

Erään esimerkin tarina

Pekka Pankka

23. huhtikuuta 2015

Yleensä katsotaan, että teorian motivoimiseksi tulisi olla joitakin epätriviaaleja esimerkkejä. Joskus epätriviaalit esimerkit paljastuvat juurikin nimensä veroisiksi.

Tasosta avaruuteen

Jussi Väisälä kirjoitti vuoden 1968 Arkhimedeksen numerossa 2 otsikolla “Onko n -ulotteista funktioteoriaa olemassa?” kvasikonformigeometrian tutkimuksesta korkeampiulotteisissa eukliidisissa avaruuksissa ([16]). Hieman aikaisemmin Gehring ([2]), Mostow ([10]) ja Väisälä ([3]) olivat ottaneet ensimmäiset askeleet teorian kehittämisessä. Reshetnyak puolestaan tutki systemaattisesti rajoitetun vääristymän kuvauksia, jotka eivät olleet homeomorfismeja, ja julkaisi sarjan artikkeleita niiden perustuloksista ([11]). Reshetnyakin tutkimaa kuvausluokkaa ryhdyttiin myöhemmin kutsumaan kvasisäännöllisiksi kuvauksiksi. Väisälä päättääkin Arkhimedes-artikkelinsa positiiviseen toteamukseen, että n -ulotteinen funktioteoria selvästi on olemassa. Kuin vahvistuksena tälle toteamukselle Olli Martio, Seppo Rickman ja Jussi Väisälä julkaisivat pian tämän jälkeen kolmen artikkelin sarjan ([7, 8, 9]) kvasisäännöllisten kuvausten geometrisesta teoriasta vuosina 1969-1971.

Heuristisesti kvasisäännöllinen kuvaus on analyyttisen kuvauksen vastine korkeampiulotteisissa avaruuksissa. Kompleksianalyysin perushuomioita on fakta, että kompleksisesti derivoituva kuvaus on konforminen eli kulmat säilyttävä. Tason alueiden konformikuvauksen joustavuuteen turtuu yleensä kovin nopeasti ja niiden teorian ottaa itsestään selvyytenä. Liouvillen lause palauttaakin

tällöin maanpinnalle: *suunnistuksen säilyttävä konformikuvaus*¹ $\Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ eukliidisen avaruuden $\mathbb{R}^n$ ($n \geq 3$) alueelta (eli avoimelta yhtenäiseltä osajoukolta) Ω on Möbius-kuvaus eli muotoa $x \mapsto \lambda Ax + v_0$, missä $v_0 \in \mathbb{R}^n$, $\lambda \in \mathbb{R}$ ja $A \in \text{SO}(\mathbb{R}^n)$ eli orthogonaalinen lineaarikuvaus.

Liouvillen lause paljastaa, että korkeampiulotteisissa eukliidisissa avaruuksissa ei voi odottaa tason kaltaista rikasta teoriaa ilman, että konformisuudesta luovutaan. Kvasikonformisuus onkin, jo nimensä puolesta, konformisuuden heikennys, jossa ei vaadita kulmien säilymistä vaan sallitaan kulmien rajattu muuttuminen. Tämä heuristinen periaate voidaan formalisoida määrittelemällä, että kuvaus $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ on *kvasisäännöllinen*, jos on olemassa vakio $K \geq 1$, jolle pätee

$$\|Df(x)\|^n \leq K \det(Df(x)) \quad (1)$$

melkein kaikkialla alueessa Ω . Määritelmässä siis verrataan kuvauksen f venytystä, jota kuvastaa operaattorinormi $\|Df(x)\|$, pisteessä $x \in \Omega$ kuvauksen antamaan tilavuuden muutokseen, jota puolestaan kuvastaa Jakobin determinantti $\det(Df(x))$. Suunnistuksen säilyttävä konformikuvaus toteuttaa ehdon $\|Df(x)\|^n = \det(Df(x))$ melkein kaikkialla ja epäyhtälö (1) kertoo, kuinka konformisuuden vaatimusta on tarkalleen ottaen heikennetty.

Teorian mielekkyyden kannalta kuvaukselle f tulee lisäksi asettaa joitakin säännöllisyysvaatimuksia. Luonnollisin oletus on sopiva Sobolev-säännöllisyys, jotta Df voidaan ymmärtää heikkona derivaattana ja että kuvauksen Jakobin determinantti $\det Df$ on integroitava.

¹Sivutetaan tarvittavat säännöllisyysoletukset.

Ehtoa (1) kutsutaan *kvasikonformisuusehdoksi* ja kvasisäännöllisiä homeomorfismeja *kvasikonformikuvausiksi*.

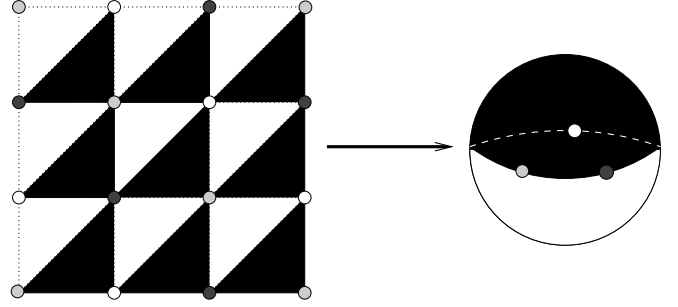
Kvasisäännöllisten kuvausten teorian perustulos on Reshetnyakin lause: *kvasisäännöllinen kuvaus on joko vakio tai diskreetti ja avoin*², eli haarautuva peitekuvaus. Kvasisäännölliset kuvaukset ovat siis topologisilta ominaisuuksiltaan tason analyttisten kuvausten kaltaisia.

On itseasiassa suhteellisen helppoa löytää kvasisäännöllisiä kuvauksia. Suljettujen Riemannin monistojen diffeomorfismit ovat kvasikonformisia, joten peitekuvausten avulla saadaan paljon esimerkkejä. Koska bilipschitz-kuvaukset ovat kvasikonformisia, on paloittain lineaarinen topologia pullollaan kuvauksia kolmioitujen monistojen välillä, jotka ovat kvasisäännöllisiä, kunhan avaruuksiin valitaan sopivat Riemannin metriikat. Näin ollen kysymys pikemminkin on, millaisia ovat sellaiset kvasisäännölliset kuvaukset, joiden tutkimista ei voi palauttaa muihin teorioihin.

Väisälän vuoden 1968 Arkhimedes-artikkeli asettaa yhdeksi tavoitteeksi Picardin lauseen vastineen korkeammissa ulottuvuuksissa. Tason Picardin lausehan on yksi klassisen kompleksianalyysin perustuloksista: *analyttinen kuvaus $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, joka jättää saavuttamatta kaksi pistettä, on vakio*. Tunnetusti klassinen Picardin lause on tarkka: kompleksinen eksponenttikuvaus $\exp: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ jättää saavuttamatta origon eli yhden pisteen.

Zorich antoi 1967 esimerkin kvasisäännöllisestä kuvauksesta $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, joka jättää saavuttamatta origon ([17]). Zorichin kuvaus on tason eksponenttikuvauksen vastine. Konstruktio ei ole monimutkainen ja sen voi hahmotella seuraavasti. Olkoon $A: \mathbb{R}^{n-1} \rightarrow \mathbb{S}^{n-1}$ kuvaus, joka on hahmoteltu kuvasa 1 (tapauksessa $n = 3$), ja olkoon $Z: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ kuvaus $(x, t) \mapsto e^t A(x)$. Nyt Z kuvaa jokaisen suoran $\{x\} \times \mathbb{R}$ ($x \in \mathbb{R}^{n-1}$) origosta lähteväksi puolisuoraksi ja jokaisen (hyper)tason $\mathbb{R}^{n-1} \times \{t\}$ e^t -säteiseksi

pallokuoreksi. Kuvaus Z on kvasisäännöllinen, jos A kuvaa jokaisen tason $\mathbb{R}^2$ kolmioinnissa käytetyn kolmion puolipalloksi samalla bilipschitz-vakiolla.



Kuva 1: Alexander-kuvaus

Zorichin kuvausta pidettiin pitkään optimaalisena konstruktiona saavuttamattomien pisteiden suhteen. Kvasisäännöllisten kuvausten ominaisuuksista päätyy helposti lopputulemaan, että mikäli olisi olemassa kvasisäännöllinen kuvaus $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, joka jättäisi saavuttamatta useamman kuin yhden pisteen, olisi kuvauksen oltava huomattavan monimutkainen, ja siten liian monimutkainen ollakseen olemassa.

Picardin lauseen kvasisäännöllisille kuvauksille todisti Rickman 1980.

Lause (Rickmanin Picardin lause [12]). *Olkoot $n \geq 3$ ja $K \geq 1$. Tällöin on olemassa sellainen luku $q_0 = q_0(n, K) \geq 1$, että kvasisäännöllinen kuvaus $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, joka toteuttaa epäyhtälön vakiolla K , jättää saavuttamatta korkeintaan q_0 pistettä.*

Picardin lausetta voi pitää ensiaskeleena kohti kvasisäännöllisten kuvausten arvojen jakautumisteoriaa; Rickman todistikin Ahlforsin defekti-relaation kvasisäännöllisille kuvauksille pian tämän jälkeen ([13]). Toisin kuin klassinen Picardin lause, Rickmanin Picardin lause jättää auki mahdollisuuden, että kvasisäännöllinen kuvaus voisi jättää saavuttamatta useampia arvoja. Vastoin odotuksia näin todellakin voi käydä!

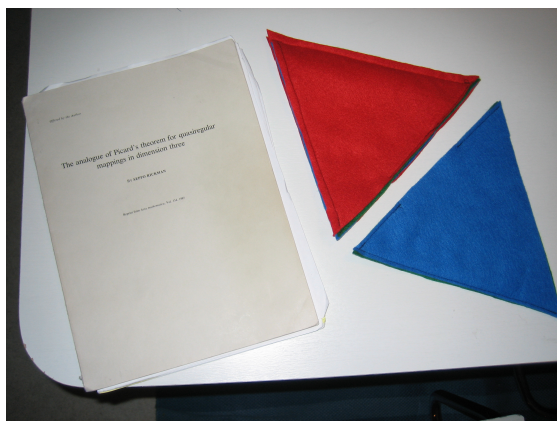
Lause (Rickmanin Picard-konstruktio [14]). *Olkoon $q \in \mathbb{N}$ ja olkoot $y_1, \dots, y_q \in \mathbb{R}^3$ erillisiä pisteitä. Tällöin on olemassa kvasisäännöllinen kuvaus*

²Kuvaus on avoin, jos jokaisen avoimen joukon kuva on avoin. Vastaavasti kuvaus on diskreetti, jos jokaisen kuvapisteen alkukuva on diskreetti joukko.

$f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, joka jättää saavuttamatta täsmälleen pisteet $y_1, \dots, y_q$, eli $\mathbb{R}^3 \setminus f\mathbb{R}^3 = \{y_1, \dots, y_q\}$.

Kaksi vuosikymmentä myöhemmin

Rickmanin konstruktio oli saavuttanut jo lähes myyttisen maineen aloittaessani jatko-opinnot 2000-luvun alussa. Lukemaanhan tämä tietysti houkutteli ja sainkin Rickmanilta kopion artikkelista.



Kuva 2: Rickmanin artikkeli ja kolmioita luvusta 7.

Artikkelia tankattuani selveni, mistä konstruktio oli maineensa saanut. Luin paperia säännöllisesti noin puolisen vuotta. Päästyäni noin puoleen väliin, missä kaksiulotteinen deformaatioteoria alkaa, tajusin, että en ollut oikeastaan ymmärtänyt mitään siihen asti lukemastani. Preliminääreistä selvisin, mutta en ollut ymmärtänyt, mitä luvussa kolme käsitelystä kolmion trianguloinnista oikeastaan seuraa. Jotta en olisi masentunut täysin, lopetin lukemisen siihen ja palasin takaisin oikeisiin töihin väitöskirjakysymysten pariin. David (Drasin) kertoi minulle vuosia myöhemmin, että hänen mielestään konstruktiossa käytetyt tekniikat ovat niin elementaareja, että valistunut lukiolainen pystyisi lukemaan paperin. En ollut ihan samaa mieltä.³

Rickmanin paperi todellakin on kaikinpuolin vaikea. Kaksiulotteisen teorian näkökulmasta lause

³David tosin jatkoi, että elementaari ei ole aina synonyymi helpolle.

itsessään on yllättävä. Todistus puolestaan on pitkä konstruktio. Toisin kuin dimensiassa kaksi, ei kolmessa ulottuvuudessa ole yleistä eksistenssiteoriaa. Kaikki pitää siis tehdä käsin ja tästä muodostuu suurin esitystekninen ongelma: kolmiulotteiset konstruktiot tulee kuvailla sanallisesti hyödyntäen mahdollisesti joitakin kaksiulotteisia havainnekuvia. Lukijan tulisi siis oikeastaan olla jo valmiiksi sopivalta aaltopituudella ymmärtääkseen kuvailun, mutta konstruktio on jotain sellaista, mihin ei monikaan ole aikaisemmin törmännyt.

Esityksessä on toinenkin mielenkiintoinen piirre. Artikkelit etenee lineaarisesti, mutta käsittely on lokaalia. Konstruktion esitys toki rakentuu jo esitelyjen vaiheiden päälle, mutta eri vaiheet ovat lähes riippumattomia toisistaan, joten on luonnollista esitellä menetelmät lokaaleina konstruktiona. Näin ollen kokonaiskuvan muodostaminen kuvauksesta on loppujen lopuksi aika hankalaa. Kokonaisuus on kuin kolmen kohdan sykli, jonka yhtäkään vaihetta ei voi motivoida ilman muita.

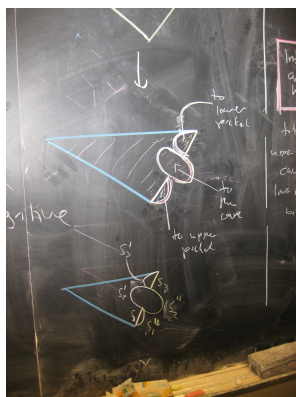
Picardia Purduessa

Jatko-opintoni veivät minut tutkimaan kvasisäännöllisten kuvausten topologiaa obstruktioita. Väitöskirjan edetessä tuli yhä selvemmäksi, että jossain vaiheessa pitää Rickmanin konstruktioon tarttua uudestaan. Kvasisäännöllisten kuvausten teoriassa on loppujen lopuksi aika vähän todella epätriviaaleja esimerkkejä. Hieman dramatisoiden voisi sanoa, että niistä suurin osa on Rickmanin käsialaa ja niistä monet perustuvat Picard-esimerkin metodeihin (kuten esimerkit [4, 5] Juha Heinosen kanssa). Rickmanin esimerkeistä viimeisin [15] kvasisäännöllisestä kuvauksesta $\mathbb{R}^4 \rightarrow \#^2(\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^2)$ on tässä suhteessa piristävä poikkeus, vaikka sitäkään voi löytää mielenkiintoisia yhtymäkohtia Picard-konstruktioon. Esimerkeistä päättelin, että Rickmanin konstruktio tulisi hallita, jos aikoo kuvauksia rakennella.

Tutustuin David Drasiniin paremmin lukuvuonna 2005–2006. David oli Helsingissä viettämässä sapaattivuotta tarkoituksenaan keskustella Rickmanin

kanssa Picard-konstruktioista. Olimme tavanneet Davidin kanssa jo paria vuotta aikaisemmin ja tiesin, että David oli tunnustettu Rickman-konstruktio asiantuntija. Olin itse syksyn 2005 poissa ja lähdyssä keväällä ulkomaille, mutta ehdimme Davidin kanssa tavata muutaman kerran väitöskirjapapereideni tiimoilta. Kerroin Davidille olevani kiinnostunut Rickman-konstruktioista, mutta kumpikaan ei tarttunut asiaan sen kummemmin. Tapasin Davidin uudelleen syksyllä 2007 Juha Heinosen muistotilaisuudessa ja kerroin Davidille haluavani ymmärtää konstruktion. Olin itse Michiganissa, joten oli helppo sopia vierailu seuraavalle keväälle. En tiedä mitä David asiasta ajatteli, mutta oli valmis ottamaan yhden klopun viikoksi vieraakseen paperia lukemaan.

Viikko Davidin luona Purduessa oli matemaattisesti perin mielenkiintoinen. David oli järjestänyt toimiston käyttööni ja sovimme, että luen Rickmanin paperia ja käyn aina tarvittaessa konsultoimassa Davidiä. Niinpä aina parin tunnin välein kipitin Davidin huoneelle pyytämään tulkintaa lukemastani. Näin viikko eteni parin tunnin ja puolen sivun pätkissä. Lopputulema viikosta ei sivumäärällisesti ollut kovin päätähuimaava, mutta intensiivisen lukemisen ansiosta tekstiin alkoi päästä sisälle. Koska kokonaiskuva ei kuitenkaan vielä alkanut hahmottua, sovimme, että tulisin vielä loppukeväästä uudelleen lukemaan paperia. Aiheen tiimoilta on tullut Purduessa käytyä sittemmin vuosittain.



Kuva 3: Purduessa

Kolmivaiheinen konstruktio

Rickmanin konstruktiossa on olennaisesti kolme vaihetta: *caving*, *deformation* ja *sheets*. Vaikka esimerkiksi Lewisin todistuksesta [6] Rickmanin Picardin lauseelle voidaan helposti päätellä joitakin vaatimuksia konstruoitavalle kuvaukselle, ei ole *a priori* kovinkaan selvää, miksi kuvaus kannattaa määritellä juuri näitä vaiheita käyttäen.

Teknisesti ottaen Rickmanin konstruoima kuvaus on paloittain lineaarinen eli konstruktiossa kolmioidaan sekä lähtö- että maaliavaruus ja tämän jälkeen kuvaus määritellään kolmio kerrallaan. Kolmiointi tulee ymmärtää yleistetyssä mielessä, eli käytetty kolmiointi ei formaalisti aivan vastaa simplisiaalista kompleksia.

Konstruktion pääideat tulevat parhaiten esille kahden saavuttamattoman pisteen tapauksessa, eli kuvauksen $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3 \setminus \{\pm e_3/2\}$ tapauksessa. Rickmanin idea on jakaa maaliavaruus $\mathbb{R}^3$ kolmeen alueeseen U_1 , U_2 ja U_3 , joista jokainen sisältää täsmälleen yhden saavuttamattomasta pisteistä, missä ∞ ajatellaan yhdeksi saavuttamattomasta pisteistä. Saavuttamaton piste voidaan ajatella alueen keskellä olevaksi 'silmäksi'. Alueet U_1 , U_2 ja U_3 voidaan valita vapaasti ja on luonnollista valita alueiksi yksikköpallon ylä-, ala- ja ulkopuoli. Tässä konfiguraatiossa alueet ovat kvasikonformisesti ekvivalentteja yksikköpallon $\mathbb{B}^3$ kanssa ja konfiguraation kaksi aluetta koskettavat toisiaan joukossa, joka on bilipschitz-ekvivalentti tason yksikkökierokkeen $\mathbb{D}$ kanssa. Lisäksi kaikki kolme aluetta koskettavat toisiaan yksikköympyrällä $\mathbb{S}^1$.

Valitsemalla kolme pistettä yksikköympyrältä $\mathbb{S}^1$ (kuten kuvassa 1) havaitaan, että alueiden U_1 , U_2 ja U_3 reunat muodostavat simplisiaalisen kompleksin $S = \mathbb{S}^3 \cup B^2$, joka koostuu kolmesta kolmiosta (eli 2-simpleksistä) τ_1 , τ_2 ja τ_3 . Rickmanin idea on konstruoida nyt lähtöavaruuteen $\mathbb{R}^2$ haarautuva 2-ulotteinen pinta P , joka on kompleksin S haarautuva peite. Konstruktion toteutettavuus niin, että haarautuva peitekuvaus $P \rightarrow S$ voidaan jatkaa kvasiisännölliseksi kuvaukseksi $\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3 \setminus \{\pm e_3/2\}$.

Huomautuksena sanottakoon, että on triviaalia

konstruoida abstrakteja komplekseja P , joka ovat haarautuvia peitteitä kompleksille S . Todellinen haaste on upottaa tällainen kompleksiksi avaruuteen $\mathbb{R}^3$ niin, että P jakaa avaruuden $\mathbb{R}^3$ kvasipalloihin, joilla on olennaisesti sama reuna. Tämä viimeinen kommentti vaatii selityksen. Samalla paljastuvat konstruktion liittyvät vaikeudet.

Jos pidetään kiinni valinnasta, että kuvauksen f tulee olla simplisiaalinen eli kuvata kolmiot kolmioille, niin päädytään seuraavaan havaintoon. Olkoon τ kompleksin P 2-simpleksi. Tällöin $f\tau = \tau_i$ jollain $i \in \{1, 2, 3\}$. Koska kolmioilla τ_1, τ_2 ja τ_3 on yhteiset sivut ja kuvauksen f tulee olla avoin, havaitaan, että kompleksissa P tulee olla kolmiot τ' ja τ'' , joilla on yhteinen sivu kolmion τ kanssa ja joille pätee, että $\{f\tau, f\tau', f\tau''\} = \{\tau_1, \tau_2, \tau_3\}$. Näin ollen kompleksin P jokaisella kolmiolla on ainakin yksi sellainen sivu, johon liittyy vähintään kaksi uutta kolmiota.

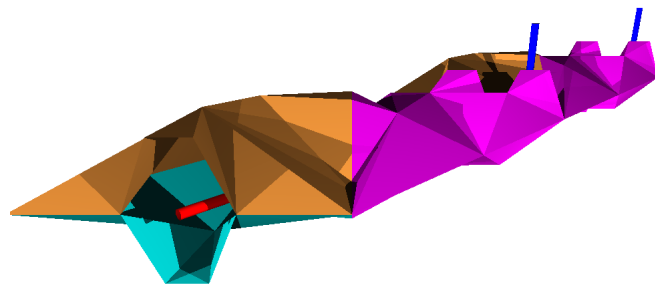
Kylmän hiki nousee kuitenkin vasta sitten, kun huomaa, että kolmiot τ_1, τ_2 ja τ_3 ovat kukin kahden alueista U_1, U_2 ja U_3 reunalla ja $\tau_i \subset \partial U_j \cap \partial U_k$, missä indeksit toteuttavat ehdon $\{i, j, k\} = \{1, 2, 3\}$. Näin ollen kompleksin P tulee jakaa avaruus $\mathbb{R}^3$ kolmeen osaan Ω_1, Ω_2 ja Ω_3 niin, että jokainen kolmioista τ, τ' ja τ'' kuuluu kahden eri alueen reunaan. Tämä ehto seuraa vaatimuksesta, että lopullisen kuvauksen $\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ tulee jatkaa kompleksien välinen kuvaus $P \rightarrow S$.

Ottamalla huomioon nämä vaatimukset päädytään havaintoon, että kompleksin P tulisi jakaa avaruus $\mathbb{R}^3$ sellaisiin osiin Ω_1, Ω_2 ja Ω_3 , joiden reunojen Hausdorff-etäisyys olisi olennaisesti noin yhden kolmion τ läpimitta. Alueiden Ω_1, Ω_2 ja Ω_3 reunat muodostavat siis karkean vastineen Wadan järville. Lisäksi kuvauksen $f: P \rightarrow S$ jatkaminen koko avaruuteen asettaa lisäehdon, että alueiden Ω_i tulee olla rajoittamattomia ja kvasikonformisesti ekvivalentteja yksikköpallon $\mathbb{B}^3$ kanssa.⁴

Rickmanin ratkaisu näihin ongelmiin on kolmivai-

heinen. Ensimmäinen vaihe on *caving*, missä hän konstruoi kaksiulotteisen kolmioidun kompleksin $\hat{P}$, joka ei vielä ole haluttu kompleksin P , mutta joka karkeasti jakaa lähtöavaruuden $\mathbb{R}^3$ lähes halutunlaisiin osiin $\hat{\Omega}_1, \hat{\Omega}_2, \hat{\Omega}_3$. Näillä joukolla on ominaisuus, että $\partial \hat{\Omega}_i$ ei ole Hausdorff-etäisyydessä kovin kaukana joukosta $\partial \hat{\Omega}_j \cap \partial \hat{\Omega}_k$, missä $\{i, j, k\} = \{1, 2, 3\}$. Tämä vaihe on konstruktion teknisesti vaativin osa ja käsittää noin puolet artikkelista.

Kompleksi P konstruoidaan kompleksista $\hat{P}$ ryhmittelemällä kolmiot pareiksi ja korvaamalla jokainen kolmiopari kuudella kolmiolla. Tätä korvausoperaatiota varten kompleksin P ositetaan 2-soluihin, joiden rakenne koodataan triangulaation 2-simpleksien kosketusgraafin virittäviin puihin. Tämän jälkeen jokaisessa kuuden simpleksin ryppäässä ylimääräiset sivut liimataan ja yhteinen simpleksi 'avataan' puun määräämällä tavalla niin, että simpleksit muodostavat keskelle käytävän joukolle $\hat{\Omega}_k$ joukkojen $\hat{\Omega}_i$ ja $\hat{\Omega}_j$ väliin (kuva 4). Jokainen kuuden simpleksin paketti antaa lokaalin kaksinkertaisen haarautuvan peitteen kompleksille S ja näin saadaan haluttu haarautuva peitekuvaus $P \rightarrow S$. Tämä on Rickmanin *sheet*-konstruktio.



Kuva 4: Käytävä.

Jäljellä on enää kuvauksen $f: P \rightarrow S$ jatkaminen.

⁴Tarkasti ottaen joukkojen Ω_i ei tarvitse olla yhtenäisiä. Komponenttien tulee kuitenkin toteuttaa vastaavat kombinatoriset ehdot.

Rickman ratkaisee ongelman kaksiulotteisten paloittain lineaaristen haarautuvien peitteiden *deformaatioteorialla*. Ensimmäinen huomio on, että alueen Ω_i reuna on topologisesti hyvin lähellä tasoa $\mathbb{R}^2$. Kahdentamalla sopivasti kompleksin $\partial\Omega_i$ 1-simpleksejä, voidaan itseasiassa olettaa, että $\partial\Omega_i$ on topologisesti $\mathbb{R}^2$. Näin ollen rajoittumaa $f|_{\partial\Omega_i}$ voidaan ajatella paloittain lineaarisena haarautuvana peitekuvauksena $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{S}^2$, missä maali $\mathbb{S}^2$ puolestaan on topologinen vastine reunalle ∂U_i . Rickman todistaa tämän jälkeen, että jokainen tällainen kuvaus voidaan lokaalisti viedä normaalimuotoon 'isotopialla' pitkin haarautuvia peitekuvauksia. Käyttäen tätä havaintoa hän konstruoi alueeseen Ω_i laskevan jonon alueita $\Omega_i \supset \Omega_{i,1} \supset \Omega_{i,2} \supset \dots$, luo kopiot kuvauksesta f jokaiselle reunalle $\partial\Omega_{i,k}$ ($k \geq 0$) pitäen tarkasti kirjaa kuvauksen asteesta, ja liimaa synnytettyt kuvaukset deformaatioilla yhteen. Prosessi synnyttää kvasisäännöllisen kuvauksen $f_i: \Omega_i \rightarrow U_i$. Koska kuvaukset f_i yhtyvät reunalla P , on haluttu kuvaus $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3 \setminus \{\pm e_3/2\}$ nyt luotu.

Rickmanin konstruktioita analysoitaessa kaksi seikkaa pistää silmään. Ensimmäinen havainto on, että konstruktion ensimmäiset vaihteet eivät oikeastaan mitenkään riipu dimensiosta kolme. Heuristisesti *sheet*-konstruktio, eli kompleksin P luonti kompleksista $\hat{P}$, on kodimension 1 konstruktio ja sama idea toimii kaikissa dimensiossa $n \geq 3$. Vaikka kompleksin $\hat{P}$ luonti on tuskallinen induktiivinen prosessi, voi myös sen yhteydessä huomata saman ilmiön eli että alueiden luominen ei muutu olennaisesti vaikeammaksi korkeammissa dimensioissa. Rickmanin tuloksen todistaminen dimensioissa $n \geq 3$ riippuu näin ollen kuvauksen $P \rightarrow S$ jatkamiseen käytetyn deformaatioteorian yleistämisestä.

Rickmanin deformaatioteoria perustuu kaksiulotteisten haarautuvien peitekuvausten ominaisuuteen, että kuvauksen lokaalit ominaisuudet voidaan lukea suoraan kuvauksen lokaaleista indekseistä haarapisteteissä. Hyödyntäen tätä tietoa Rickman voi deformoida kuvauksen lokaalisti normaalimuotoon, joka riippuu ainoastaan kuvauksen asteesta. Korkeammissa dimensioissa kuvauksen haarajoukosta yleisesti tiedetään ainoastaan, että se on kodimension kaksi

kompleksi. Näin ollen jo dimension kolme haarautuvien peitekuvausten deformaatioteoria on huomattavan monimutkainen eikä deformaatioon perustuvaa Picard-konstruktioita tunneta edes dimensiossa $n = 4$.

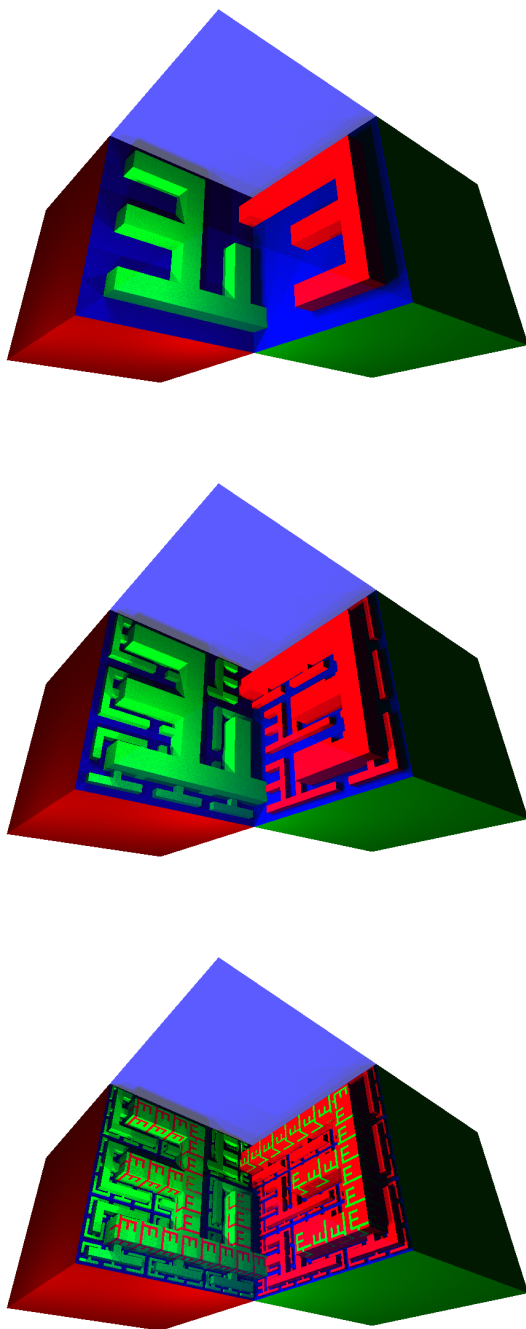
Hieman yllättäen deformaatioteorian voi konstruktiossa kuitenkin ohittaa täysin, jos kompleksin P konstruoi bilipschitz-kategoriassa kvasikonformikategorian sijaan. Rickmanin deformaatiomenetelmä johtaa nimittäin kuvaukseen, joka ominaisuuksiltaan muistuttaa puolikasta Zorich-kuvausta eli kuvauksia $Z|(\mathbb{R}^2 \times [0, \infty))$. Zorich kuvaus puolestaan faktorituu kahteen kuvaukseen, joista ensimmäinen $\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$ on BLD-kuvaus⁵ ja jatko $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ on konformikuvaus.

Nämä ideat yhdistämällä havaitsee, että mikäli kompleksin P voi konstruoida siten, että haarautuva peitekuvaus $P \rightarrow S$ on BLD-kuvaus ja kompleksin P komplementaariset komponentit ovat sisäisessä geometriassaan bilipschitz-ekvivalentteja ylemmän puoliavaruuden kanssa, niin kuvauksen $P \rightarrow S$ jatkaminen avaruuteen $\mathbb{R}^3$ on itseasiassa triviaalia, eikä konstruktiossa ole mitään dimensiosta riippuvaa.

Hieman yllättävästi paljastuu, että sopivan kodimension 1 kompleksin P konstruointi on vaikeinta dimensiossa $n = 3$. Konstruktiioon liittyvät topologiset kysymykset tulevan olennaisesti esiin jo kolmessa ulottuvuudessa ja korkeammissa dimensioissa on itseasiassa enemmän vapauksia tarvittavien bilipschitz-ominaisuuksien todistamiseen. Todistusta varten on luonnollisempaa konstruoida induktiivisesti suoraan alueet Ω_1, Ω_2 ja Ω_3 kompleksin P sijasta (kuva 5).

Vaikka Picard-konstruktioita varten joukon $P = \partial\Omega_1 \cup \partial\Omega_2 \cup \partial\Omega_3$ tulee olla trianguloitu, samalla argumentilla voi konstruoida myös bilipschitz-kontrolloidut Wadan järvet: *Olkoot $n \geq 3$ ja $p \geq 1$. Tällöin on olemassa avoimet erilliset yhtenäiset joukot $\Omega_1, \dots, \Omega_p$, joiden sulkeumien yhdiste on*

⁵Metrysten avaruuksien välinen haarautuva peitekuvaus $h: X \rightarrow Y$ on BLD-kuvaus, jos on olemassa sellainen vakio $L \geq 1$, että jokaiselle avaruuden X polulle γ pätee $\ell(\gamma)/L \leq \ell(h \circ \gamma) \leq L\ell(\gamma)$, missä $\ell(\gamma)$ on polun γ pituus avaruudessa X .



Kuva 5: Induktion ensivaiheet; joka askeleessa skaala kolminkertaistuu.

$\mathbb{R}^n$, jotka ovat sisäiseltä geometrialtaan bilipschitz-ekvivalentteja avoimen puoliavaruuden $\mathbb{R}^{n-1} \times [0, \infty)$ kanssa ja joilla on yhteinen reuna $\partial\Omega_1 = \dots = \partial\Omega_p$. Toisin kuin tason $\mathbb{R}^2$ avaruuden $\mathbb{R}^n$ voi siis jakaa mielivaltaisen suureen äärelliseen määrään sisäiseltä geometrialtaan eukliidisia puoliavaruuksia, joilla on yhteinen reuna.

Yhdistämällä tehdyt havainnot päädytään tulokseen, että Rickmanin Picard-konstruktion taustalla on itseasiassa BLD-kuvaus eukliidisesta avaruudesta Riemannin monistolle, joka yhdistettynä konformikuvaukseen antaa halutun kvasisäännöllisen kuvauksen punkteeratulle pallolle.

Lause ([1, Theorem 1.2]). *Olkoon $n \geq 3$ ja olkoot $y_1, \dots, y_p \in \mathbb{S}^n$ pisteitä. Tällöin on olemassa sellainen Riemannin metrikka g avaruudessa $M = \mathbb{S}^n \setminus \{y_1, \dots, y_p\}$, että on olemassa BLD-kuvaus $\mathbb{R}^n \rightarrow (M, g)$ ja kvasikonformikuvaus $(M, g) \rightarrow \mathbb{S}^n \setminus \{y_1, \dots, y_p\}$.*

Korollaaari ([1, Theorem 1.1]). *Olkoon $n \geq 3$ ja olkoot $y_1, \dots, y_p \in \mathbb{R}^n$ pisteitä. Tällöin on olemassa kvassisäännöllinen kuvaus $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, joka jättää saavuttamatta täsmälleen pisteet $y_1, \dots, y_p$.*

Viitteet

- [1] D. Drasin and P. Pankka. Sharpness of Rickman's Picard theorem in all dimensions. *Acta Math. (to appear)*, *arXiv:1304.6998*.
- [2] F. W. Gehring. Rings and quasiconformal mappings in space. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 103:353–393, 1962.
- [3] F. W. Gehring and J. Väisälä. The coefficients of quasiconformality of domains in space. *Acta Math.*, 114:1–70, 1965.
- [4] J. Heinonen and S. Rickman. Quasiregular maps $\mathbb{S}^3 \rightarrow \mathbb{S}^3$ with wild branch sets. *Topology*, 37(1):1–24, 1998.
- [5] J. Heinonen and S. Rickman. Geometric branched covers between generalized manifolds. *Duke Math. J.*, 113(3):465–529, 2002.

- [6] J. L. Lewis. Picard's theorem and Rickman's theorem by way of Harnack's inequality. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 122(1):199–206, 1994.
- [7] O. Martio, S. Rickman, and J. Väisälä. Definitions for quasiregular mappings. *Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A I No.*, 448:40, 1969.
- [8] O. Martio, S. Rickman, and J. Väisälä. Distortion and singularities of quasiregular mappings. *Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A I No.*, 465:13, 1970.
- [9] O. Martio, S. Rickman, and J. Väisälä. Topological and metric properties of quasiregular mappings. *Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A I*, (488):31, 1971.
- [10] G. D. Mostow. Quasi-conformal mappings in n -space and the rigidity of hyperbolic space forms. *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.*, (34):53–104, 1968.
- [11] Y. G. Reshetnyak. *Space mappings with bounded distortion*, volume 73 of *Translations of Mathematical Monographs*. American Mathematical Society, Providence, RI, 1989. Translated from the Russian by H. H. McFaden.
- [12] S. Rickman. On the number of omitted values of entire quasiregular mappings. *J. Analyse Math.*, 37:100–117, 1980.
- [13] S. Rickman. A defect relation for quasimeromorphic mappings. *Ann. of Math. (2)*, 114(1):165–191, 1981.
- [14] S. Rickman. The analogue of Picard's theorem for quasiregular mappings in dimension three. *Acta Math.*, 154(3-4):195–242, 1985.
- [15] S. Rickman. Simply connected quasiregularly elliptic 4-manifolds. *Ann. Acad. Sci. Fenn. Math.*, 31(1):97–110, 2006.
- [16] J. Väisälä. Onko n -ulotteista funktioteoriaa olemassa? *Arkhimedes*, 1968(2):11–16, 1968.
- [17] V. A. Zorich. The theorem of M. A. Lavrent'ev on quasiconformal mappings in space. *Mat. Sb.*, 74:417–433, 1967.