

Työ, mekaaninen energia, värähdysliike

Työ

Perushahmotus

Ilmiöitä, joissa havaitaan mekaanisissa ilmiöissä syntyvän lämpöä. Hierotaan käsiä vastakkain, taivutellaan rautalankaa, taotaan vasaralla rautanaulaa.

Kaikissa näissä tapahtuu siirtymä tai muodon muutos (käsien liukuminen, rautalangan taipuminen, naulan litistytminen), ja vaikuttaa voima joka vastustaa siirtymää / muodonmuutosta (kitka, tukivoimat), joka kuitenkin ei pysty palauttamaan tilannetta alkuasemaansa (kitka ei pysty liu'uttamaan käsiä, rautalanka ei oikene, naulan muoto ei palaudu).

Käsiä hankaamalla havaitaan, että lämpöä syntyy lisää koko ajan kun käsiä hierotaan, ja sitä enemmän mitä voimakkaammin käsiä painetaan yhteen, ts. mitä suurempi kitkavoima on. Tutkitaan seuraavaksi, miten kitkavoiman synnyttämä lämpömäärä riippuu voimasta ja siirtymästä.

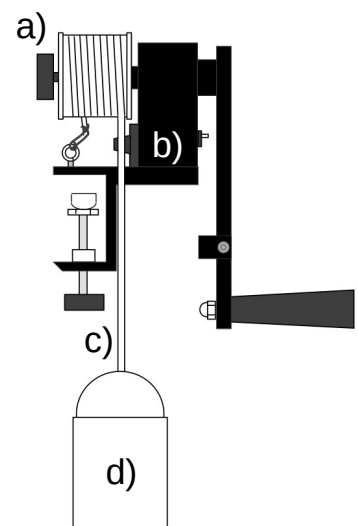
Työn kvantifiointi Joulen kokeella

Kokeessa tutkitaan kvantitatiivisesti lämpöenergian ja mekaanisen työn (energian) vastaavuutta. Tällä kurssilla Joulen kokeen rooli on mekaanisen työn kvantifiointikoe.

Käytetään laitteistoa [TD-8551A](#), jossa alumiinisylinterin ja sen ympärille kiedotun kangasnauhan välinen kitka lämmittää sylinteriä. Lämpötila mitataan sylinterin sisällä olevan NTC-vastuksen avulla. Kitkavoima on yhtä suuri kuin punnuksen paino.

Tutkitaan, miten syntyneen lämpöenergian määrä riippuu siirtymästä (eli matkasta jonka nauha liukuu sylinterin pintaa pitkin) ja kitkavoimasta.

Siirtymä: pidetään punnus vakiona. Mitataan sylinterinlämpötila. Pyöritetään sylinteriä 50 – 60 kierrosta, mitataan lämpötila 10 kierroksen välein. Havaitaan että lämpötilan muutos ja samalla syntyneen lämpöenergian määrä on verrannollinen siirtymään.



a) sylinteri jonka sisällä on lämpötila-anturi, b) laskuri, c) kangasnauha, d) punnus

Voima: pidetään siirtymä vakiona, varioidaan punnuksen painoa eli kitkavoimaa. Määritetään kuinka paljon lämpötila nousee esim. 30 kierroksella eri punnuksilla. Havaitaan että lämpötilan muutos on verrannollinen voimaan.

On siis todettu, että syntyvän lämpöenergian määrä on verrannollinen sekä voimaan että siirtymään, $Q \propto F \Delta s$. Toisaalta on luontevaa olettaa että syy (työ) on yhtä suuri kuin seuraus (syntyvän lämpöenergian määrä). Tulkitaan verrannollisuudessa $F\Delta s$ työksi. Voimalle ja matkalle on olemassa

valmiit SI-yksiköt, joten on järkevää määritellä työ ensin niiden avulla niin että määrittelylaista tulee mahdollisimman yksinkertainen, ja sen jälkeen alkaa käyttää lämpöenergialle samaa yksikköä kuin työlle.

Määritellään: mekaaninen työ on voiman aikaansaama energian muutos. Joulen kokeessa muutos tapahtuu lämpöenergiaksi, jatkossa kyse voi olla muustakin energialajista. Työn määrittelylaki

$W = F \Delta s$, $[W] = [F][s] = 1 \text{ Nm} = 1 \text{ J (joule)}$. Joulen kokeessa lämpöenergiaa syntyy yhtä paljon kuin työtä tehdään, $Q = W$. Tämä perusteella työn yksikkö on samalla (lämpö)energian yksikkö, joten tästä lähtien myös lämpöenergialle voidaan käyttää $[Q] = 1 \text{ J}$.

Kun Joulen kokeen tuloksista lasketaan sylinterin saama lämpömäärä sekä kaloreina (tähän tarvitaan edellisessä kokonaisuudessa määritettyä alumiinin ominaislämpökapasiteettia) että tehdyn työn avulla jouleina, koe ilmaisee kalorin ja Joulen suhteen.

Mekaaninen energia

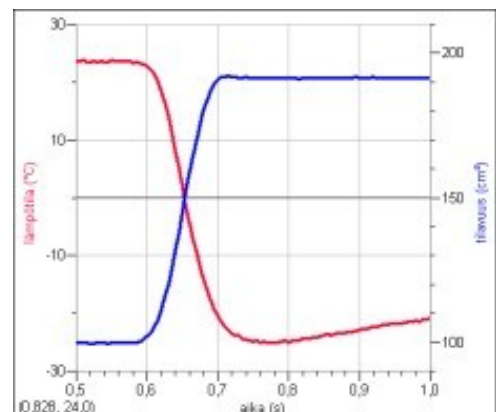
Perushahmotus

Edellä on esitelty useita mekaanisia ilmiöitä, joissa mekaanisen työn kautta syntyy lämpöä ja samalla liikettä häviää. Käänteisen ilmiön havainnollistaminen on haastavampaa. Esimerkiksi kaikissa lämpövoimakoneissa syntyy liikettä, mutta niissä lämmön häviäminen on vaikeasti osoitettavissa, koska koneessa myös tuotetaan lämpöä koko ajan.

Adiabaattisten kaasulakien tutkimukseen tarkoitettulla laitteella TD-8565 ilmiö voidaan osoittaa. Laitteessa on sylinteri, johon suljetun kaasun lämpötilaa, tilavuutta ja painetta voidaan mitata sähköisesti.



Kuva: pasco.com



Lämpötilan ja tilavuuden kuvaajat, kun mäntä päästetään irti

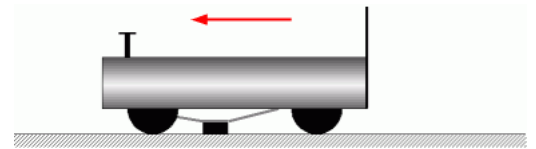
Kun mäntä painetaan alas, kaasu lämpenee mutta jäähtyy nopeasti takaisin huoneenlämpöiseksi. Kun mäntä päästetään vapaaksi, mäntä varsineen lähtee liikkeelle ja kaasu laajenee ja jäähtyy. Tällöin syntyy liikettä, ja lämpöä häviää.

Liike-energia

Kun voima kiihdyttää tai hidastaa kappaleen liikettä, voima tekee työtä ja kappaleen liikkeeseen liittyvä energia eli liike-energia kasvaa tai vähenee. Muutos on yhtä suuri kuin voiman tekemä työ. Kun tarkastellaan paikaltaan lähtevää tai pysähdyksiin jarruuntuvaa kappaletta, liike-energialle voidaan muodostaa lakiennuste (viikkotehtävä) $E_k = \frac{1}{2}mv^2$. Testataan lakiennuste.

Kun kitka jarruttaa kappaleen pysähdyksiin, kappaleen liike-energia muuttuu lämmöksi kitkavoiman tekemän työn vuoksi. Syntyvän lämpöenergian määrä on yhtä suuri kuin mekaaninen työ, eli voima kertaa matka: $W = Fs$.

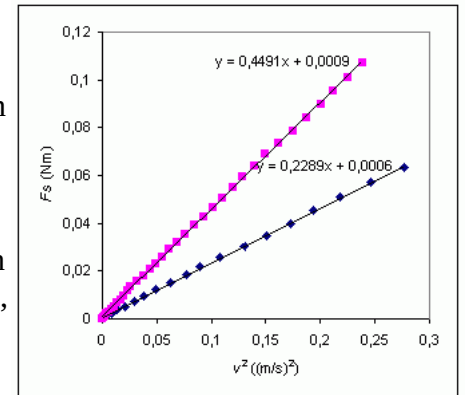
Tutkitaan jarrutusmatkaa säädettävällä jarrulla varustetun pyörävaunun avulla. Tällöin kappaleen massaa ja kitkavoimaa voidaan varioida toisistaan riippumatta.



Esikvantifioivat havainnot: kun kitkavoima pidetään vakiona, niin jarrutusmatka on sitä pitempi, mitä suurempi on vaunun alkunopeus ja massa.

Kvantifointi: rekisteröidään jarruuntuvan vaunun liikettä tietokonemittauksen avulla. Todetaan, että vaunun paikka ja nopeus eivät ole lineaarisesti riippuvia, mutta paikka ja nopeuden neliö ovat. Ilmeisesti siis kitkavoiman jarrutuksessa tekemä työ on verrannollinen alkunopeuden neliöön.

Piirretään kuvaajaksi kitkavoiman tekemä työ alkunopeuden neliön funktiona, siis (v^2, F_s) -kuvaaja. Havaitaan että pisteet asettuvat origon kautta kulkevalle suoralle. Toistetaan koetta varioiden vaunun massaa, piirretään kutakin koetta vastaavat pisteet samaan (v^2, F_s) -koordinaatistoon. Havaitaan että saadaan aina origon kautta kulkeva suora, jonka kulmakerroin riippuu vaunun massasta. Kun massa kaksikertaistetaan, kulmakerroinkin kaksinkertaistuu. (Mallikuvaajassa vaunun massat ovat 0,5 kg ja 1,0 kg.) Siis $F_s = Amv^2$, jossa A on vakio. Dimensioanalyysi kertoo että A on paljas luku: $[F_s] = \text{Nm} = \text{kgm}^2/\text{s}^2 = [mv^2]$, suoransovitus kertoo että $A \approx 0,5$. Näin on osoitettu että vaunun liike-energia ennen jarrutusta on $E_k = W = F_s = \frac{1}{2}mv^2$.



Potentiaalienergia

Painon potentiaalienergia. Ajatuskoe: nostetaan kappaletta suoraan ylöspäin tasaisella nopeudella. Nostoon käytetty voima on yhtä suuri kuin kappaleen paino mg , joten nostavan voiman tekemä työ on $F_s = mg \Delta h$. Työn vaikutuksesta ei syntynyt lämpöä, vaan energiaa siirtyi kappaleen painon potentiaalienergiaksi. Painon potentiaalienergian muutos on siis $\Delta E_p = mg \Delta h$.

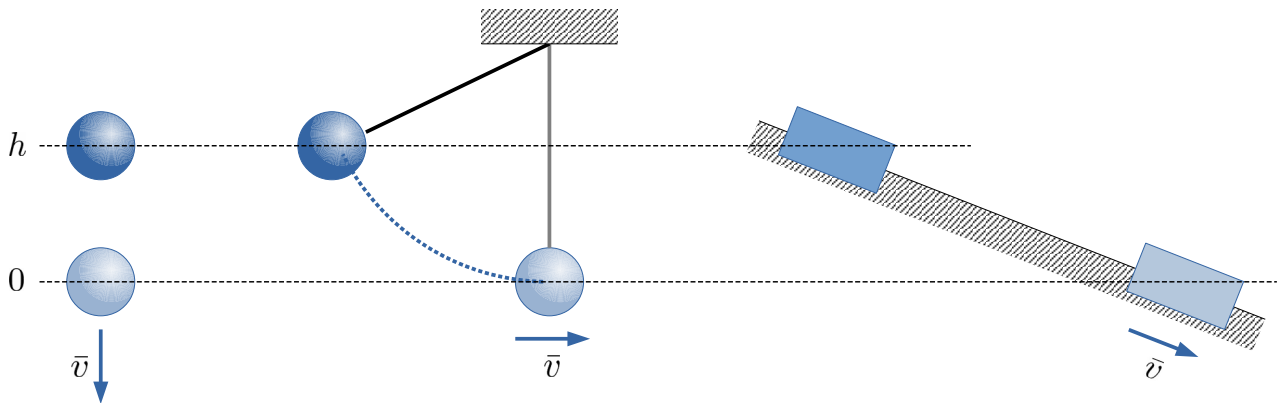
Annetaan kappaleen pudota levosta vapaasti suoraan alaspäin. Nyt gravitaatio tekee työtä kappaleeseen, kappaleen painon potentiaalienergiaa muuttuu kappaleen liike-energiaksi. Kappaleen putoama matka $\Delta h = \frac{1}{2}gt^2$. Kerrotaan yhtälö puolittain kappaleen painolla mg , jolloin vasemmalle puolelle tulee painon tekemä työ: $mg\Delta h = \frac{1}{2}mg^2t^2 \Rightarrow mg\Delta h = \frac{1}{2}mv^2$. Selvästi yhtälön oikea puoli esittää kappaleen saamaa liike-energiaa, vasen puoli on potentiaalienergian muutos.

- Potentiaalienergia pitää kytkeä aina vuorovaikutukseen. Ei siis puhuta kappaleen potentiaalienergiasta, vaan painon, jousivoiman yms. potentiaalienergiasta.
- Yleisesti, vuorovaikutuksen potentiaalienergia katsotaan nolaksi silloin kun vuorovaikutuksen voima on nolla. Tällä tavalla tarkasteluna painon potentiaalienergian nolataso on kaukana avaruudessa, ja kaikkialla muualla kappaleen painon potentiaalienergia on negatiivinen. Teoreettiset tarkastelut esim. mekaanisen energian säilymisestä on mahdollista ja loogista tehdä nollatasosta välittämättä, käyttäen potentiaalienergian *muutoksia*. Kuitenkin koulufysiikassa yleinen tapa on kiinnittää tilannekohtainen ”sopiva” potentiaalienergian nolataso. Näin voi tehdä, kun on selvää että kyseinen tason valinta ei perustu mihinkään fysikaaliseen tekijään, vaan se pelkästään (näennäisesti) helpottaa laskuja.

Osoitetaan vielä, että painon potentiaalienergian muutos riippuu vain kappaleen siirtymästä pystysuunnassa, ei kappaleen kulkemasta reitistä.

Tarkastellaan heiluria ja kallistettua ilmatyynyraata. Tutkitaan kappaleen radan alimmassa kohdassa saaman nopeuden riippuvuutta putoamiskorkeudesta. Havainto: $v^2 \propto h$, kaikissa tilanteissa sama

verrannollisuuskertoimen, ei riipu heilurin pituudesta eikä kaltevan tason kulmasta. Jos tässäkin pitää paikkansa $mg\Delta h = \frac{1}{2}mv^2$, niin pitäisi olla $v^2 = 2g\Delta h$. Todetaan tuloksista, että näin on.



Työ-käsitteen yleistyksset

Positiivinen ja negatiivinen työ. Liike-energian kvantifiointikokeessa kappaleen liike-energiaa muuntuu kitkan vaikutuksesta lämmöksi. Kappaleen kannalta kitkavoima ja siirtymä ovat eri merkkiset, joten kitkavoiman kappaleeseen tekemä työ on negatiivinen, se vähentää kappaleen liike-energiaa.

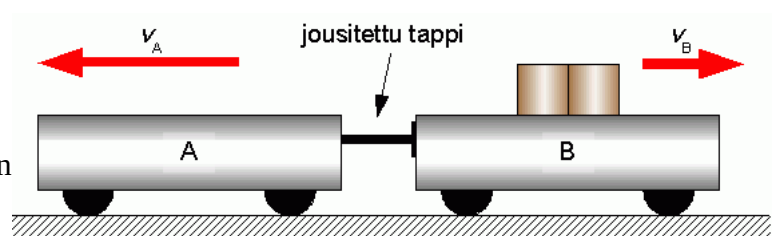
Voima voi myös kiihdyttää kappaleen liikettä, eli lisätä kappaleen liike-energiaa. Kappaleen kannalta kitkavoima ja siirtymä ovat silloin samanmerkkiset, joten voiman kappaleeseen tekemä työ on positiivinen.

Usein positiiviisesta työstä sanotaan että silloin *voima tekee työtä kappaleeseen*, mutta negatiivisen työn tapauksessa sanotaan että *kappale tekee työtä voimaa vastaan*. Tämä on epäloogista. On syytä kytkeä työ systemaattisesti aina vuorovaikutukseen (tai kun tarkastellaan mitä yhdelle kappaleelle tapahtuu, voimaan).

Muuttuvan voiman tekemä työ. Tutkitaan yleisempää tilannetta, jossa liike-energiaa muuttava voima ei ole vakio. Suureiden yleistymiskehityksen nojalla voidaan tehdä ennuste $W = \int F ds$, joka testataan kokeellisesti. Tarvitaan jokin ei-vakioinen voima, jolla ammutaan esim. ilmatyynyradan vaunua liikkeelle. Lisäksi täytyy tietää miten ko. voima käyttäytyy siirtymän funktiona, $F(s)$, jotta integraali voidaan laskea tai määrittää esim. graafisella integroinnilla. Koe voidaan tehdä yksinkertaisesti työntämällä ilmatyynyradan vaunua käsin voima-anturin välityksellä, ja rekisteröimällä samalla vaunun liikesuureita ultraäänianturilla ja vaunuun kohdistuvaa voimaa voima-anturilla.

Vuorovaikutuksen tekemä työ on vuorovaikutuksen aikaansaama kummankin osapuolen yhteenlaskettu liike-energian muutos. Tätä voi tutkia pyörävaunuradalla. Puristetaan vaunujen väliin jousi ja laukaistaan se, mitataan vaunujen nopeudet. Tehdään koesarja, jossa varioidaan vaunujen massoja.

Havaitaan että jos jousen puristus pidetään vakiona, vaunujen yhteenlaskettu liike-energia on myös vakio, massoista riippumatta. Havaitaan myös että *kevyempi osapuoli saa aina suuremman liike-energian*.



Aikaisemmin on hahmotettu vuorovaikutuksella olevan kaksi eriluonteista voimakkuutta, *voima* ja *impulssi*. Voidaan perustellusti väittää, että *työ* kuvaa myös vuorovaikutuksen voimakkuutta vielä kolmannesta näkökulmasta; työ määrittää kuinka paljon vuorovaikutuksen osapuolien liike-energia muuttuu. Työ kuitenkin eroaa oleellisesti kahdesta muusta; voima ja impulssi ovat yhtä suuret molemmille osapuolille, mutta työ on eri osapuolille eri suuri, mikäli osapuolilla on eri massat. Työ ei myöskään ole kvalitatiivisesti yhtä helposti hahmotettavissa kuin voima ja impulssi.

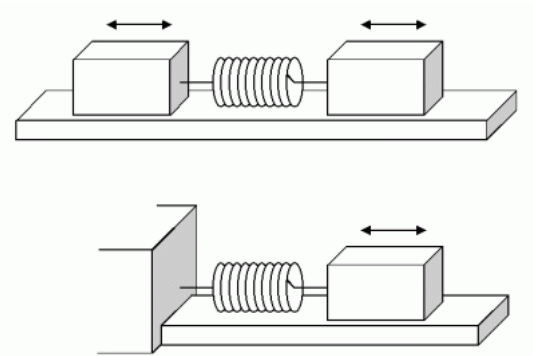
Värähdysliike

Perushahmotus

Tunnistetaan värähdysliikkeitä luonnosta ja teknologisesta ympäristöstä.

Havaitaan, että värähtelevässä systeemissä on aina vähintään kaksi osaa, joilla on hitautta ja jotka liikkuvat toistensa suhteen, sekä vuorovaikutus joka pyrkii palauttamaan osat tiettyyn tasapainoasemaan toisiinsa nähden. Usein esiintyvä "yhden kappaleen värähtelijä" on rajatapaus, jossa systeemin toisen osan hitaus on paljon suurempi, joten se ei juuri liiku.

Värähtely on siis systeemin sisäistä liikettä. Puhtaassa värähdysliikkeessä olevan systeemin massakeskipiste pysyy paikallaan.



Silmämääräisesti havaitaan että värähtelyllä on systeemistä riippuva ominaisuus, värähtelyn *taajuus*. Kuvan tilanteissa taajuus kasvaa kun osien hitautta pienennetään tai jousi vaihdetaan jäykemmäksi.

Havaitaan myös miten värähdysliikkeessä ilmenevät energian perushahmot, säilyminen ja muuntuminen. Värähtely ilmiönä jatkuu, eli jotain säilyy. Kuitenkin tämä "jotain" eli värähtelyn mekaaninen kokonaisenergia muuntuu jatkuvasti liike-energiasta potentiaalienergiaksi ja takaisin.

Vaimeneminen: tunnistetaan esimerkkejä nopeasti ja hitaasti vaimenevista värähtelyistä. Havaitaan että vaimenemiseen liittyy aina värähdysliikettä vastustava vuorovaikutus, joka vähentää värähtelyn mekaanista energiaa. Värähtelevän systeemin kannalta vaimentava voima tekee negatiivista työtä. Voiman suunta voi käantäyä niin että se vaikuttaa aina liikettä vastaan (esim. kitka), tai voima voi vaihdella suuruudeltaan niin että se on liikettä vastaan vaikuttaessaan suurempi kuin liikkeen suuntaisena. Idealisointi: jos mitään vaimennusta ei ole, värähtely jatkuu samanlaisena.

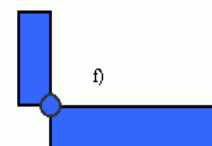
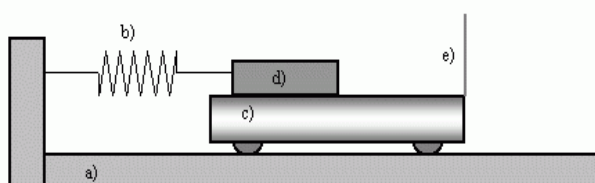
Voimistaminen ja ylläpitäminen: voimistetaan värähtelyä tai ainakin estetään sitä vaimenemasta tuomalla värähtelyyn lisää mekaanista energiaa. Esimerkkejä (annetaan keinulle vauhtia, hangataan viulun kieltä jousella...) Värähtelevän systeemin kannalta voima tekee nyt positiivista työtä. Esimerkiksi annettaessa vauhtia keinulle, sitä työnnetään liikkeen suuntaan.

Huomattavaa: gravitaatio tai muu suunnaltaan ja voimakkuudeltaan samanlaisena pysyvä vuorovaikutus ei voi olla vaimentava, voimistava tai ylläpitävä! Gravitaatio on konservatiivinen vuorovaikutus, eli yhden värähdyskerran aikana gravitaation systeemiin tekemä kokonaistyö on nolla.

Gravitaatio ei myöskään yksinään voi olla tasapainoon palauttava vuorovaikutus. Gravitaation ja jonkun toisen vuorovaikutuksen (langan jännitysvoima, jousivoima...) summa sen sijaan voi.

Liikesuureet, lait ja energia

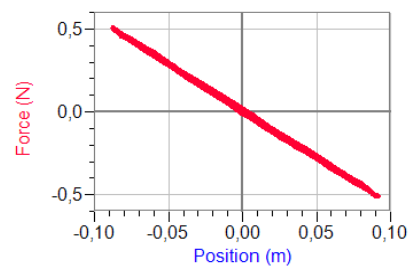
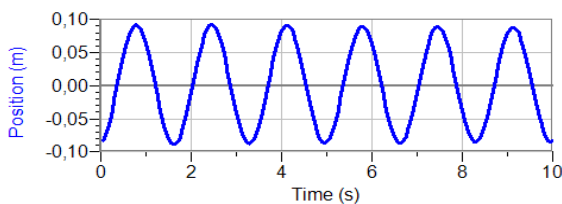
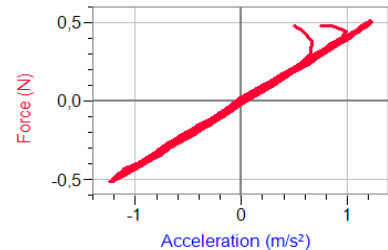
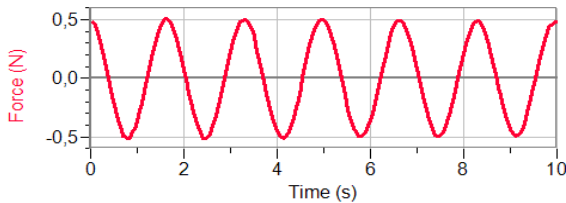
Värähtelyä ja värähtelevää systeemiä kuvaavia suureita ovat *paikka ajan funktiona*, *jaksonaika*, *taajuus*, *amplitudi*, *tasapainoasema* ja *tasapainoasemaan palauttava voima*, sekä värähtelyn *energia*. Näitä voi havainnollistaa esimerkiksi pyörävaunun radalla kuvan mukaisella tietokoneavusteista mittausta käyttävällä koejärjestelyllä. Koe voidaan tehdä myös ilmatyynyradalla. Tavallista voima-anturia ei voi laittaa ilmatyynyradan vaunun kyytiin, koska anturin johto vääntää vaunua. On käytettävä langatonta Bluetooth-tekniikkaa hyödyntävää voima-anturia, tai laitettava anturi statiiviin.



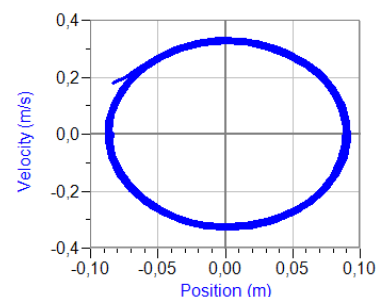
a) rata, b) jousi, c) vaunu, d) voima-anturi, e) heijastinlevy, f) ultraäänianturi

Mittaustuloksista havaitaan, että

- Paikan, nopeuden, kiihtyvyyden ja voiman kuvaajat ovat kaikki sinimuotoisia, ja niillä on sama jaksonaika. Voima ja kiihtyvyys ovat samassa vaiheessa, voima ja paikka ovat vastakkaisessa vaiheessa. Nopeuden vaihe eroaa kaikista muista $\frac{1}{4}$ jakson verran.
- Vaunun liike noudattaa dynamiikan peruslakia.
- Tasapainoasemaan palauttava voima noudattaa (tässä koetilanteessa) lineaarista jousivoiman lakia. Tällaista värähtelijää kutsutaan harmoniseksi värähtelijäksi.

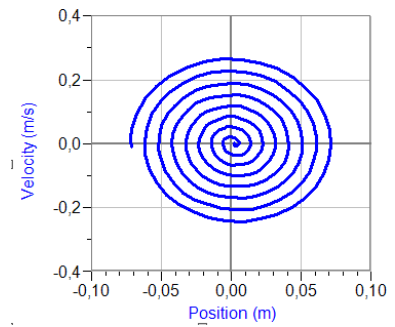


Tarkastelemalla (x,v) -kuvaajaa havaitaan, että vaunulla on suurin nopeus radan tasapainokohdassa jossa jousen venymä $x = 0$, ja vastaavasti $v = 0$ radan ääripäissä joissa venymä on suurin. Vaimenemattomalla värähtelyllä (x,v) -kuvaaja on ellipsi, jonka yhtälö on $Ax^2 + Bv^2 = C$. Koska jousivoiman potentiaalienergia on verrannollinen x^2 :een ja vaunun liike-energia on verrannollinen v^2 :een, yhtälö voidaan tulkita niin että värähtelijässä näiden energioiden summa säilyy.



Vaimenevassa värähtelyssä mekaaninen energia ei säily, ja (x,v) -kuvaaja on spiraali.

Voidaan myös laittaa mittausohjelma laskemaan liike-energia ja potentiaalienergia ajan funktiona, ja piirtää kuvaajat $E_k(t)$, $E_p(t)$ ja $E_k(t) + E_p(t)$.



Ominaisvärähtelyt

Kvalitatiivisesti: havaitaan että värähtelevillä systeemeillä on yksi tai useampi niille ominainen taajuus. Yksinkertaisella värähtelijällä (kaksi kappaletta, yksi vuorovaikutus) ominaisvärähtelyitä on vain yksi. monimutkaisemmilla systeemeillä niitä on useampia.

Kvantitatiivisesti ominaisvärähtelyjä voidaan tutkia ilmatyyny- tai vaunuradalla. Useamman kappaleen värähtelijästä voidaan määrittää ominaistaajuuksia analysoimalla joko yhden vaunun paikkadataa tai jousen kiinnityspisteeseen kohdistuvaa voimaa Fourier-analyysin (FFT) avulla.

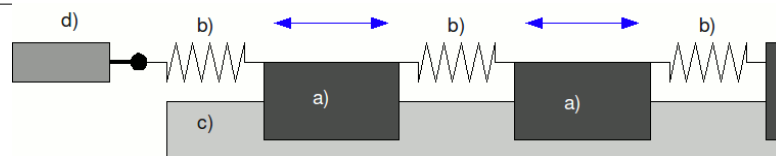
Fourier-muunnos (FFT, Fast Fourier Transform) laskee ajan funktiona rekisteröidyn signaalin taajuuskomponentit, joiden amplitudit muodostavat signaalin taajuusspektrin.

Rekisteröintiin käytetyn näytteenottotaajuuden pitää olla vähintään kaksi kertaa suurin signaalin sisältämä taajuus (Nyquistin ehto), muuten laskettu spektri vääristyy. FFT ei varoita tästä mitenkään, vaan ehdon toteutumista täytyy itse valvoa.

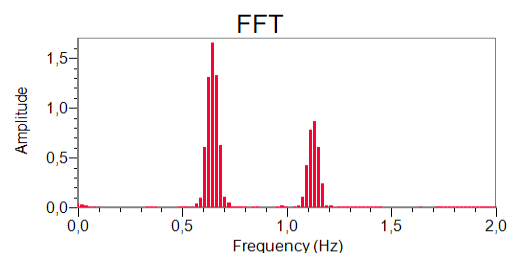
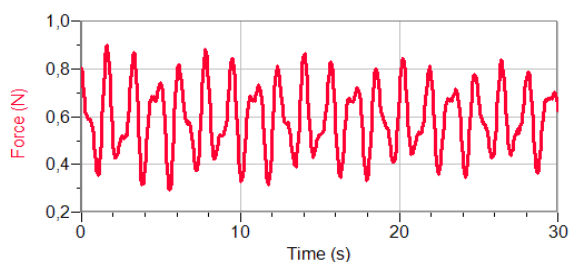
- *FFT:n taajuusaluetta kasvatetaan lisäämällä näytteenottotaajuutta.*

Signaalista otetun näytteen pituus T määrää spektrin resoluution Δf (kuvaajissa tolpan leveys). Ideaalitapauksessa $\Delta f = 1/T$, käytännössä FFT-algoritmista johtuen $1/T \leq \Delta f < 2/T$.

- *FFT:n tarkkuutta kasvatetaan pidentämällä näytettä.*



a) vaunut, b) jouset, c) rata, d) voima-anturi



Kun systeemi laitetaan värähtelemään millä tahansa tavalla, FFT:llä havaitaan että värähtely sisältää aina pelkästään ominaistaajuuksia. Näin ollen systeemin satunnaiseltakin näyttävä värähtely on

ominaisvärähtelyjen summa.