Lineaarialgebra ja matriisilaskenta II

27.8.2013

Avoin yliopisto, HY
Johanna Rämö
johanna.ramo@helsinki.fi

Koordinaattivektorit luonnollisen kannan suhteen

Miltä näyttää vektorin $(3, 1, 5) \in \mathbb{R}^3$ koordinaattivektori luonnollisen kannan $\mathcal{E} = (\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3)$ suhteen?

Miltä näyttää vektorin $(3, 1, 5)$ koordinaattivektori kannan $\mathcal{B} = ((0, 1, 0), (0, 1, 1), (1, 0, 1))$ suhteen?

Mitä eilen tehtiin?

Kannanvaihtomatriisi kannasta $\mathcal{E}$ kantaan $\mathcal{B} = ((0,1,0),(0,1,1),(1,0,1))$ on

$$P_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{E}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Kannanvaihtomatriisin avulla voi muuttaa luonnollisen kannan suhteen kirjoitetut koordinaatit kannan $\mathcal{B}$ suhteen kirjoitetuiksi koordinaateiksi.

Kannanvaihtomatriisi

Olkoon V vektoriavaruus, jolla on kannat $\mathcal{R}$, $\mathcal{S}$ ja $\mathcal{T}$.

Kannanvaihto voidaan tehdä kolmannen kannan kautta:

$$P_{\mathcal{T}\leftarrow\mathcal{R}} = P_{\mathcal{T}\leftarrow\mathcal{S}} P_{\mathcal{S}\leftarrow\mathcal{R}}.$$

Käänteismatriisilla saadaan aikaan kannanvaihto toiseen suuntaan:

$$(P_{\mathcal{T}\leftarrow\mathcal{S}})^{-1} = P_{\mathcal{S}\leftarrow\mathcal{T}}.$$

Lineaarikuvauksen matriisin voi kirjoittaa muunkin kuin luonnollisen kannan suhteen

Tutkitaan lineaarikuvausta $L\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, jonka standardimatriisi on $A = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$.

Kuvauksen L matriisi ominaisvektoreista koostuvan kannan suhteen on $D = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$.

Mitkä väitteistä ova tosia?

(a) Vektori $\bar{v} = (1, 0, 1)$ on eräässä kuvauksen $L \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $L(a, b, c) = (a - b,\ 3a,\ a + b + c)$ ominaisavaruudessa.

(b) On olemassa lineaarikuvaus, jolla on vain äärellisen monta ominaisvektoria.

(c) Matriisilla voi olla äärettömän monta ominaisarvoa.

Lisäkysymys: Mitä voidaan sanoa lineaarikuvauksen ominaisarvojen lukumäärästä?

Projektio

Vektorin $\bar{v}$ projektio vektorin $\bar{w}$ virittämälle alivaruudelle määritellään kaavalla

$$\mathrm{proj}_{\bar{w}}(\bar{v}) = \frac{\bar{v} \cdot \bar{w}}{\bar{w} \cdot \bar{w}} \bar{w}.$$

Projektio aliavaruudelle

Määritetään vektorin $\bar{v} = (2, 1, 4)$ projektio aliavaruudelle $W = \text{span}(\bar{e}_1, \bar{e}_2)$.

Projektio aliavaruudelle

Määritelmä

Oletetaan, että W on sisätuloavaruuden V aliavaruus, jolla on ortogonaalinen kanta $(\bar{w}_1, \ldots, \bar{w}_k)$. Vektorin $\bar{v} \in V$ *kohtisuora projektio aliavaruudelle* W on

$$\mathrm{proj}_W(\bar{v}) = \frac{\langle \bar{v}, \bar{w}_1 \rangle}{\langle \bar{w}_1, \bar{w}_1 \rangle} \bar{w}_1 + \frac{\langle \bar{v}, \bar{w}_2 \rangle}{\langle \bar{w}_2, \bar{w}_2 \rangle} \bar{w}_2 + \cdots + \frac{\langle \bar{v}, \bar{w}_k \rangle}{\langle \bar{w}_k, \bar{w}_k \rangle} \bar{w}_k.$$

Toisin sanoen

$$\mathrm{proj}_W(\bar{v}) = \mathrm{proj}_{\bar{w}_1}(\bar{v}) + \mathrm{proj}_{\bar{w}_2}(\bar{v}) + \cdots + \mathrm{proj}_{\bar{w}_k}(\bar{v}).$$