Lineaarialgebra ja matriisilaskenta II

22.8.2013

Avoin yliopisto, HY
Johanna Rämö
johanna.ramo@helsinki.fi

Kuinka puhua matematiikasta omin sanoin

Osoita, että kuvaus $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ on lineaarinen, jos ja vain jos on olemassa sellainen reaaliluku a, että $f(x) = ax$ kaikilla $x \in \mathbb{R}$.

”Reaalikuvauksista lineaarisia ovat ainoastaan ne, joiden kuvaaja on suora.”'

Lineaarikuvauksen ominaisarvot ja ominaisvektorit

Määritelmä

Oletetaan, että $L\colon V \to V$ on lineaarikuvaus. Luku $\lambda \in \mathbb{R}$ on kuvauksen L *ominaisarvo*, jos on olemassa sellainen vektori $\bar{v} \in V$, että $\bar{v} \neq \bar{0}$ ja

$$L(\bar{v}) = \lambda \bar{v}.$$

Vektoria $\bar{v}$, joka toteuttaa yllä mainitun ehdon kutsutaan ominaisarvoon λ liittyväksi *ominaisvektoriksi*.

Tehtävä: Muotoile ominaisarvon ja ominaisvektorin määritelmä omin sanoin. Pyri ymmärrettävyyteen!

Ominaisvektorit muodostavat ominaisavaruuden

Määritelmä

Oletetaan, että lineaarikuvauksella $L \colon V \to V$ on ominaisarvo $\lambda \in \mathbb{R}$. Ominaisarvoa λ vastaava *ominaisavaruus* on joukko

$$V_\lambda = \{\bar{v} \in V \mid L(\bar{v}) = \lambda\bar{v}.\}$$

Tehtävä: Muotoile ominaisavaruuden määritelmä omin sanoin. Pyri ymmärrettävyyteen!

Tehtävä

Tarkastellaan lineaarikuvausta L, joka peilaa tason vektorit suoran $\mathrm{span}((1,1))$ suhteen.

- Etsi kuvan perusteella vektoreita, jotka pysyvät kuvauksessa L paikallaan.
- Ets kuvan perusteella vektoreita, jotka kuvautuvat vastavektoreikseen.

Määritä kuvan perusteella kuvauksen L ominaisarvot ja ominaisavaruudet.

Määritelmä

Vektoriavaruuden V *sisätulo* on sääntö, joka liittää jokaiseen vektoriavaruuden V alkiopariin $(\bar{v}, \bar{w})$ yksikäsitteisen reaaliluvun $\langle \bar{v}, \bar{w} \rangle$. Lisäksi sisätulon on toteutettava seuraavat ehdot kaikilla $\bar{v}, \bar{w}, \bar{u} \in V$ ja $c \in \mathbb{R}$:

(a) $\langle \bar{v}, \bar{w} \rangle = \langle \bar{w}, \bar{v} \rangle$

(b) $\langle \bar{v}, \bar{w} + \bar{u} \rangle = \langle \bar{v}, \bar{w} \rangle + \langle \bar{v}, \bar{u} \rangle$

(c) $\langle c\bar{v}, \bar{w} \rangle = c\langle \bar{v}, \bar{w} \rangle$

(d) $\langle \bar{v}, \bar{v} \rangle \geq 0$; lisäksi $\langle \bar{v}, \bar{v} \rangle = 0$ jos ja vain jos $\bar{v} = \bar{0}$.

Esimerkkejä

- Vektoreiden pistetulo on sisätulo.
- Kaava $\langle \bar{v}, \bar{w} \rangle = v_1 w_1 + 2 v_2 w_2$ määrittää erään toisen sisätulon avaruudessa $\mathbb{R}^2$.
- Funktioavaruudessa

$$C([0,1]) = \{f\colon [0,1] \to \mathbb{R} \mid f \text{ on jatkuva}\}$$

voidaan määritellä sisätulo kaavalla

$$\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(x) g(x)\, dx.$$

Miksi sisätulo on mielenkiintoinen?

Sisätulon avulla voidaan määritellä muun muassa

- vektorin normi
- vektorien kohtisuoruus
- projektio.

Mikä on mielestäsi paras luonnehdinta isomorfismille?

(a) Isomorfismi on bijektiivinen lineaarikuvaus.

(b) Isomorfismi on lineaarikuvaus, joka on sekä injektiivinen että surjektiivinen.

(c) Lineaarikuvaus $L \colon V \to W$ on isomorfismi, jos $\operatorname{Ker} L = \{\bar{0}\}$ ja $\operatorname{Im} L = W$.

(d) Jos avaruuksien välillä on isomorfismi, avaruudet ovat lineaarialgebran näkökulmasta samanlaiset.

(e) Jokin muu.

Kannanvaihtoa voi ajatella kuvauksena