Lineaarialgebra ja matriisilaskenta II

28.8.2013

Avoin yliopisto, HY
Johanna Rämö
johanna.ramo@helsinki.fi

Tehtävä

Tarkastellaan lineaarikuvausta

$$L\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2, \quad L(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1+x_2+x_3+x_4,\ x_1+2x_3-x_4).$$

Mikä on ytimen Ker L dimensio? Entä kuvan Im L dimensio?

Ratkaisun avaimet: Voidaan osoittaa, että
Ker $L = \mathrm{span}((-2, 1, 1, 0), (1, -2, 0, 1))$ ja
Im $L = \mathrm{span}((1, 1), (1, 0), (1, 2), (1, -1))$.

Määritelmä

Oletetaan, että W on sisätuloavaruuden V aliavaruus, jolla on ortogonaalinen kanta $(\bar{w}_1, \ldots, \bar{w}_k)$. Vektorin $\bar{v} \in V$ *kohtisuora projektio aliavaruudelle W* on

$$\mathrm{proj}_W(\bar{v}) = \frac{\langle \bar{v}, \bar{w}_1 \rangle}{\langle \bar{w}_1, \bar{w}_1 \rangle}\bar{w}_1 + \frac{\langle \bar{v}, \bar{w}_2 \rangle}{\langle \bar{w}_2, \bar{w}_2 \rangle}\bar{w}_2 + \cdots + \frac{\langle \bar{v}, \bar{w}_k \rangle}{\langle \bar{w}_k, \bar{w}_k \rangle}\bar{w}_k.$$

Toisin sanoen

$$\mathrm{proj}_W(\bar{v}) = \mathrm{proj}_{\bar{w}_1}(\bar{v}) + \mathrm{proj}_{\bar{w}_2}(\bar{v}) + \cdots + \mathrm{proj}_{\bar{w}_k}(\bar{v}).$$

Kohtisuora komponentti

Määritelmä

Vektorin $\bar{v} \in V$ *kohtisuora komponentti aliavaruutta* W *vastaan* on

$$\mathrm{perp}_W(\bar{v}) = \bar{v} - \mathsf{proj}_W(\bar{v}).$$

Miten löytää ortogonaalinen kanta?

Oletetaan, että $\mathcal{B} = (\bar{v}_1, \ldots, \bar{v}_n)$ on sisätuloavaruuden V kanta. Tällöin avaruudella V on ortogonaalinen kanta $(\bar{w}_1, \ldots, \bar{w}_n)$, joka saadaan seuraavasti:

$$
\begin{aligned}
\bar{w}_1 &= \bar{v}_1 \\
\bar{w}_2 &= \mathrm{perp}_{\bar{w}_1}(\bar{v}_2) \\
&\vdots \\
\bar{w}_n &= \mathrm{perp}_{\bar{w}_1, \ldots, \bar{w}_{n-1}}(\bar{v}_n).
\end{aligned}
$$

Ortonormaalit kannat

Kanta on ortonormaali, jos se on ortogonaalinen ja lisäksi jokaisen kantavektorin normi on yksi.

Ortogonaalisesta kannasta saadaan ortonormaali skaalamalla vektorien pituuksia.

Ortonormaalin kannan suhteen koordinaatit on helppo määrittää

Lause

Oletetaan, että $\mathcal{B} = (\bar{u}_1, \ldots, \bar{u}_n)$ on sisätuloavaruuden V ortonormaali kanta. Olkoon $\bar{v} \in V$. Tällöin

$$\bar{v} = \langle \bar{v}, \bar{u}_1 \rangle \bar{u}_1 + \langle \bar{v}, \bar{u}_2 \rangle \bar{u}_2 + \cdots + \langle \bar{v}, \bar{u}_n \rangle \bar{u}_n.$$

Toisin sanoen vektorin $\bar{v}$ koordinaatit kannan $\mathcal{B}$ suhteen saadaan sisätulon avulla.