumisrajan saamiseen tullaan käyttämään lemmaa 8.9 tietynlaiseen jonoon kuulia.

Määritelmä 8.12. Olkoot $n \geq 2$ ja M kompakti, yhtenäinen ja suunnistettu n-ulotteinen Riemannin monisto. Olkoot $K \geq 1$ ja $f\colon \mathbb{R}^n \to M$ K-kvasisäännöllinen kuvaus, joka ei ole vakiokuvaus. Olkoon $D > 1$. Jono $(B_m)_{m\in\mathbb{N}}$ euklidisen avaruuden $\mathbb{R}^n$ kuulia on *(vakiolla D) A_f-tuplaavasti rajatta kasvava*, jos $A_f(B_m) \to \infty$, kun $m \to \infty$, ja jokaisella $m \in \mathbb{N}$ pätee

$$A_f(B_m) \leq DA_f\left(\frac{1}{2}B_m\right). \tag{8.13}$$

Määritelmä 8.12 on mielekäs seuraavan lauseen seurauksena; katso [3, Lemma 2.1, s. 617].

Lause 8.14. *Olkoon A sellainen avaruuden $\mathbb{R}^n$ Borel-mitta, että $A(\{x\}) = 0$ jokaisella $x \in \mathbb{R}^n$, $A(B^n(0,r)) \to \infty$, kun $r \to \infty$, ja $A(B) < \infty$ jokaisella kuulalla $B \subset \mathbb{R}^n$. Tällöin* *on olemassa sellainen vakio $D(n) > 1$, että jokaisella $L > 0$ on olemassa sellainen $x \in \mathbb{R}^n$ ja sellainen $r > 0$, että pätee*

$$A(B^n(x,r)) \geq L \text{ ja } A(B^n(x,8r)) \leq D(n)A(B^n(x,r)).$$

Korollaari 8.15. *Olkoot $n \geq 2$ ja M kompakti, yhtenäinen ja suunnistettu n-ulotteinen Riemannin monisto. Olkoot $K \geq 1$ ja $f\colon \mathbb{R}^n \to M$ K-kvasisäännöllinen kuvaus, joka ei ole vakiokuvaus. Oletetaan, että $H^\ell(M) \neq 0$ jollakin $1 \leq \ell \leq \frac{n}{2}$. Tällöin on olemassa vakiolla $D(n)$ A_f-tuplaavasti rajatta kasvava jono $(B_m)_{m\in\mathbb{N}}$ kuulia jollakin $D(n) > 1$.*

Todistus. Lauseen 8.7 nojalla avaruuden $\mathbb{R}^n$ Borel-mitta A_f toteuttaa lauseen 8.14 oletukset. Täten on olemassa sellainen vakio $D(n) > 1$, että voidaan valita sellainen jono $(\tilde{B}_m)_{m=1}^\infty$ kuulia, että

$$A_f(\tilde{B}_m) \geq m \text{ ja } A_f(8\tilde{B}_m) \leq D(n)A_f(\tilde{B}_m)$$

jokaisella $m \in \mathbb{N}$. Merkitään $B_m = 8\tilde{B}_m$ jokaisella $m \in \mathbb{N}$. Koska $A_f(B_m) \geq A_f(\tilde{B}_m) \geq m$ ja

$$A_f(B_m) \leq D(n)A_f(\tilde{B}_m) \leq D(n)A_f(4\tilde{B}_m) = D(n)A_f\left(\frac{1}{2}B_m\right)$$

jokaisella $m \in \mathbb{N}$, niin $D(n)$ on haluttu vakio ja $(B_m)_{m\in\mathbb{N}}$ on haluttu jono. □

Lauseen 8.14 todistusta varten etsitään sellainen $D(n) \in \mathbb{N}$, että jokainen r-säteinen kuula $B \subset \mathbb{R}^n$ voidaan peittää $\frac{r}{16}$-säteisillä kuulilla $B^n\left(x_1, \frac{r}{16}\right), \ldots, B^n\left(x_{D(n)}, \frac{r}{16}\right)$, missä $x_1, \ldots, x_{D(n)} \in B$.

Olkoon $B^n(x,r)$ kuula. Soveltamalla lausetta [8, Theorem 1.16, s. 8] kokoelmaan $\mathcal{F} = \{B^n\left(y, \frac{r}{16}\right) : y \in B^n(x,r)\}$ saadaan sellainen osakokoelma $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$, että

$$B^n(x,r) \subset \bigcup_{B\in\mathcal{G}} B$$

ja kokoelman $\left\{\frac{1}{5}B\colon B \in \mathcal{G}\right\}$ kuulat ovat erillisiä.

Koska $\frac{1}{5}B \subset B^n\left(x, \frac{17}{16}r\right)$ jokaisella $B \in \mathcal{G}$, niin kokoelman $\mathcal{G}$ on oltava äärellinen, sillä muuten pätisi

$$\infty = \left|\bigcup_{B\in\mathcal{G}} \frac{1}{5}B\right| \leq \left|B^n\left(x, \frac{17}{16}r\right)\right| < \infty.$$

Näin ollen kokoelma $\mathcal{G}$ on muotoa $\{B_1, \ldots, B_k\}$. Lisäksi pätee epäyhtälö

$$\begin{aligned}\left(\frac{17}{16}\right)^n r^n |B^n(0,1)| &= \left|B^n\left(x, \frac{17}{16}r\right)\right| \geq \left|\bigcup_{i=1}^k \frac{1}{5}B_i\right| = \sum_{i=1}^k \left|\frac{1}{5}B_i\right| \\ &= \sum_{i=1}^k \left(\frac{1}{5}\right)^n \left(\frac{r}{16}\right)^n |B^n(0,1)| = k\left(\frac{1}{80}\right)^n r^n |B^n(0,1)|,\end{aligned}$$

joten $k \leq 85^n$. Voidaan siis valita etsityksi vakioksi esimerkiksi $D(n) = 85^n$.

Lauseen 8.14 todistus. Olkoon $D(n) = 85^n$. Tehdään vastaoletus, että on voidaan valita sellainen $L > 0$, että yhdelläkään kuulalla $B \subset \mathbb{R}^n$ ei voi päteä sekä $A(B) \geq L$ että $A(8B) \leq D(n)A(B)$. Valitaan sellainen $r > 0$, että $A(B^n(0,r)) \geq L$. Merkitään $B_0 = B^n(0,r)$. Nyt vastaoletuksen nojalla $A(8B_0) > D(n)A(B_0)$. Valitaan sellaiset pisteet $x_1, \ldots, x_{D(n)} \in 8B_0$, että

$$8B_0 \subset \bigcup_{\nu=1}^{D(n)} B^n(x_\nu, r/2).$$

Valitaan sellainen $y_1 \in \{x_1, \ldots, x_{D(n)}\}$, että

$$\max_{1 \leq \nu \leq D(n)} A(B^n(x_\nu, r/2)) = A(B^n(y_1, r/2)).$$

Tällöin

$$A(8B_0) \leq \sum_{\nu=1}^{D(n)} A(B^n(x_\nu, r/2)) \leq D(n)A(B^n(y_1, r/2)).$$

Täten kuulalle $B_1 = B^n(y_1, r/2)$ pätee

$$A(B_1) \geq \frac{1}{D(n)} A(8B_0) > A(B_0) \geq L.$$

Vastaavaa päättelyä voidaan käyttää induktiivisesti, jolloin saadaan jono $(y_m)_{m \in \mathbb{N}}$, missä $y_m \in 8B_{m-1}$ jokaisella $m \in \mathbb{N}$ ja kuulalle $B_m = B^n(y_m, r/2^m)$ pätee $A(B_m) \geq L$ jokaisella $m \in \mathbb{N}$. Nyt peräkkäisille termeille pätee $|y_{m+1} - y_m| < 8r2^{-m}$ jokaisella $m \in \mathbb{N}$. Täten saatu jono $(y_m)_{m \in \mathbb{N}}$ on Cauchy, sillä geometrinen sarja $\sum_{m=1}^{\infty} 2^{-m}$ suppenee. Näin ollen on olemassa raja-arvo $\lim_{m \to \infty} y_m = z_0$, missä $z_0 \in \mathbb{R}^n$.

Jokaisella $\delta > 0$ on olemassa sellainen $m_\delta \in \mathbb{N}$, että $B_{m_\delta} \subset B^n(z_0, \delta)$. Täten jokaisella $\delta > 0$ pätee $A(B^n(z_0, \delta)) \geq L$. Koska $(B^n(z_0, \delta))_{\delta > 0}$ on laskeva jono äärellismittaisia joukkoja, niin tällöin saadaan arvio

$$0 = A(\{z_0\}) = A\left(\bigcap_{\delta > 0} B^n(z_0, \delta)\right) = \lim_{\delta \to 0} A(B^n(z_0, \delta)) \geq L.$$

Näin ollen on saatu ristiriita, sillä $L > 0$. Tämä päättää todistuksen. $\square$

8.5 Kuvausjonon tasanjakautuminen

Olkoot $n \geq 2$ ja M yhtenäinen, suunnistettu ja kompakti n-ulotteinen Riemannin monisto. Olkoot $K \geq 1$ ja $f\colon \mathbb{R}^n \to M$ K-kvasisäännöllinen kuvaus, joka ei ole vakiokuvaus. Olkoot $(B_m)_{m\in\mathbb{N}}$ A_f-tuplaavasti rajatta kasvava jono kuulia ja $(f_m)_{m\in\mathbb{N}}$ kuulien indusoima kuvausjono. Lemman 7.15 perusteella kuvausjono $(f_m)_{m\in\mathbb{N}}$ on jono K-kvasisäännöllisiä kuvauksia $f_m\colon B^n(0,1) \to M$, jotka eivät ole vakiokuvauksia.

Olkoon $c \in C^\infty(M,\mathbb{R})$ sellainen funktio, että $\int_M c \operatorname{vol}_M = \mu(M)$, missä μ on Riemannin mitta monistolla M. Funktio c on siis sellainen, että sillä kerrottaessa tilavuusmuoto vol_M muuttuu pisteittäin, mutta sen integraali yli moniston M säilyy. Syntyy siis luonnollinen kysymys, miten funktiolla $(c \circ f_m)$ kertominen vaikuttaa differentiaalimuodon $(f_m)^* \operatorname{vol}_M$ integraaliin kuulassa $B^n(0,1)$. Seuraava propositio vastaa kysymykseen yleisemmässä tilanteessa, missä jonon K-kvasisäännöllisiä kuvauksia ei tarvitse olla A_f-tuplaavasti rajatta kasvavien kuulien indusoima; katso [14, Proposition 3.3, s. 873].

Propositio 8.16. *Olkoot $n \geq 2$ ja M yhtenäinen, suunnistettu ja kompakti n-ulotteinen Riemannin monisto. Olkoot $K \geq 1$ ja $(f_m)_{m\in\mathbb{N}}$ sellainen jono K-kvasisäännöllisiä kuvauksia $f_m\colon B^n(0,1) \to M$, että kuvaukset eivät ole vakiokuvauksia ja $\int_{B^n(0,1)} J_{f_m} \to \infty$, kun $m \to \infty$. Olkoon $\psi \in C_c^\infty(B^n(0,1),\mathbb{R})$ sellainen, että*

$$\inf_{m\in\mathbb{N}} \frac{\int_{B^n(0,1)} \psi^n J_{f_m}}{\int_{B^n(0,1)} J_{f_m}} > 0. \tag{8.17}$$

Jos $\omega \in \Omega^n(M)$ on sellainen, että $\int_M \omega = \mu(M)$, missä μ on Riemannin mitta monistolla M, niin tällöin

$$\lim_{m\to\infty} \left| \frac{\int_{B^n(0,1)} \psi^n (f_m)^*\omega}{\int_{B^n(0,1)} \psi^n J_{f_m}} - 1 \right| = 0.$$

Todistus. Koska $\int_M (\operatorname{vol}_M - \omega) = 0$, niin lauseen 3.2 nojalla $0 = [\operatorname{vol}_M - \omega] \in H^n(M)$. Siis $\operatorname{vol}_M - \omega = d\tau$ jollakin $\tau \in \Omega^{n-1}(M)$. Merkitään $B = B^n(0,1)$. Nyt lauseen 7.13 nojalla $(f_m)^*(d\tau) = d((f_m)^*\tau)$ heikossa mielessä jokaisella $m \in \mathbb{N}$, joten yhtälöstä (5.11) saadaan

$$\left| \int_B d\psi^n \wedge (f_m)^*\tau \right| = \left| \int_B \psi^n \wedge d((f_m)^*\tau) \right| = \left| \int_B \psi^n \wedge (f_m)^*(d\tau) \right| = \left| \int_B \psi^n (f_m)^*(d\tau) \right|$$

jokaisella $m \in \mathbb{N}$. Koska $d\psi^n = n\psi^{n-1}d\psi$ ja $(f_m)^*(\operatorname{vol}_M - \omega) = (f_m)^*(d\tau)$ jokaisella $m \in \mathbb{N}$, niin saadaan

$$\left| n \int_B \psi^{n-1} d\psi \wedge (f_m)^*\tau \right| = \left| \int_B \psi^n (f_m)^*(\operatorname{vol}_M - \omega) \right|$$

jokaisella $m \in \mathbb{N}$. Käyttämällä nyt epäyhtälöä (5.5) ja Hölderin epäyhtälöä saadaan jokaisella $m \in \mathbb{N}$ arvio

$$\begin{aligned}
\left| n \int_B \psi^{n-1} d\psi \wedge (f_m)^* \tau \right| &\le n \int_B \psi^{n-1} \left| d\psi \wedge (f_m)^* \tau \right| \\
&\le C(n) \int_B \psi^{n-1} \left| d\psi \right| \left| (f_m)^* \tau \right| \\
&\le C(n) \left|\left| d\psi \right|\right|_{n,B} \left(\int_B (\psi^{n-1} \left| (f_m)^* \tau \right|)^{\frac{n}{n-1}} \right)^{\frac{n-1}{n}} \\
&= C(n) \left|\left| d\psi \right|\right|_{n,B} \left(\int_B \psi^n \left| (f_m)^* \tau \right|^{\frac{n}{n-1}} \right)^{\frac{n-1}{n}} .
\end{aligned}$$

Lisäksi epäyhtälöiden (7.9) ja (7.7) nojalla saadaan jokaisella $m \in \mathbb{N}$ arvio

$$\begin{aligned}
\left(\int_B \psi^n \left| (f_m)^* \tau \right|^{\frac{n}{n-1}} \right)^{\frac{n-1}{n}} &\le \left(\int_B \psi^n (C(n) \left|\left| \tau \right|\right|_\infty \left|\left| Df_m \right|\right|^{n-1})^{\frac{n}{n-1}} \right)^{\frac{n-1}{n}} \\
&= C(n) \left|\left| \tau \right|\right|_\infty \left(\int_B \psi^n \left|\left| Df_m \right|\right|^n \right)^{\frac{n-1}{n}} \\
&\le C(n) \left|\left| \tau \right|\right|_\infty \left(\int_B \psi^n K J_{f_m} \right)^{\frac{n-1}{n}} \\
&= C(n) \left|\left| \tau \right|\right|_\infty K^{\frac{n-1}{n}} \left(\int_B \psi^n J_{f_m} \right)^{\frac{n-1}{n}} .
\end{aligned}$$

Yhdistämällä aiemmat välivaiheet on saatu jokaisella $m \in \mathbb{N}$ arvio

$$\left| \int_B \psi^n (f_m)^* (\mathrm{vol}_M - \omega) \right| \le C(n) \left|\left| d\psi \right|\right|_{n,B} \left|\left| \tau \right|\right|_\infty K^{\frac{n-1}{n}} \left(\int_B \psi^n J_{f_m} \right)^{\frac{n-1}{n}} . \tag{8.18}$$

Yhtälön (2.16) nojalla tutkittavalle erotukselle pätee

$$\begin{aligned}
\left| \frac{\int_B \psi^n (f_m)^* \omega}{\int_B \psi^n J_{f_m}} - 1 \right| &= \left| \frac{\int_B \psi^n (f_m)^* \omega - \int_B \psi^n J_{f_m}}{\int_B \psi^n J_{f_m}} \right| \\
&= \left(\int_B \psi^n J_{f_m} \right)^{-1} \left| \int_B \psi^n (f_m)^* \omega - \int_B \psi^n J_{f_m} \right| \\
&= \left(\int_B \psi^n J_{f_m} \right)^{-1} \left| \int_B \psi^n (f_m)^* \omega - \int_B \psi^n (f_m)^* (\mathrm{vol}_M) \right| \\
&= \left(\int_B \psi^n J_{f_m} \right)^{-1} \left| \int_B \psi^n (f_m)^* (\mathrm{vol}_M - \omega) \right|
\end{aligned}$$

jokaisella $m \in \mathbb{N}$, jolloin epäyhtälöiden (8.18) ja (8.17) nojalla pätee

$$\begin{aligned} \left| \frac{\int_B \psi^n (f_m)^* \omega}{\int_B \psi^n J_{f_m}} - 1 \right| &\leq C(n) \, ||d\psi||_{n,B} \, ||\tau||_\infty \, K^{\frac{n-1}{n}} \left(\int_B \psi^n J_{f_m} \right)^{-\frac{1}{n}} \\ &\leq C(n) \, ||d\psi||_{n,B} \, ||\tau||_\infty \, K^{\frac{n-1}{n}} \left(\int_B J_{f_m} \right)^{-\frac{1}{n}} \to 0, \end{aligned}$$

kun $m \to \infty$. Väite on todistettu. $\square$

8.6 Rajamuotojen degeneroituvuus

Olkoot $n \geq 2$ ja M yhtenäinen, suunnistettu ja kompakti n-ulotteinen Riemannin monisto. Olkoot $K \geq 1$ ja $f \colon \mathbb{R}^n \to M$ K-kvasisäännöllinen kuvaus, joka ei ole vakiokuvaus. Olkoot $(B_m)_{m \in \mathbb{N}}$ A_f-tuplaavasti rajatta kasvava jono kuulia ja $(f_m)_{m \in \mathbb{N}}$ kuulien indusoima kuvausjono. Olkoon $1 \leq \ell \leq \frac{n}{2}$ ja olkoot $(\alpha_1, \ldots, \alpha_k)$ avaruuden $H^\ell(M)$ jono ja $(\beta_1, \ldots, \beta_k)$ sen duaalijono. Olkoot η_i ja θ_i rajamuodot kuten lemmassa 8.9 jokaisella $i = 1, \ldots, k$.

Olkoot $i \in \{1, \ldots, k\}$ ja $j \in \{1, \ldots, k\}$. Tässä alaluvussa esitetään kaksi erittäin tärkeätä tulosta rajamuotojen η_i ja θ_j degeneroituvuudesta. Ensimmäinen lemma on tulos differentiaalimuotojen $\psi((f_m)^! \alpha_i) \wedge ((f_m)^! \beta_j)$ integraalien suppenemisesta differentiaalimuodon $\psi \eta_i \wedge \theta_j$ integraaliin jokaisella $\psi \in C_c^\infty(B^n(0,1), \mathbb{R})$; katso [14, Lemma 4.2, s. 877]. Toinen lemma osoittaa, että rajamuotojen η_i ja θ_j pisteittäinen ulkoinen tulo on nolla melkein kaikkialla, jos $i \neq j$; katso [14, Lemma 4.3, s. 878].

Lemma 8.19. *Olkoot $n \geq 2$ ja M yhtenäinen, suunnistettu ja kompakti n-ulotteinen Riemannin monisto. Olkoot $K \geq 1$ ja $f \colon \mathbb{R}^n \to M$ K-kvasisäännöllinen kuvaus, joka ei ole vakiokuvaus. Olkoot $(B_m)_{m \in \mathbb{N}}$ A_f-tuplaavasti rajatta kasvava jono kuulia ja $(f_m)_{m \in \mathbb{N}}$ kuulien indusoima kuvausjono. Olkoon $1 \leq \ell \leq \frac{n}{2}$ ja olkoot $(\alpha_1, \ldots, \alpha_k)$ avaruuden $H^\ell(M)$ jono ja $(\beta_1, \ldots, \beta_k)$ sen duaalijono. Tällöin jokaisella $i = 1, \ldots, k$ ja jokaisella $j = 1, \ldots, k$ pätee*

$$\lim_{m \to \infty} \int_{B^n(0,1)} \psi((f_m)^! \alpha_i) \wedge ((f_m)^! \beta_j) = \int_{B^n(0,1)} \psi \eta_i \wedge \theta_j$$

jokaisella $\psi \in C_c^\infty(B^n(0,1), \mathbb{R})$, missä η_i ja θ_j ovat rajamuodot kuten lemmassa 8.9.

Todistus. Olkoot $i \in \{1, \ldots, k\}$ ja $j \in \{1, \ldots, k\}$. Olkoon $\psi \in C_c^\infty(B^n(0,1), \mathbb{R})$. Merkitään

$B = B^n(0,1)$ ja arvioidaan

$$\begin{aligned}
&\left|\int_B \psi\eta_i \wedge \theta_j - \int_B \psi((f_m)^! \alpha_i) \wedge ((f_m)^! \beta_j)\right| \\
&\quad = \left|\int_B \psi(\eta_i - (f_m)^! \alpha_i) \wedge \theta_j + \int_B \psi((f_m)^! \alpha_i) \wedge (\theta_j - (f_m)^! \beta_j)\right| \\
&\quad \leq \left|\int_B \psi(\eta_i - (f_m)^! \alpha_i) \wedge \theta_j\right| + \left|\int_B \psi((f_m)^! \alpha_i) \wedge (\theta_j - (f_m)^! \beta_j)\right| \\
&\quad = \left|\int_B (\eta_i - (f_m)^! \alpha_i) \wedge (\psi\theta_j)\right| + \left|\int_B (\psi(f_m)^! \alpha_i) \wedge d(u_j - u_j^m)\right|
\end{aligned}$$

jokaisella $m \in \mathbb{N}$, missä muodot u_j ja u_j^m ovat kuten lemmassa 8.9.

Osoitetaan, että oikean puolen molemmat termit suppenevat nollaan. Koska $(f_m)^! \alpha_i$ suppenee muotoon η_i heikosti avaruudessa $L^{\frac{n}{\ell}}(B, \Lambda^\ell(\mathbb{R}^n))$ ja $\psi\theta_j \in L^{\frac{n}{n-\ell}}(B, \Lambda^{n-\ell}(\mathbb{R}^n))$, niin summan ensimmäinen termi suppenee nollaan.

Lemman 7.20 nojalla differentiaalimuoto $(f_m)^! \alpha_i$ on heikosti suljettu jokaisella $m \in \mathbb{N}$. Tällöin käyttämällä lemmaa 5.13 differentiaalimuotoon $(f_m)^! \alpha_i$ ja testifunktioon ψ saadaan, että pätee $\psi(f_m)^! \alpha_i \in W^{d,\frac{n}{\ell}}(B, \Lambda^\ell(\mathbb{R}^n))$ ja $d(\psi(f_m)^! \alpha_i) = d\psi \wedge ((f_m)^! \alpha_i)$ heikossa mielessä jokaisella $m \in \mathbb{N}$. Nyt lemman 5.20, epäyhtälön (5.5) ja Hölderin epäyhtälön nojalla jokaisella $m \in \mathbb{N}$ saadaan arvio

$$\begin{aligned}
\left|\int_B (\psi(f_m)^! \alpha_i) \wedge d(u_j - u_j^m)\right| &= \left|\int_B d(\psi(f_m)^! \alpha_i) \wedge (u_j - u_j^m)\right| \\
&= \left|\int_B d\psi \wedge ((f_m)^! \alpha_i) \wedge (u_j - u_j^m)\right| \\
&\leq \int_B \left|d\psi \wedge ((f_m)^! \alpha_i) \wedge (u_j - u_j^m)\right| \\
&\leq C(n) \int_B |d\psi| \left|(f_m)^! \alpha_i\right| \left|u_j - u_j^m\right| \\
&\leq C(n) \left(\int_B \left(|d\psi| \left|(f_m)^! \alpha_i\right|\right)^{\frac{n}{\ell}}\right)^{\frac{\ell}{n}} \left|\left|u_j - u_j^m\right|\right|_{\frac{n}{n-\ell}, B}.
\end{aligned}$$

Koska $\psi \in C_c^\infty(B, \mathbb{R})$, niin on olemassa sellainen vakio $L > 0$, että $|d\psi|(x) = ||(d\psi)_x||_{\Lambda^1(\mathbb{R}^n)} = |D\psi(x)| \leq L$ jokaisella $x \in B$. Täten lemman 7.20 perusteella pätee

$$\left(\int_B \left(|d\psi| \left|(f_m)^! \alpha_i\right|\right)^{\frac{n}{\ell}}\right)^{\frac{\ell}{n}} \left|\left|u_j - u_j^m\right|\right|_{\frac{n}{n-\ell}, B} \leq C(n) L \left|\left|\omega_{\alpha_i}\right|\right|_\infty K^{\frac{\ell}{n}} \left|\left|u_j - u_j^m\right|\right|_{\frac{n}{n-\ell}, B} \to 0,$$

kun $m \to \infty$. $\square$

Lemma 8.20. *Olkoot $n \geq 2$ ja M yhtenäinen, suunnistettu ja kompakti n-ulotteinen Riemannin monisto. Olkoot $K \geq 1$ ja $f \colon \mathbb{R}^n \to M$ K-kvasisäännöllinen kuvaus, joka ei ole vakiokuvaus. Olkoot $(B_m)_{m\in\mathbb{N}}$ A_f-tuplaavasti rajatta kasvava jono kuulia ja $(f_m)_{m\in\mathbb{N}}$ kuulien indusoima kuvausjono. Olkoon $1 \leq \ell \leq \frac{n}{2}$ ja olkoot $(\alpha_1, \ldots, \alpha_k)$ avaruuden $H^\ell(M)$ jono ja $(\beta_1, \ldots, \beta_k)$ sen duaalijono. Tällöin jokaisella sellaisella $i = 1, \ldots, k$ ja jokaisella sellaisella $j = 1, \ldots, k$, että $i \neq j$, pätee*

$$\eta_i \wedge \theta_j(x) = 0$$

melkein jokaisella $x \in B^n(0,1)$, missä η_i ja θ_j ovat rajamuodot kuten lemmassa 8.9.

Todistus. Olkoot $i \in \{1, \ldots, k\}$ ja $j \in \{1, \ldots, k\}$ sellaisia, että $i \neq j$. Olkoon $\psi \in C_c^\infty(B^n(0,1), \mathbb{R})$. Osoitetaan, että

$$\int_{B^n(0,1)} \psi \eta_i \wedge \theta_j = 0.$$

Lemman 8.19 perusteella riittää osoittaa, että

$$\lim_{m\to\infty} \int_{B^n(0,1)} \psi((f_m)^! \alpha_i) \wedge ((f_m)^! \beta_j) = 0.$$

Koska jono $(\beta_1, \ldots, \beta_k)$ on jonon $(\alpha_1, \ldots, \alpha_k)$ duaalijono ja $i \neq j$, niin

$$\int_M \omega_{\alpha_i} \wedge \omega_{\beta_j} = 0.$$

Tällöin proposition 3.2 nojalla on olemassa sellainen $\tau \in \Omega^{n-1}(M)$, että $d\tau = \omega_{\alpha_i} \wedge \omega_{\beta_j}$. Näin ollen jokaisella $m \in \mathbb{N}$ saadaan yhtäsuuruus

$$\begin{aligned} ((f_m)^! \alpha_i) \wedge ((f_m)^! \beta_j) &= \left(A_f(B_m)^{-\frac{\ell}{n}} (f_m)^* \omega_{\alpha_i} \right) \wedge \left(A_f(B_m)^{\frac{\ell - n}{n}} (f_m)^* \omega_{\beta_j} \right) \\ &= \frac{1}{A_f(B_m)} (f_m)^* (\omega_{\alpha_i} \wedge \omega_{\beta_j}) = \frac{1}{A_f(B_m)} (f_m)^* (d\tau). \end{aligned}$$

Koska proposition 7.13 nojalla pätee $(f_m)^*(d\tau) = d((f_m)^*\tau)$ heikossa mielessä jokaisella $m \in \mathbb{N}$, niin

$$\int_{B^n(0,1)} \psi (f_m)^*(d\tau) = \int_{B^n(0,1)} d((f_m)^*\tau) \wedge \psi = (-1)^n \int_{B^n(0,1)} (f_m)^*\tau \wedge d\psi$$

jokaisella $m \in \mathbb{N}$.

Nyt jokaisella $m \in \mathbb{N}$ epäyhtälöstä (5.5), Hölderin epäyhtälöstä ja epäyhtälöstä (7.19) seuraa arvio

$$\begin{aligned}\left|\int_{B^n(0,1)} (f_m)^*\tau \wedge d\psi\right| &\leq \int_{B^n(0,1)} |(f_m)^*\tau \wedge d\psi| \leq C(n)\int_{B^n(0,1)} |(f_m)^*\tau|\,|d\psi| \\ &\leq C(n)\,||(f_m)^*\tau||_{\frac{n}{n-1},B^n(0,1)}\,||d\psi||_{n,B^n(0,1)} \\ &\leq C(n)\,||\tau||_\infty\,K^{\frac{n-1}{n}}A_f(B_m)^{\frac{n-1}{n}}\,||d\psi||_{n,B^n(0,1)}\,.\end{aligned}$$

Näin ollen on osoitettu, että

$$\left|\int_{B^n(0,1)} \psi((f_m)^!\alpha_i) \wedge ((f_m)^!\beta_j)\right| \leq A_f(B_m)^{-\frac{1}{n}}C(n)\,||\tau||_\infty\,K^{\frac{n-1}{n}}\,||d\psi||_{n,B^n(0,1)} \to 0,$$

kun $m \to \infty$.

□

8.7 Rajamuotojen pisteittäinen vapaus

Olkoot $n \geq 2$ ja M kompakti, yhtenäinen ja suunnistettu n-ulotteinen Riemannin monisto. Olkoot $K \geq 1$ ja $f\colon \mathbb{R}^n \to M$ K-kvasisäännöllinen kuvaus, joka ei ole vakiokuvaus. Olkoot $(B_m)_{m\in\mathbb{N}}$ A_f-tuplaavasti rajatta kasvava jono kuulia $B_m = B^n(x_m, r_m)$ ja $(f_m)_{m\in\mathbb{N}}$ kuulien indusoima kuvausjono. Olkoon $1 \leq \ell \leq \frac{n}{2}$ ja olkoot $(\alpha_1, \dots, \alpha_k)$ avaruuden $H^\ell(M)$ jono ja $(\beta_1, \dots, \beta_k)$ sen duaalijono. Olkoon η_i rajamuoto kuten lemmassa 8.9 jokaisella $i = 1, \dots, k$. Tässä alaluvussa oletetaan, että pätee

$$\left|\left\{x \in B^n(0,1)\colon \text{ jono } (\eta_1(x), \dots, \eta_k(x)) \subset \Lambda^\ell(\mathbb{R}^n) \text{ on vapaa}\right\}\right| = 0$$

ja todistetaan kaksi lemmaa; katso [14, Corollary 4.4, s. 879] ja [14, Lemma 5.1, s. 879]. Lauseen 7.22 todistus on ristiriitatodistus, missä ristiriita saadaan näistä lemmoista.

Lemma 8.21. *Olkoot $n \geq 2$ ja M yhtenäinen, suunnistettu ja kompakti n-ulotteinen Riemannin monisto. Olkoot $K \geq 1$ ja $f\colon \mathbb{R}^n \to M$ K-kvasisäännöllinen kuvaus, joka ei ole vakiokuvaus. Olkoot $(B_m)_{m\in\mathbb{N}}$ A_f-tuplaavasti rajatta kasvava jono kuulia $B_m = B^n(x_m, r_m)$ ja $(f_m)_{m\in\mathbb{N}}$ kuulien indusoima kuvausjono. Olkoon $1 \leq \ell \leq \frac{n}{2}$ ja olkoot $(\alpha_1, \dots, \alpha_k)$ avaruuden $H^\ell(M)$ jono ja $(\beta_1, \dots, \beta_k)$ sen duaalijono. Määritellään jokaisella $i = 1, \dots, k$ ja jokaisella $m \in \mathbb{N}$ joukot*

$$D_i = \{x \in B^n(0,1)\colon \eta_i \wedge \theta_i(x) = 0\} \quad \text{ja} \quad D_i^m = x_m + r_m D_i,$$

missä η_i ja θ_i ovat rajamuodot kuten lemmassa 8.9. Olkoon

$$F = \left\{x \in B^n(0,1)\colon \text{ jono } (\eta_1(x), \dots, \eta_k(x)) \subset \Lambda^\ell(\mathbb{R}^n) \text{ on vapaa}\right\}.$$

Oletetaan, että $|F| = 0$. Tällöin jokaisella $m \in \mathbb{N}$ pätee epäyhtälö

$$A_f\left(\frac{1}{2}B_m\right) \leq \sum_{i=1}^{k} \int_{\frac{1}{2}B_m \cap D_i^m} J_f. \tag{8.22}$$

Todistus. Määritellään jokaisella $i = 1, \ldots, k$ ja jokaisella $j = 1, \ldots, k$ joukko

$$E_{ij} = \{x \in B^n(0,1) \colon \eta_i \wedge \theta_j(x) = 0\}.$$

Merkitään

$$E = \bigcap_{i \neq j} E_{ij}.$$

Tällöin lemman 8.20 nojalla pätee epäyhtälö

$$|B^n(0,1) \setminus E| = \left|\bigcup_{i \neq j}(B^n(0,1) \setminus E_{ij})\right| \leq \sum_{i \neq j} |B^n(0,1) \setminus E_{ij}| = 0.$$

Olkoot $x \in E \setminus F$ ja $V = \operatorname{span}(\eta_1(x), \ldots, \eta_k(x)) \subset \Lambda^\ell(\mathbb{R}^n)$. Koska $x \notin F$, niin on olemassa sellainen vektoriavaruuden V kanta $(\eta_{t_1}(x), \ldots, \eta_{t_s}(x))$, että $s < k$. Näin ollen on olemassa sellainen $\eta_{i_0} \notin \{\eta_{t_1}(x), \ldots, \eta_{t_s}(x)\}$, että

$$\eta_{i_0} = \sum_{\nu=1}^{s} c_{t_\nu} \eta_{t_\nu}.$$

Koska $x \in E$, niin saadaan yhtäsuuruus

$$\eta_{i_0} \wedge \theta_{i_0}(x) = \sum_{\nu=1}^{s} c_{t_\nu} \eta_{t_\nu} \wedge \theta_{i_0}(x) = 0.$$

Täten on osoitettu, että $E \setminus F \subset \bigcup_{i=1}^{k} D_i$. Tällöin saadaan arviot

$$\left|B^n(0,1) \setminus \left(\bigcup_{i=1}^{k} D_i\right)\right| \leq |B^n(0,1) \setminus (E \setminus F)| \leq |B^n(0,1) \setminus E| + |F| = 0$$

ja

$$\left|B_m \setminus \left(\bigcup_{i=1}^{k} D_i^m\right)\right| = r_m^n \left|B^n(0,1) \setminus \left(\bigcup_{i=1}^{k} D_i\right)\right| = 0.$$

Näin ollen on osoitettu yhtäsuuruus

$$\left|\frac{1}{2}B_m\right| = \left|\frac{1}{2}B_m \cap \left(\bigcup_{i=1}^{k} D_i^m\right)\right| + \left|\frac{1}{2}B_m \setminus \left(\bigcup_{i=1}^{k} D_i^m\right)\right| = \left|\bigcup_{i=1}^{k}\left(\frac{1}{2}B_m \cap D_i^m\right)\right|,$$

jolloin voidaan tehdä arvio

$$A_f\left(\frac{1}{2}B_m\right) = \int_{\frac{1}{2}B_m} J_f = \int_{\bigcup_{i=1}^{k}\left(\frac{1}{2}B_m \cap D_i^m\right)} J_f \le \sum_{i=1}^{k} \int_{\frac{1}{2}B_m \cap D_i^m} J_f.$$

□

Lemma 8.23. *Olkoot $n \ge 2$ ja M yhtenäinen, suunnistettu ja kompakti n-ulotteinen Riemannin monisto. Olkoot $K \ge 1$ ja $f\colon \mathbb{R}^n \to M$ K-kvasisäännöllinen kuvaus, joka ei ole vakiokuvaus. Olkoot $(B_m)_{m\in\mathbb{N}}$ vakiolla D A_f-tuplaavasti rajatta kasvava jono kuulia $B_m = B^n(x_m, r_m)$ ja $(f_m)_{m\in\mathbb{N}}$ kuulien indusoima kuvausjono. Olkoon $1 \le \ell \le \frac{n}{2}$ ja olkoot $(\alpha_1, \ldots, \alpha_k)$ avaruuden $H^\ell(M)$ jono ja $(\beta_1, \ldots, \beta_k)$ sen duaalijono. Olkoot η_i ja θ_i rajamuodot kuten lemmassa 8.9 jokaisella $i = 1, \ldots, k$. Olkoon*

$$F = \left\{x \in B^n(0,1)\colon \text{ jono } (\eta_1(x), \ldots, \eta_k(x)) \subset \Lambda^\ell(\mathbb{R}^n) \text{ on vapaa}\right\}.$$

Oletetaan, että $|F| = 0$. Tällöin on olemassa sellainen indeksi $i_0 \in \{1, \ldots, k\}$ ja sellainen kuulien $(B_m)_{m\in\mathbb{N}}$ osajono, että jokaisella $\varepsilon > 0$ on olemassa sellainen kompakti joukko E ja sellainen avoin joukko U, että $E \subset B^n(0, \frac{1}{2}) \cap D_{i_0} \subset U \subset B^n(0,1)$,

$$\int_{x_m + r_m E} J_f \ge \frac{A_f(B_m)}{2kD} \tag{8.24}$$

jokaisella $m \in \mathbb{N}$ ja

$$\int_U |\eta_{i_0} \wedge \theta_{i_0}| < \varepsilon. \tag{8.25}$$

Todistus. Määritellään jokaisella $i = 1, \ldots, k$ ja jokaisella $m \in \mathbb{N}$ joukot

$$D_i = \{x \in B^n(0,1)\colon \eta_i \wedge \theta_i(x) = 0\} \quad \text{ja} \quad D_i^m = x_m + r_m D_i.$$

Käyttämällä epäyhtälöä (8.22) saadaan jokaisella $m \in \mathbb{N}$ arvio

$$A_f\left(\frac{1}{2}B_m\right) \le \sum_{i=1}^{k} \int_{\frac{1}{2}B_m \cap D_i^m} J_f \le k \max_{1\le i\le k} \int_{\frac{1}{2}B_m \cap D_i^m} J_f = k \int_{\frac{1}{2}B_m \cap D_{i_m}^m} J_f$$

jollakin $1 \leq i_m \leq k$. Tällöin on olemassa sellainen kuulien $(B_m)_{m\in\mathbb{N}}$ osajono $(B_{m_j})_{j\in\mathbb{N}}$ ja sellainen indeksi $i_0 \in \{1,\dots,k\}$, että $i_{m_j} = i_0$ jokaisella $j \in \mathbb{N}$. Merkitään osajonoa $(B_{m_j})_{j\in\mathbb{N}}$ samoin kuin alkuperäistä jonoa $(B_m)_{m\in\mathbb{N}}$. Nyt epäyhtälön (8.13) nojalla jokaisella $m \in \mathbb{N}$ pätee arvio

$$\frac{A_f(B_m)}{kD} \leq \frac{A_f\left(\frac{1}{2}B_m\right)}{k} \leq \int_{\frac{1}{2}B_m\cap D^m_{i_0}} J_f. \tag{8.26}$$

Olkoon $\varepsilon > 0$. Koska $|\eta_{i_0} \wedge \theta_{i_0}| \in L^1(B^n(0,1))$, niin on olemassa sellainen $\delta > 0$, että

$$\int_G |\eta_{i_0} \wedge \theta_{i_0}| < \varepsilon$$

jokaisella sellaisella joukolla $G \subset B^n(0,1)$, että $|G| < \delta$. Koska joukko $B^n\left(0,\frac{1}{2}\right) \cap D_{i_0}$ on mitallinen, niin on olemassa sellainen avoin joukko $U \subset B^n(0,1)$, että $B^n\left(0,\frac{1}{2}\right) \cap D_{i_0} \subset U$ ja $\left|U \setminus \left(B^n\left(0,\frac{1}{2}\right) \cap D_{i_0}\right)\right| < \delta$. Tällöin

$$\int_U |\eta_{i_0} \wedge \theta_{i_0}| = \int_{U\setminus\left(B^n\left(0,\frac{1}{2}\right)\cap D_{i_0}\right)} |\eta_{i_0} \wedge \theta_{i_0}| + \int_{B^n\left(0,\frac{1}{2}\right)\cap D_{i_0}} |\eta_{i_0} \wedge \theta_{i_0}| < \varepsilon.$$

Etsitään sitten sopiva joukko E. Mitallisuuden nojalla jokaisella $\xi > 0$ on olemassa sellainen kompakti joukko $E(\xi) \subset B^n\left(0,\frac{1}{2}\right) \cap D_{i_0}$, että $\left|\left(B^n\left(0,\frac{1}{2}\right) \cap D_{i_0}\right) \setminus E(\xi)\right| < \xi$. Merkitään $E^m_\xi = x_m + r_m E(\xi)$ ja $G^m_\xi = \left(\frac{1}{2}B_m \cap D^m_{i_0}\right) \setminus E^m_\xi$ jokaisella $m \in \mathbb{N}$. Tällöin jokaisella $m \in \mathbb{N}$ pätee epäyhtälö

$$\left|G^m_\xi\right| = r^n_m \left|\left(B^n\left(0,\frac{1}{2}\right) \cap D_{i_0}\right) \setminus E(\xi)\right| < r^n_m \xi. \tag{8.27}$$

Olkoon $b > 1$ kuten propositiossa 8.5. Käyttämällä nyt Hölderin epäyhtälöä, epäyhtälöä (8.27) ja epäyhtälöä (8.6) saadaan arvio

$$\begin{aligned}
\int_{G^m_\xi} J_f &\leq \left|G^m_\xi\right|^{\frac{b-1}{b}} \left(\int_{G^m_\xi} J_f^b\right)^{\frac{1}{b}} \leq (r^n_m)^{\frac{b-1}{b}} \xi^{\frac{b-1}{b}} \left(\int_{\frac{1}{2}B_m} J_f^b\right)^{\frac{1}{b}} \\
&\leq C(n,M,K,b)(r^n_m)^{\frac{b-1}{b}} \xi^{\frac{b-1}{b}} \left|\frac{1}{2}B_m\right|^{\frac{1}{b}} \frac{1}{|B_m|} \int_{B_m} J_f \\
&= C(n,M,K,b)(r^n_m)^{\frac{b-1}{b}} \xi^{\frac{b-1}{b}} \left(\frac{r_m}{2}\right)^{\frac{n}{b}} (r_m)^{-n} A_f(B_m) \\
&= C(n,M,K,b)\xi^{\frac{b-1}{b}} A_f(B_m)
\end{aligned}$$

jokaisella $m \in \mathbb{N}$.

Olkoon $\xi > 0$ sellainen, että $\xi \leq (2kDC(n, M, K, b))^{-\frac{b}{b-1}}$. Tällöin on osoitettu, että pätee epäyhtälö

$$\int_{G_\xi^m} J_f \leq \frac{A_f(B_m)}{2kD} \tag{8.28}$$

jokaisella $m \in \mathbb{N}$. Näin ollen epäyhtälöistä (8.26) ja (8.28) seuraa arvio

$$\frac{A_f(B_m)}{kD} \leq \int_{\frac{1}{2}B_m \cap D_{i_0}^m} J_f = \int_{G_\xi^m} J_f + \int_{\left(\frac{1}{2}B_m \cap D_{i_0}^m\right) \cap E_\xi^m} J_f \leq \frac{A_f(B_m)}{2kD} + \int_{E_\xi^m} J_f$$

jokaisella $m \in \mathbb{N}$. Vähentämällä puolittain termi $\frac{A_f(B_m)}{2kD}$ jokaisella $m \in \mathbb{N}$ ja valitsemalla $E = E(\xi)$ saadaan osoitettua epäyhtälö (8.24) jokaisella $m \in \mathbb{N}$. Koska joukko E toteuttaa muutkin vaaditut ominaisuudet, niin todistus on valmis. $\square$

8.8 Lauseen 7.22 todistus

Korollaarin 8.15 nojalla on olemassa vakiolla $D(n)$ A_f-tuplaavasti rajatta kasvava jono $(B_m)_{m \in \mathbb{N}}$ kuulia $B_m = B^n(x_m, r_m)$ jollakin $D(n) > 1$. Olkoon kuvausjono $(f_m)_{m \in \mathbb{N}}$ kuulien $(B_m)_{m \in \mathbb{N}}$ indusoima. Olkoot $(\alpha_1, \ldots, \alpha_k)$ avaruuden $H^\ell(M)$ kanta ja $(\beta_1, \ldots, \beta_k)$ sen duaalijono. Lauseen 3.7 perusteella kannan duaalijono on olemassa. Olkoon $(B_{m_t})_{t \in \mathbb{N}}$ sellainen kuulien $(B_m)_{m \in \mathbb{N}}$ osajono, että jokaisella $i = 1, \ldots, k$ on olemassa rajamuodot η_i ja θ_i kuten lemmassa 8.9. Tällöin kuvaus

$$L\colon H^\ell(M) \to L^{\frac{n}{\ell}}(B^n(0,1), \Lambda^\ell(\mathbb{R}^n)),$$

joka on määritelty kaavalla

$$\sum_{i=1}^k p_i \alpha_i \mapsto \sum_{i=1}^k p_i \eta_i,$$

on kuvauksen f ℓ:s kohomologinen arvojenjakautumisraja. Riittää osoittaa, että $|F| > 0$, missä

$$F = \left\{x \in B^n(0,1)\colon \text{ jono } (L\alpha_1(x), \ldots, L\alpha_k(x)) \subset \Lambda^\ell(\mathbb{R}^n) \text{ on vapaa}\right\}.$$

Mielivaltainen avaruuden $H^\ell(M)$ kanta voidaan palauttaa kantaan $(\alpha_1, \ldots, \alpha_k)$ kannanvaihdolla. Tehdään vastaoletus, että pätee $|F| = 0$.

Lemman 8.23 nojalla on olemassa sellainen indeksi $i_0 \in \{1, \ldots, k\}$, sellainen kuulien $(B_{m_t})_{t \in \mathbb{N}}$ osajono $(B_{m_{t_s}})_{s \in \mathbb{N}}$, sellainen kompakti joukko E ja sellainen avoin joukko U, että $E \subset U \subset B^n(0,1)$,

$$\int_{x_m + r_m E} J_f \geq \frac{A_f(B_m)}{2kD(n)} \tag{8.29}$$

jokaisella $m \in \mathbb{N}$ ja

$$\int_U |\eta_{i_0} \wedge \theta_{i_0}| < \frac{1}{8kD(n)\mu(M)}, \tag{8.30}$$

missä μ on Riemannin mitta monistolla M. Merkitään osajonoa $(B_{m_{t_s}})_{s \in \mathbb{N}}$ jatkossa samoin kuin alkuperäistä jonoa.

Olkoon $\psi \in C_c^\infty(B^n(0,1), \mathbb{R})$ sellainen funktio, että $0 \leq \psi(x) \leq 1$ jokaisella $x \in B^n(0,1)$, $\psi(x) = 1$ jokaisella $x \in E$ ja $\psi(x) = 0$ jokaisella $x \in B^n(0,1) \setminus U$. Koska epäyhtälön (8.29) nojalla saadaan arvio

$$\frac{\int_{B^n(0,1)} \psi^n J_{f_m}}{\int_{B^n(0,1)} J_{f_m}} = \frac{\int_{B_m} (\psi \circ T^{-1}_{x_m, r_m})^n J_f}{\int_{B_m} J_f} \geq \frac{\int_{x_m + r_m E} J_f}{A_f(B_m)} \geq \frac{1}{2kD(n)} \tag{8.31}$$

jokaisella $m \in \mathbb{N}$, niin funktio ψ toteuttaa epäyhtälön (8.17). Merkitään $v = \mu(M)$ ja sovelletaan propositiota 8.16 differentiaalimuotoon $v\omega_{\alpha_{i_0}} \wedge \omega_{\beta_{i_0}}$. Täten on olemassa sellainen $m_1 \in \mathbb{N}$, että

$$\left| \frac{\int_{B^n(0,1)} \psi^n (f_m)^*(\omega_{\alpha_{i_0}} \wedge \omega_{\beta_{i_0}})}{\int_{B^n(0,1)} \psi^n J_{f_m}} - \frac{1}{v} \right| \leq \frac{1}{2v} \tag{8.32}$$

jokaisella $m \geq m_1$.

Koska jokaisella $m \in \mathbb{N}$ pätee yhtälö

$$\frac{1}{A_f(B_m)} (f_m)^*(\omega_{\alpha_{i_0}} \wedge \omega_{\beta_{i_0}}) = ((f_m)^! \alpha_{i_0}) \wedge ((f_m)^! \beta_{i_0}),$$

niin lemman 8.19 ja epäyhtälön (8.30) nojalla saadaan arvio

$$\begin{aligned} \lim_{m \to \infty} \left| \frac{1}{A_f(B_m)} \int_{B^n(0,1)} \psi^n (f_m)^*(\omega_{\alpha_{i_0}} \wedge \omega_{\beta_{i_0}}) \right| &= \left| \int_{B^n(0,1)} \psi^n \eta_{i_0} \wedge \theta_{i_0} \right| \leq \int_U |\eta_{i_0} \wedge \theta_{i_0}| \\ &< \frac{1}{8vkD(n)}. \end{aligned}$$

Tällöin on olemassa sellainen $m_2 \in \mathbb{N}$, että

$$\frac{1}{A_f(B_m)} \int_{B^n(0,1)} \psi^n (f_m)^*(\omega_{\alpha_{i_0}} \wedge \omega_{\beta_{i_0}}) < \frac{1}{4vkD(n)} \tag{8.33}$$

jokaisella $m \geq m_2$.

Olkoon $m_0 \in \mathbb{N}$ sellainen, että $m_0 \geq \max\{m_1, m_2\}$. Tällöin epäyhtälöstä (8.32) saadaan arvio

$$\frac{\int_{B^n(0,1)} \psi^n (f_{m_0})^*(\omega_{\alpha_{i_0}} \wedge \omega_{\beta_{i_0}})}{\int_{B^n(0,1)} \psi^n J_{f_{m_0}}} \geq \frac{1}{2v}.$$

Epäyhtälöiden (8.33) ja (8.31) nojalla saadaan arvio

$$\begin{aligned} \frac{\int_{B^n(0,1)} \psi^n (f_{m_0})^*(\omega_{\alpha_{i_0}} \wedge \omega_{\beta_{i_0}})}{\int_{B^n(0,1)} \psi^n J_{f_{m_0}}} &= \frac{A_f(B_{m_0})}{\int_{B^n(0,1)} \psi^n J_{f_{m_0}}} \frac{1}{A_f(B_{m_0})} \int_{B^n(0,1)} \psi^n (f_{m_0})^*(\omega_{\alpha_{i_0}} \wedge \omega_{\beta_{i_0}}) \\ &< 2kD(n) \frac{1}{4vkD(n)} = \frac{1}{2v}. \end{aligned}$$

Tämä on ristiriita, joka johdettiin vastaoletuksesta $|F| = 0$.

Kirjallisuutta

[1] B. Bojarski and T. Iwaniec. Analytical foundations of the theory of quasiconformal mappings in $\mathbf{R}^n$. *Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A I Math.*, 8(2):257–324, 1983.

[2] Mario Bonk and Juha Heinonen. Quasiregular mappings and cohomology. *Acta Math.*, 186(2):219–238, 2001.

[3] Mario Bonk and Pietro Poggi-Corradini. The Rickman-Picard theorem. *Ann. Acad. Sci. Fenn. Math.*, 44(2):615–633, 2019.

[4] A. P. Calderón and A. Zygmund. On singular integrals. *Amer. J. Math.*, 78:289–309, 1956.

[5] Lawrence C. Evans. *Partial differential equations*, volume 19 of *Graduate Studies in Mathematics*. American Mathematical Society, Providence, RI, 1998.

[6] M. Gromov. Hyperbolic manifolds, groups and actions. In *Riemann surfaces and related topics: Proceedings of the 1978 Stony Brook Conference (State Univ. New York, Stony Brook, N.Y., 1978)*, volume 97 of *Ann. of Math. Stud.*, pages 183–213. Princeton Univ. Press, Princeton, N.J., 1981.

[7] Victor Guillemin and Alan Pollack. *Differential topology.* AMS Chelsea Publishing, Providence, RI, 2010. Reprint of the 1974 original.

[8] Juha Heinonen. *Lectures on analysis on metric spaces.* Universitext. Springer-Verlag, New York, 2001.

[9] Tadeusz Iwaniec and Adam Lutoborski. Integral estimates for null Lagrangians. *Arch. Rational Mech. Anal.*, 125(1):25–79, 1993.

[10] Tadeusz Iwaniec and Gaven Martin. *Geometric function theory and non-linear analysis.* Oxford Mathematical Monographs. The Clarendon Press, Oxford University Press, New York, 2001.

[11] Riikka Kangaslampi. Uniformly quasiregular mappings on elliptic Riemannian manifolds. *Ann. Acad. Sci. Fenn. Math. Diss.*, (151), 2008. Dissertation, Helsinki University of Technology, Espoo, 2008.

[12] Ilmari Kangasniemi. Notes on the basics of quasiregular maps between Riemannian manifolds. Preprint received via personal communication, 2020.

[13] Ib Madsen and Jørgen Tornehave. *From calculus to cohomology.* Cambridge University Press, Cambridge, 1997.

[14] Eden Prywes. A bound on the cohomology of quasiregularly elliptic manifolds. *Ann. of Math. (2)*, 189(3):863–883, 2019.

[15] Seppo Rickman. Existence of quasiregular mappings. In *Holomorphic functions and moduli, Vol. I (Berkeley, CA, 1986)*, volume 10 of *Math. Sci. Res. Inst. Publ.*, pages 179–185. Springer, New York, 1988.

[16] Seppo Rickman. *Quasiregular mappings*, volume 26 of *Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete (3) [Results in Mathematics and Related Areas (3)]*. Springer-Verlag, Berlin, 1993.

[17] Seppo Rickman. Simply connected quasiregularly elliptic 4-manifolds. *Ann. Acad. Sci. Fenn. Math.*, 31(1):97–110, 2006.

[18] Walter Rudin. *Real and complex analysis.* McGraw-Hill Book Co., New York, third edition, 1987.

[19] N. Th. Varopoulos, L. Saloff-Coste, and T. Coulhon. *Analysis and geometry on groups*, volume 100 of *Cambridge Tracts in Mathematics.* Cambridge University Press, Cambridge, 1992.

[20] Frank W. Warner. *Foundations of differentiable manifolds and Lie groups*, volume 94 of *Graduate Texts in Mathematics.* Springer-Verlag, New York-Berlin, 1983. Corrected reprint of the 1971 edition.