

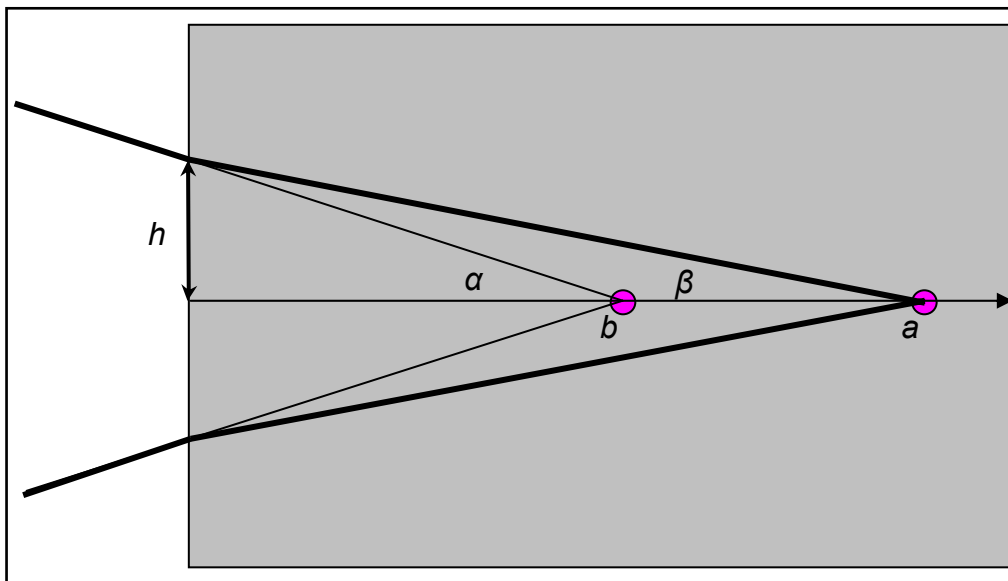
Kivi vedessä.

Missä kivi näyttää olevan eri suunnista katsottuna, kun se on pohjassa syvyydellä a ?

Keskustelu tästä ongelmasta lähti liikkeelle dfcl -keskustelulistalla lokakuussa 2003 akvaariohavaintojen pohdiskelusta. Sen tähden tähän liittyvissä kuvissa veden pinta on pystysuorassa. Katseltaessa kaloja akvaariossa ilmiö näkyikin varsin selvästi, koska kalat liikkuvat ja itsekin voi liikkua. Kohteet näkyvät lähempänä pintaa, ja katsojan siirtyessä sivulle ne tulevat yhä lähemmäs pintaa mutta siirtyvät myös vähän pinnan suuntaisesti katsojan perässä.

Minulla oli asiasta alun perin väärä ennakkokäsitys. Ymmärsin kyllä, että kivi siirtyy myös sivusuunnassa, mutta kuvittelin, että se silloin etäänny katsojasta. Tämä näkyy myös Galilei 5:n kuvasta s. 76. Vastaani ei tosin ole osunut yhtään oikein piirrettyä oppikirjan kuvaa tästä aiheesta. Asia tuli uudelleen ajankohtaiseksi huomattuani TKK:n valintakokeiden tehtävän 5/2004 (ks. <http://www.dia.fi/materiaalia.html>), jonka mallivastaus oli väärä ja laskennallinen käsittely periaatteessakin virheellinen. (Oikea käsittely kyllä ylittää huomattavasti normaalin abiturienttien mahdollisuudet, kuten seuraava tarkastelu osoittanee.) Vastauksen laatija ei ollut ymmärtänyt, että tämä on kuvanmuodostusongelma. Kivi on todellinen esine, ja katsoja näkee sen valekuvan. Kiven, tai valintakoetehtävän avaimien, paikan määrittämiseksi on tarkasteltava kivistä lähtevän kapean sädekimppun käyttäytymistä.

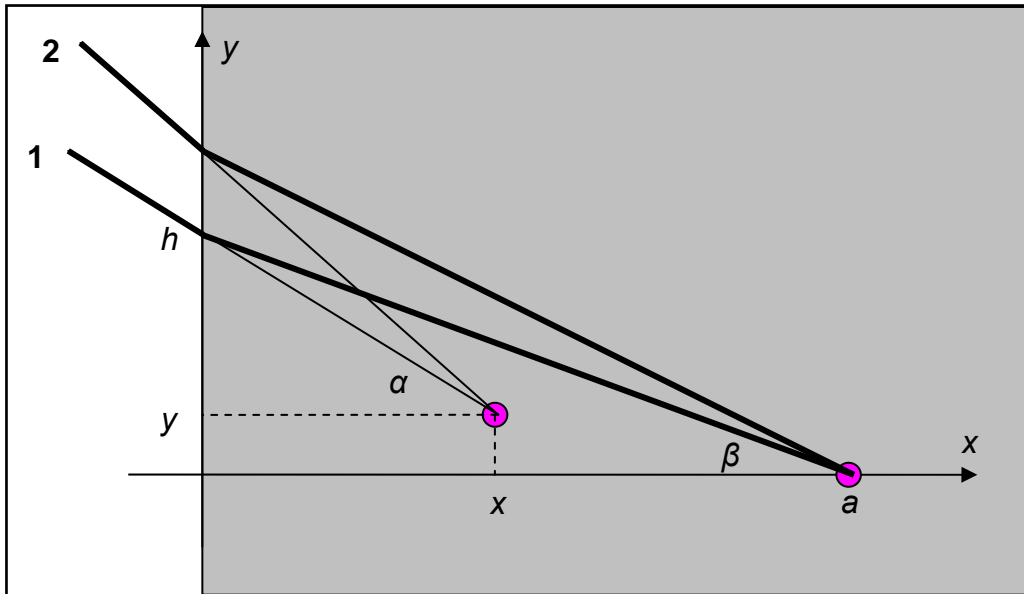
Katsottaessa kohtisuoraan pintaa vastaan tehtävä on laskennallisesti kohtalaisen helppo ja varmaankin mahdollinen lukiossakin, ainakin, jos kuvanmuodostus peileissä ja linseissä on tarkasteltu vastaavalla tavalla.



Syvyydellä a oleva kivi näyttää suoraan katsottaessa olevan syvyydellä b kohdassa, josta siitä lähtenyt ja pinnassa vähän lisää hajaantunut kapea sädekimppu näyttää tulevan. Suorakulmaisten kolmioiden yhteisen kateetin pituudesta saadaan yksinkertainen yhtälö, josta valekuvan paikka ratkeaa.

$$h = a \tan \alpha = b \tan \beta \quad \Rightarrow \quad b = \frac{\tan \alpha}{\tan \beta} \xrightarrow{\alpha, \beta \rightarrow 0} \frac{\sin \alpha}{\sin \beta} a = \frac{a}{n}.$$

Vinosti katsottaessa laskenta tulee hankalammaksi. Tarkastellaan kahta kivistä lähtevää ja pinnassa taittuvaa hyvin lähekkäistä sädetä **1** ja **2**. Säteet muodostavat vedessä ja ilmassa pinnan normaalin kanssa kulmat α_1 ja $\alpha_2 = \alpha_1 + d\alpha$ sekä β_1 ja $\beta_2 = \beta_1 + d\beta$ ja kohtaavat pinnan y -akselin pisteissä h_1 ja $h_2 = h_1 + dh$. Kiven valekuva on kuvan mukaisen xy -koordinaatiston pisteessä (x, y) , jossa näiden säteiden jatkeet pinnan alla leikkaavat.



Kuvan geometrian perusteella leikkauspisteen koordinaatit saadaan yhtälöistä

$$y = h_1 - \tan \alpha_1 \cdot x, \quad y = h_2 - \tan \alpha_2 \cdot x,$$

joista voidaan ratkaista suoraviivaiset välivaiheet sivuuttaen

$$x = \frac{h_2 - h_1}{\tan \alpha_2 - \tan \alpha_1} = \frac{dh}{d(\tan \alpha)} = \cos^2 \alpha \cdot \frac{dh}{d\alpha}$$

$$y = \frac{h_1 \tan \alpha_2 - h_2 \tan \alpha_1}{\tan \alpha_2 - \tan \alpha_1} = h - \sin \alpha \cos \alpha \cdot \frac{dh}{d\alpha}$$

Yhtälöstä $h = a \tan \beta$ ja Snelliuksen laista $\sin \alpha = n \sin \beta$ saadaan derivoimalla

$$\frac{dh}{d\beta} = \frac{a}{\cos^2 \beta}; \quad \cos \alpha = n \cos \beta \cdot \frac{d\beta}{d\alpha} \Rightarrow \frac{dh}{d\alpha} = \frac{dh}{d\beta} \cdot \frac{d\beta}{d\alpha} = \frac{a \cos \alpha}{n \cos^3 \beta}$$

Kuvapisteen suhteellisille koordinaateille saadaan näin lausekkeet

$$\frac{x}{a} = \frac{1}{n} \cdot \left(\frac{\cos \alpha}{\cos \beta} \right)^3$$

$$\frac{y}{a} = \tan \beta - \frac{\sin \beta \cos^2 \alpha}{\cos^3 \beta} = \tan \beta \left(1 - \frac{\cos^2 \alpha}{\cos^2 \beta} \right) = (n^2 - 1) \tan^3 \beta$$

Erilaisia esitysmuotoja tietysti saadaan riippuen siitä, miten Snelliuksen lakia käytetään hyväksi. Nämä eivät erityisemmin houkuttele kirjoittamaan suljetussa muodossa lausekkeita $x(\alpha; n)$ ja $y(\alpha; n)$, mutta numeeriseen laskentaan ne kelpaavat hyvin. Ohessa on Excelillä laskettu taulukko.

Tarkistukseksi voidaan todeta, että kohtisuoraan katsottaessa, $\alpha = \beta = 0$, näistä saadaan $y = 0$, $x = a/n$, kuten alussa erikseen osoitettiin. Taitekertoimen arvolla $n = 1$, jolloin rajapintaa ei ole, on $x = a$, $y = 0$, kulmasta riippumatta. Pinnan suunnassa katsomisen raja $\alpha = 90^\circ$, $\sin \alpha = 1$, $\sin \beta = 1/n$, on (akateemisesti)

mielenkiintoinen. Lausekkeista saadaan tällä rajalla tulos $x = 0$, $y = a/\sqrt{n^2 - 1}$, joka vaikuttaa erikoiselta varsinkin tarkasteltaessa tilannetta $n \rightarrow 1$. Funktioiden $x(\alpha; n)$ ja $y(\alpha; n)$ käyttäytyminen pinnan suuntaisen katsomisen rajalla tulee singulaarisiksi kun $n \rightarrow 1$, mikä ei lopulta tunnu kovinkaan kummalliselta, kun ajattelee, mitä tämän tilanteen fysikaalinen todentaminen merkitsee.

1 m:n syvyydellä olevan kappaleen näennäinen paikka, syvyys x, poikkeama y

$\alpha/1^\circ$	$\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$\sin\beta$	$\cos\beta$	x/m	y/m	n
0	0	1	0,0000	1	0,7519	0,0000	1,33
2	0,0349	0,9994	0,0262	0,9997	0,7513	0,0000	
4	0,0698	0,9976	0,0524	0,9986	0,7495	0,0001	
6	0,1045	0,9945	0,0786	0,9969	0,7465	0,0004	
8	0,1392	0,9903	0,1046	0,9945	0,7423	0,0009	
10	0,1736	0,9848	0,1306	0,9914	0,7369	0,0018	
12	0,2079	0,9781	0,1563	0,9877	0,7303	0,0030	
14	0,2419	0,9703	0,1819	0,9833	0,7224	0,0049	
16	0,2756	0,9613	0,2072	0,9783	0,7133	0,0073	
18	0,3090	0,9511	0,2323	0,9726	0,7029	0,0105	
20	0,3420	0,9397	0,2572	0,9664	0,6913	0,0145	
22	0,3746	0,9272	0,2817	0,9595	0,6784	0,0194	
24	0,4067	0,9135	0,3058	0,9521	0,6642	0,0255	
26	0,4384	0,8988	0,3296	0,9441	0,6487	0,0327	
28	0,4695	0,8829	0,3530	0,9356	0,6319	0,0413	
30	0,5000	0,8660	0,3759	0,9266	0,6138	0,0513	
32	0,5299	0,8480	0,3984	0,9172	0,5943	0,0630	
34	0,5592	0,8290	0,4204	0,9073	0,5736	0,0765	
36	0,5878	0,8090	0,4419	0,8970	0,5515	0,0919	
38	0,6157	0,7880	0,4629	0,8864	0,5283	0,1095	
40	0,6428	0,7660	0,4833	0,8755	0,5037	0,1294	
42	0,6691	0,7431	0,5031	0,8642	0,4781	0,1517	
44	0,6947	0,7193	0,5223	0,8528	0,4513	0,1767	
46	0,7193	0,6947	0,5409	0,8411	0,4235	0,2044	
48	0,7431	0,6691	0,5588	0,8293	0,3949	0,2352	
50	0,7660	0,6428	0,5760	0,8175	0,3655	0,2689	
52	0,7880	0,6157	0,5925	0,8056	0,3356	0,3059	
54	0,8090	0,5878	0,6083	0,7937	0,3054	0,3461	
56	0,8290	0,5592	0,6233	0,7820	0,2750	0,3895	
58	0,8480	0,5299	0,6376	0,7703	0,2448	0,4360	
60	0,8660	0,5000	0,6511	0,7590	0,2150	0,4856	
62	0,8829	0,4695	0,6639	0,7478	0,1860	0,5379	
64	0,8988	0,4384	0,6758	0,7371	0,1582	0,5925	
66	0,9135	0,4067	0,6869	0,7268	0,1318	0,6491	
68	0,9272	0,3746	0,6971	0,7169	0,1073	0,7069	
70	0,9397	0,3420	0,7065	0,7077	0,0849	0,7652	
72	0,9511	0,3090	0,7151	0,6990	0,0650	0,8230	
74	0,9613	0,2756	0,7228	0,6911	0,0477	0,8794	
76	0,9703	0,2419	0,7295	0,6839	0,0333	0,9332	
78	0,9781	0,2079	0,7354	0,6776	0,0217	0,9832	
80	0,9848	0,1736	0,7405	0,6721	0,0130	1,0282	
82	0,9903	0,1392	0,7446	0,6676	0,0068	1,0669	
84	0,9945	0,1045	0,7478	0,6640	0,0029	1,0983	
86	0,9976	0,0698	0,7500	0,6614	0,0009	1,1214	
88	0,9994	0,0349	0,7514	0,6598	0,0001	1,1356	
90	1,0000	0,0000	0,7519	0,6593	0,0000	1,1404	