Lineaarialgebra ja matriisilaskenta II

26.8.2013

Avoin yliopisto, HY
Johanna Rämö
johanna.ramo@helsinki.fi

Pistetulon laskusääntöjä

Oletetaan, että $\bar{v}, \bar{w} \in \mathbb{R}^n$ ja $c \in \mathbb{R}$. Tällöin

(a) $\bar{v} \cdot \bar{w} = \bar{w} \cdot \bar{v}$

(b) $\bar{v} \cdot (\bar{w} + \bar{u}) = \bar{v} \cdot \bar{w} + \bar{v} \cdot \bar{u}$

(c) $(c\bar{v}) \cdot \bar{w} = c(\bar{v} \cdot \bar{w})$

(d) $\bar{v} \cdot \bar{v} \geq 0$; lisäksi $\bar{v} \cdot \bar{v} = 0$ jos ja vain jos $\bar{v} = \bar{0}$.

Sisätulo

Määritelmä

Vektoriavaruuden V *sisätulo* on sääntö, joka liittää jokaiseen vektoriavaruuden V alkiopariin $(\bar{v}, \bar{w})$ yksikäsitteisen reaaliluvun $\langle \bar{v}, \bar{w} \rangle$. Lisäksi sisätulon on toteutettava seuraavat ehdot kaikilla $\bar{v}, \bar{w}, \bar{u} \in V$ ja $c \in \mathbb{R}$:

(a) $\langle \bar{v}, \bar{w} \rangle = \langle \bar{w}, \bar{v} \rangle$

(b) $\langle \bar{v}, \bar{w} + \bar{u} \rangle = \langle \bar{v}, \bar{w} \rangle + \langle \bar{v}, \bar{u} \rangle$

(c) $\langle c\bar{v}, \bar{w} \rangle = c\langle \bar{v}, \bar{w} \rangle$

(d) $\langle \bar{v}, \bar{v} \rangle \geq 0$; lisäksi $\langle \bar{v}, \bar{v} \rangle = 0$ jos ja vain jos $\bar{v} = \bar{0}$.

Normi ja kohtisuoruus

Määritelmä

Olkoon V sisätuloavaruus. Tällöin vektorin $\bar{v} \in V$ *normi* on

$$\| \bar{v} \| = \sqrt{\langle \bar{v}, \bar{v} \rangle}.$$

Määritelmä

Olkoon V sisätuloavaruus. Oletetaan, että $\bar{v}, \bar{w} \in V$. Tällöin vektorit $\bar{v} \in V$ ja $\bar{w} \in V$ ovat *ortogonaaliset* eli *kohtisuorassa toisiaan vastaan*, jos

$$\langle \bar{v}, \bar{w} \rangle = 0.$$

Esimerkki

Polynomiavaruudessa $\mathcal{P}_2$ voidaan määritellä sisätulo kaavalla

$$\langle ax^2 + bx + c, a'x^2 + b'x + c' \rangle = aa' + bb' + cc'.$$

Määritetään polynomien $p = 3x^2 - 2x + 1$ ja $q = x - 4$ sisätulo.

Määritetään polynomin $p = 3x^2 - 2x + 1$ normi.

Esimerkki

Määritetään ne vektorit, jotka kohtisuorassa suoran $\mathrm{span}((-2, 3))$ jokaista vektoria vastaan.

Kohtisuora komplementti

Aliavaruuden kohtisuora komplementti koostuu niistä vektoreista, jotka ovat kohtisuorassa kaikkia aliavaruuden vektoreita vastaan.

Määritelmä

Olkoon W sisätuloavaruuden V aliavaruus. Sen *kohtisuora komplementti* on joukko

$$W^{\perp} = \{\bar{v} \in V \mid \langle \bar{v}, \bar{w} \rangle = 0 \text{ kaikilla } \bar{w} \in W\}.$$

Tehtävä

Kuvaile, miltä näyttävät seuraavissa tapauksissa aliavaruus W ja sen kohtisuora komplementti $W^\perp$.

(a) $W = \text{span}((1,0,0),(0,1,0))$

(b) $W = \text{span}((3,0,0))$

(c) $W = \mathbb{R}^3$

Mitkä väitteistä ova tosia?

(a) Oletetaan, että lineaarikuvaukselle $L\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ pätee $L(1,0) = (-2,3)$ ja $L(0,1) = (-5,4)$. Tällöin kuvauksen matriisi on $\begin{bmatrix} -2 & 3 \\ -5 & 4 \end{bmatrix}$.

(b) Oletetaan, että lineaarikuvaukselle $L\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ pätee $L(1,0) = (1,-3)$, $L(0,1) = (1,-2)$ ja $L(1,1) = (0,1)$. Tällöin kuvauksen matriisi on $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -3 & -2 & 1 \end{bmatrix}$.

(c) Oletetaan, että lineaarikuvaukselle $L\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ pätee $L(-1,1) = (-1,3)$ ja $L(1,0) = (-3,2)$. Tällöin kuvauksen matriisi on $\begin{bmatrix} -3 & -4 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$.

Tehtävä

Etsi matriisi, jonka määräämä lineaarikuvaus ensin peilaa vektorit pystyakselin suhteen ja sitten kiertää vektoreita origon ympäri 180° vastapäivään.

Tehtävä

Avaruudella $\mathbb{R}^3$ on kanta $\mathcal{B} = ((0,1,0),(0,1,1),(1,0,1))$. Määritä kannanvaihtomatriisin avulla vektorin $\bar{v} = (3,1,5)$ koordinaatit kannan $\mathcal{B}$ suhteen.